This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

L Soc 3983.6

LSoc 3983.6 9.4#5. 8



NOVI
COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOM. VIII.

pro Annis MDCCLX. et MDCCLXI.



PETROPOLI

TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM

c. MDCCLXIII.

LSoc 3983.6

HARVARD UNIVERSITY LIBRARY

SVMMARIVM
DISSERTATIONVM
QVAS CONTINET
NOVORVM COMMENTARIORVM
TOMVS VIII.

MATHEMATICA.

I.

De integratione aequationum differentialium.

Auctore Leon. Eulero pag. 3.

Saeculum mox erit elapſum, ex quo idea Differentialium et Integralium feliciſſimo ſucceſſu in Analyſin eſt inuecta, vnde etiam haec ſcientia tanta ſubito accepit incrementa, vt, quicquid antea fuerat exploratum, vix comparationem ſuſtineat. Quantumuis autem hoc nouum calculi genus ſummorum ingeniorum ſtudio et indefeſſo labore adhuc eſt excultum, minime tamen id exhauſtum eſt reputandum, et quo vlterius in hac ſcientia penetrare licet, eo ampliores campos etiam nunc prorſus incultos detegunt Geometrae, qui vires humanas longe ſuperare videntur. Cum igitur labores in hoc ſtudio impenſi iam tantum vtilitatis attulerint, eo magis hinc animi Geometrarum inflammari debent, vt omnibus viribus immenſum hunc campum perſcrutari annitantur. Quorum quidem ſtudia antiquis tantum elementis ſunt adſtricta, vel qui a Mathematicis diſciplinis prorſus abhorrent, eos idea Infiniti, cui ſublimiores iſtae inueſtigationes ſunt ſuperſtructae, non mediocriter offendere ſolet, et voce perperam intellecti, plerumque ſibi perſuadent, ſubtiliorem hanc Analyſeos

 partem

partem tantum in vanis circa Infinite magna et Infinite parua ſpeculationibus conſumi, neque inde quicquam vtilitatis ad vera cognitionis noſtrae obiecta, quippe quae omnia ſint finita, expectari poſſe. Quae opinio, etſi vtiliſſimis inuentis, quae ſublimiori Analyſi accepta referre debemus, iam funditus eſt euerſa, haud tamen abs re erit peruerſas illas Infiniti ideas, quibus ea innititur, remouere et emendare. Cum igitur vniuerſa Matheſis in omnis generis quantitatum contemplatione et comparatione verſetur, nemo ignorat, plerasque quantitates, quas in mundo deprehendimus, continuo variari, et perpetuis mutationibus eſſe obnoxias Coelum inſpicienti mox patet, ſolem, lunam et ſtellas ſitum ſuum iugiter mutare, ſola illa ſtella excepta, ſi quae forte in ipſo mundi polo fixa apparet: ſitum autem per quantitates cognoſcimus, dum locum cuiusque ſtellae, ſiue reſpectu noſtri Horizontis per Altitudinem et Azimuthum, ſiue reſpectu Aequatoris per Aſcenſionem rectam et Declinationem, ſiue denique reſpectu Eclipticae per Longitudinem et Latitudinem definimus; vnde perſpicuum eſt, totam Aſtronomiam cognitione quantitatum contineri, quarum aliae continuas mutationes patiantur, modo maiores modo minores, aliae vero perpetuo eaedem maneant, veluti Latitudo cuiusque ſtellae fixae, etiamſi nunc quidem hic leuis variatio ſit obſeruata. Harum ergo quantitatum, quas natura nobis offert, diuiſio in Variabiles et Conſtantes ſatis eſt manifeſta, ſimulque intelligitur, difficillimam noſtrae cognitionis partem in accurata quantitatum Variabilium inueſtigatione eſſe conſtitutam. Scilicet tum demum perfectam cognitionem

motuum

motuum coeleſtium, veluti planetae, ſeu cometae, ſumus adepti, cum pro quouis tempore eius locum in coelo, hoc eſt, eius Longitudinem et Latitudinem, aſſignare valuerimus. Ponamus nobis lunae motum hac ratione eſſe exploratum, quo melius noſtras cogitationes figere queamus; quicquid enim de hoc caſu dixero, id facile ad omnis generis quantitates variabiles transferetur. Cum igitur ad quoduis tempus, quod pariter quantitate metimur, lunae tum Longitudo, quam Latitudo, aſſignari queat, vtraque haec quantitas per tempus determinatur, ſeu ſi tempus a certa epocha elapſum denotetur littera t, tam Longitudo, quam Latitudo, lunae exprimetur certa quadam formula per tempus t vtcunque definita, cuius valorem pro quouis tempore t aſſignare liceat. Huiusmodi formula generalis, cuius valor determinatus pro quolibet tempore determinato exhiberi poteſt, vocatur in Analyſi Functio quantitatis t, ſicque noſtro caſu et Longitudo et Latitudo lunae erit certa quaedam Functio temporis t, *cuius natura, hoc eſt, ratio compoſitionis*, ſi nobis eſſet perſpecta, motus lunae perfectam haberemus cognitionem, quae igitur tota in ratione illarum functionum ſita eſt cenſenda. Cum igitur inde conſtet, quantam mutationem lunae Longitudo et Latitudo quouis tempore ſubeat; variatio etiam, minimo tempore facta, quae vtique et ipſa erit minima, definiri, eiusque relatio ad ipſum tempus minimum aſſignari poterit; quae cognitio maximi eſt momenti, cum inde mutatio momentanea innoteſcat, nihilque hic impedit, quo minus tempuſculum iſtud euaneſcens ſeu infinite paruum accipiatur. Atque hic eſt fons Infinite paruorum, in Analyſi receptorum*; vbi probe notari conuenit,

venit, non tam ipſorum paruitatem, quam rationem mutuam, quae vtique eſt finita, conſiderari: et quemadmodum huiusmodi Infinite parua Differentialia vocantur, ita Calculus, in eorum relatione ſcrutanda occupatus, Differentialis appellatur: neque hic quicquam de Infinite paruis eſt metuendum, cum omnis calculus in eorum relatione, quae eſt finita, abſoluatur. Hactenus quidem aſſumſimus indolem earum formularum, ſeu Functionum, quae Longitudinem lunae et Latitudinem per tempus exprimunt, eſſe cognitam; verum ſi viciſſim ipſa mutatio momentanea daretur, quippe quam ex viribus lunam ſollicitantibus colligere licet, tum quaeſtio ad naturam illarum Functionum inueſtigandam reducitur, totaque lunae theoria ipſi eſt ſuperſtruenda. Hic igitur ex mutatione momentanea, ſeu, vt Geometrae loquuntur, ex data relatione Differentialium, indoles ac natura ipſarum functionum determinari debet, in quo Calculus Integralis continetur. Quemadmodum itaque Calculus Differentialis docet Functionum Differentialia, ſeu potius eorum rationem, inueſtigare, ita viciſſim Calculus Integralis ex data Differentialium ratione indolem Functionum eruendi methodum tradit. Vtriusque ergo vim ita commodiſſime deſcribere licet, vt ſi v fuerit Functio quaecunque quantitatis t, ac ponatur Differentialium ratio $\frac{dv}{dt} = p$, Calculus Differentialis methodum exhibeat, ex indole Functionis v hanc Differentialium rationem p definiendi; contra autem Calculi Integralis munus ſit, ex data hac ratione p, ſeu eius relatione ad ipſas quantitates t et v, indolem Functionis v eruere. Scilicet ſi inter has quantitates p, t, et v aequatio quaecunque proponatur, totum

tum negotium eo redit, vt inde natura Functionis v, ſeu quomodo ea per t determinetur, concludatur. Quia vero ex illa aequatione data quantitatem $p = \frac{dv}{dt}$ per t et v definire licet, hinc eiusmodi aequatio $Mdt + Ndv = 0$ naſcetur, Differentialis appellata, in qua litterae M et N vtcunque per t et v determinatae ſunt intelligendae, et iam quaeritur, cuiusmodi functio quantitas v ſit ipſius t, ſeu, quod eodem redit, aequatio relationem inter t et v exprimens requiritur, vnde pro quouis valore ipſius t valor ipſius v aſſignari queat.

Hanc igitur quaeſtionem in latiſſimo ſenſu acceptam Cel. *Eulerus* in hac diſſertatione contemplatur, et poſtquam animaduertit, eam tantum pauciſſimis caſibus adhuc reſolui poſſe, atque in hunc finem methodos maxime diuerſas a Geometris adhiberi ſolere, methodum multo ſimpliciorem magisque naturalem exponit, omnes illos caſus expediendi, quae ſimul viam ad plurimos alios caſus patefacere videtur. Quantum hic ſit praeſtitum, ex ipſo Auctoris ſcripto eſt iudicandum; hic tantum notaſſe iuuabit, aequationem hanc $Mdt + Ndv = 0$ etiam in latiſſimo ſenſu acceptam, exiguam tantum particulam vniuerſae Analyſeos infinitorum continere, quia tantum Differentialia primi ordinis complectitur. Quodſi enim v fuerit functio quaecunque ipſius t, et Differentialium ratio ponatur $\frac{dv}{dt} = p$, etiam haec quantitas p eſt variabilis, ex cuius variatione iterum ſimiliter ſtatui poteſt $\frac{dp}{dt} = q$, quae quantitas q Differentialia ſecundi ordinis inuoluere dicitur: quae cum pariter a t pendeat, ponaturque $\frac{dq}{dt} = r$, haec littera Differentialia tertii ordinis implicare cenſetur, et ita porro. Quibus poſitis Calculus Integralis ita de-

ſcribi poteſt, vt ſit methodus ex data relatione Differentialium cuiusque ordinis indolem Functionis v inueſtigandi, ex qua illa Differentialia naſcantur, ſeu, quod eodem redit, ex data aequatione quacunque inter quantitates t, v, p, q, r etc. quemadmodum quantitas v per t determinetur, inueſtigari oportet. Ab hoc autem perfectionis gradu omnia adhuc inuenta Analyſeos artificia multo magis ſunt remota, et quae adhuc ignorantur, immenſum ſuperant exiguam illam particulam, quam etiamnum euoluere licuit.

Verum ne ſic quidem tota vis Analyſis infinitorum exhauritur, quia eiusmodi tantum functiones hic ſumus contemplati, quae per vnicam variabilem determinantur, veluti longitudo vel latitudo lunae ſpectari poterat, tanquam Functio ſolius illius quantitatis, qua tempus exprimitur. Dantur autem vtique caſus, quibus eiusmodi Functiones quaerantur, quae ſimul per binas, vel ternas, vel adeo plures variabiles determinantur.

Huiusmodi exemplum ſe offert, quando motus fluuii definiri debet, vbi aquae celeritatem pro omnibus punctis, quae in fluuio concipere licet, determinari oportet. Cuiuslibet autem puncti ſitus per ternas coordinatas x, y et z definitur, et celeritas in quolibet puncto tanquam Functio ternarum iſtarum variabilium x, y et z erit conſideranda: quodſi ergo relatio inter harum et ipſius Functionis quaeſitae differentialia intercedens proponatur, quam forte ex principiis motus colligere licet, quaeſtio huc redit, vt eiusmodi functio v ternarum variabilium x, y, et z definiatur, cuius

Differentiale dv ad harum Differentialia dx, dy, dz datam teneat relationem; ſeu ſi ponatur $dv = pdx + qdy + rdz$, ex data relatione inter quantitates v, x, y, z, p, q, r aequatione quacunque expreſſa, quaeritur, quomodo functio v per variabiles x, y et z exprimatur. Tum vero, cum etiam p, q, r futurae ſint functiones coordinatarum x, y et z, earum quoque differentialia, quae ſecundi ordinis ſunt cenſenda, in computum ingredi poſſunt, vnde hanc quaeſtionem, vt latiſſime pateat, etiam ad relationem differentialium ſecundi altiorumque ordinum extendi conueniet. Quodſi motus fluminis etiam cum tempore varietur, tum ad eius cognitionem celeritatem nonſolum pro quolibet puncto, quod iam ternis coordinatis definitur, ſed etiam ad quoduis tempus aſſignari debet, ex quo celeritas quaeſita, tanquam Functio quatuor variabilium, trium ſcilicet coordinatarum et temporis, erit ſpectanda. Quocirca Calculus Integralis generaliſſime ita definiri poterit, vt dicatur eſſe methodus talem Functionem quotcunque variabilium inueſtigandi, cuius Differentialia cuiusque ordinis propoſitam teneant relationem. Quicquid autem adhuc in hoc genere eſt praeſtitum, ad vnicum fere caſum, quo functio vnius variabilis ex data differentialium relatione quaeritur; et parum admodum, quod quidem ad functiones plurium variabilium pertineat, in medium a Geometris eſt allatum. In quo cum quaſi Calculi Integralis pars altera ſit conſtituenda, fateri cogimur, eam etiam nunc fere totam incultam iacere. Interim tamen certum eſt, vniuerſam Theoriam motus fluidorum huic Analyſeos parti

 maxi-

maximam partem inniti, in eaque vix quicquam ſolidi ante expectari poſſe, quam fines Analyſeos etiam in hoc genere haud mediocriter fuerint prolati. Fortiori certe incitamento Geometris haud erit opus, vt omnes vires ad hoc quaſi nouum Analyſeos genus excolendum intendant.

II.

Solutio Problematis de inueſtigatione trium numerorum, quorum tam ſumma, quam productum, nec non ſumma productorum ex binis, ſint numeri quadrati.

Auctore Leon. Eulero pag. 64.

Etſi huius generis problemata plerisque Geometris nimis ſterilia videntur, quam vt in iis ſoluendis operam ſuam collocare, aequum iudicent, negari tamen nequit, quin inde inſignia incrementa Analyſis acceperit. Ac certe in genere affirmare licet, quo magis cuiusquam problematis reſolutio fuerit abſcondita, methodisque adhuc cognitis fruſtra tentata, eo magis ſolutionis, ſi tandem ſucceſſerit, pretium eſſe conſtituendum. Ad hoc autem genus omnino referendum videtur problema hic pertractatum, cuius difficultatem non ſolum plures conatus irriti, antequam ad ſolutionem

nem pervenire licet, ſuſcipiendi, ſed etiam magnitudo numerorum ſatisfacientium manifeſto declarat. Quam quidem ſolutionem Cel. Auctor tanquam ſimpliciſſimam affert, ea maximis numeris continetur; verum hic non parum intererit obſervaſſe, ex ipſa Auctoris ſolutione multo minores numeros quaeſtioni ſatisfacientes ſatis expedite elici poſſe. Poſitis enim ternis quaeſitis numeris nx, ny, nz, vt tres ſequentes numeros

I. $n(x+y+z)$; II. $nn(xy+xz+yz)$; III. n^3xyz

quadratos effici oporteat; prima et tertia conditio impletur ſumendo $z = \frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ et $n = m^2xy(x+y)(xy-vv)$. Vt autem ſecunda impleatur, ſtatuit Auctor:

$xy - vv = uu$; $x = tv$, vt ſit $y = \frac{vv+uu}{tv}$ et $z = \frac{vv}{uu}(x+y)$ tum vero deducitur ad hanc aequationem:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-2tt-2}$$

cui facillime ſatisfit ſumendo $s = \frac{3}{2}$; ſiquidem hinc ſequitur $\frac{vv}{uu} = tt - \frac{5}{4}$. Capi ergo convenit $t = \frac{pp+5qq}{4pq}$; vnde fit $\frac{v}{u} = \frac{5qq-pp}{4pq}$, vbi numeros p et q pro lubitu aſſumere licet, ita vt hinc innumerabiles ſolutiones obtineantur: inter quas ſimpliciſſima videtur, quae oritur ſumendo $t = \frac{3}{2}$, vnde fit $v = 1$ et $u = 1$, porro $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{4}{3}$ et $z = \frac{17}{6}$. Iam ob $x+y+z = \frac{17}{3}$, capiatur $n = 6.34$ ex prima conditione, ſicque tres numeri ſatisfacientes minimi erunt:

I.. $9.34 = 306$; II.. $8.34 = 272$; III.. $17.34 = 578$ quorum ſumma eſt $= 1156 = 34^2$.

b 3 ſum-

ſumma productorum ex binis $= 8\ 9.34^2 + 9.17.34^2 + 8.17.34^2 = 19^2.34^2$
productum omnium $= 8.9.17.34^3. = 8^2.3^2.17^4.$

Hinc pronunciari poſſe videtur, minimos numeros integros problemati ſatisfacientes eſſe 272; 306; 578; fractos autem hos $\frac{1}{1}$; $\frac{4}{17}$; $\frac{9}{34}$.

Caeterum hic notaſſe iuuabit, ſi tres numeri integri x, y, z deſiderentur, vt tantum haec formula $xy + xz + yz$ fiat numerus quadratus, eos in genere ita exhiberi poſſe, vt ſit:

$$x + y = (a-b)^2 + (d-e)^2$$
$$y + z = (b-c)^2 + (e-f)^2$$
$$z + x = (c-a)^2 + (f-d)^2$$

vnde fit $x + y + z = aa + bb + cc - ab - bc - ac + dd + ee + ff - de - ef - df$, ipſique numeri ita ſe habebunt:

$$x = (a-b)(a-c) + (d-e)(d-f)$$
$$y = (b-c)(b-a) + (e-f)(e-d)$$
$$z = (c-a)(c-b) + (f-d)(f-e)$$

vnde fit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = a(e-f) + b(f-d) + c(d-e)$$

Vel ſimplicius haec ſolutio ita enunciari poteſt, vt ſit:

$$x = lm + pq;\ y = mn + qr;\ z = nl + rp$$

ſumtis his ſenis numeris l, m, n et p, q, r, ita vt ſit:

$$l + m + n = 0 \text{ et } p + q + r = 0$$

tum vero erit:

$$\sqrt{(xy + yz + xz)} = lq - mp = mr - nq = np - lr.$$

III.

III.

Theoremata Arithmetica, noua methodo demonſtrata.

Auctore Leon. Eulero pag. 74.

Singulari omnino Auctor hic vtitur methodo, ad plures inſignes numerorum proprietates demonſtrandas, quarum quidem nonnullas iam alio modo demonſtratas dedit, reliquae vero nouae ſunt habendae, atque ad alias maiori adhuc attentione dignas viam parare videntur. Ipſa quidem methodus ita dilucide eſt expoſita, vt nihil ad ampliorem eius illuſtrationem afferri poſſit; at vero praecipuas veritates, quas Auctor feliciter inueſtigauit, hic recenſuiſſe iuuabit. Poſtquam is iam gemina methodo eximium illud Theorema: *quod forma* $a^{p-1}-1$ *ſemper ſit diuiſibilis per numerum* p, *ſiquidem is ſit primus, neque numerus* a *per eum diuidi poſſit*, demonſtraſſet; hic non ſolum tertiam demonſtrationem ex aliis principiis petitam adiicit; verum etiam idem Theorema, quod ad numeros tantum primos erat adſtrictum, ad omnes plane numeros extendit. Propoſito ſcilicet quocunque numero N, definit inde numerum n, vt forma a^n-1 per illum numerum N certe diuiſionem admittat; vbi quidem numerus a pro lubitu aſſumi poteſt, ſed tamen ita comparatus eſſe debet, vt cum numero N nullum habeat diuiſorem communem, ſeu vt numeri N et a ſint inter ſe primi, quae quidem conditio ſemper eſt ſubintelligenda

da, etiamſi verbis non exprimatur. Demonſtrat igitur Auctor, exponentem n ſemper ita pendere a numero propoſito N, vt aequalis ſit multitudini numerorum ipſo N minorum, qui ſimul ad eum ſint primi, id quod exemplo magis perſpicuum reddetur. Sit igitur numerus propoſitus $N = 10$; numeri autem eo minores, ad eumque primi, ſunt 1, 3, 7, 9, ideoque quatuor, vnde fit $n = 4$. Sumto iam pro a numero quocunque ad 10 primo; ſeu qui neque per 2 neque per 5 diuidatur, ac certo pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ eſſe per 10 diuiſibilem, hoc eſt, omnium huiusmodi numerorum biquadrata vnitate minuta diuiſionem per 10 admittunt. Veluti ſi $a = 3$, fit $a^4 - 1 = 80$; ſi $a = 7$, fit $a^4 - 1 = 2400$ et ita porro. Quaeritur autem hic ante omnia, quomodo pro quouis numero N multitudo numerorum ipſo minorum, ad eumque primorum, cui numerus n aequalis eſt ſumendus, commode definiri poſſit: vbi quidem perſpicuum eſt, ſi N fuerit numerus primus, fore $n = N - 1$, propterea quod omnes numeri ipſo minores, quorum multitudo vtique eſt $= N - 1$, ſimul ad eum ſint primi. Sed ſi numerus N non eſt primus, eius ratio compoſitionis ex primis eſt ſpectanda; vbi cum exiſtentibus p, q, r, s numeris primis, omnes numeri ad hanc formam $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ etc. reuocari poſſint, ab Auctore eſt demonſtratum:

ſi ſit $N = p^\alpha$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1) = N.\frac{p-1}{p}$

ſi $N = p^\alpha q^\beta$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1) = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}$

ſi $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, fore $n = p^{\alpha-1}(p-1).q^{\beta-1}(q-1).r^{\gamma-1}(r-1)$

ſeu $n = N.\frac{p-1}{p}.\frac{q-1}{q}.\frac{r-1}{r}$.

ſicque

ſicque porro, ita vt pro dato numero N numerus n inueniri poſſit ex ſolis numeris primis in eum ingredientibus, nullo ad eorum poteſtates habito reſpectu, quod in diſſertatione non eſt animaduerſum. Ita ſi $N = 120$, qui numerus ex primis 2, 3, 5 componitur, vnde fit $n = 120 . \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{4}{5} = 32$; atque forma $a^{32} - 1$ certe erit diuiſibilis per 120, dum a nullum horum numerorum 2, 3, 5 complectatur. Verum hic inſuper obſeruare licet, plerumque minorem poteſtatem eadem proprietate praeditam eſſe. Rationem enim harum demonſtrationum perpendenti mox patebit, ſi fuerit $N = p^{\alpha} q^{\beta} r^{\gamma}$, formam $a^n - 1$ per hunc numerum fore diuiſibilem, non ſolum cum n fuerit productum ex his tribus numeris:

$$p^{\alpha-1}(p-1);\ q^{\beta-1}(q-1);\ r^{\gamma-1}(r-1)$$

ſed ſufficere, ſi pro n minimus communis diuiduus horum numerorum accipiatur, quae obſeruatio haud inelegans in diſſertatione eſt praetermiſſa. Ita ſi ſit $N = 120 = 2^3 . 3 . 5$; terni numeri pro exponente n inueniendo ſunt 4; 2; 4, quorum minimus communis diuiduus eſt 4: ſicque pronunciare licet, hanc formam $a^4 - 1$ ſemper eſſe per 120 diuiſibilem, dummodo a ad 120 fuerit primus.

Simili modo ſi $N = 63 = 3^2 . 7$, hi duo factores dant numeros 6 et 6, quorum minimus communis diuiduus cum ſit 6, haec forma $a^6 - 1$ erit per 63 diuiſibilis, ſi modo a neque ternarium, neque ſeptenarium, contineat.

Sit $N = 32760 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 13$, qui ſactores inter ſe primi praebent hos numeros:

$$4; 6; 4, 6, 12$$

quorum communis diuiduus eſt 12, ex quo haec forma $a^{12}-1$ ſemper per 32760 diuiſionem admittit, modo a nullum horum numerorum primorum, 2, 3, 5, 7, 13 inuoluat: veluti ſi $a=11$, eſt

$$a^{12}-1 = 3138428376720 = 32760 . 95800622$$

vbi notari conuenit, eſſe:

$$95800622 = 2 . 37 . 61 . 19 . 1117$$

Saepenumero autem euenire poteſt, vt pro ſumto numero a etiam minor poteſtas ſatisfaciat, ſed talis diminutio ab indole numeri a pendet, neque in genere minor poteſtas, quam hic eſt aſſignata, theorematí tribui poteſt.

IV.

Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonſtrationibus ſupponuntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 105.

Verſantur haec Theoremata circa numeros, qui ſunt aggregata ex quadrato et triplo alterius quadrati formata, ideoque hac formula generali $pp+3qq$ continen-

tinentur. Scilicet ſi duae ſeries conſtituantur, quarum altera conſtet ex numeris quadratis, altera ex iisdem triplicatis, vti

I. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81
II. 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192, 243

atque ſinguli prioris ſeriei ſingulis poſterioris ſeriei addantur, oriuntur ii numeri, quorum indoles hic conſideratur, et qui ſecundum ordinem magnitudinis diſpoſiti ſunt ad centum vsque

4, 7, 12, 13, 16, 19, 21, 28, 31, 36, 37, 39, 43, 48, 49 52, 57, 61, 63, 64, 67, 73, 76, 79, 84, 91, 93, 97, 100.

Hinc ſi primo excerpantur numeri, qui ſunt primi

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97

hi omnes vnitate minuti per 6 diuiſibiles deprehenduntur, ſeu in formula $6n+1$ continentur, cuius quidem ratio facile perſpicitur, cum ex forma $pp+3qq$ alii numeri primi oriri nequeant, niſi qui per 3 diuiſi, vnitatem relinquant. Sed eius inuerſum, quod viciſſim omnes numeri primi iſtius formae $6n+1$ ſimul in illo numerorum genere occurrant, veritas eſt multo magis ardua, cuius demonſtratio maximas ambages poſtulat. Demonſtrari ſcilicet oportet, ſemper dari numeros p et q, vt ſit $6n+1=pp+3qq$, ſi quidem numerus $6n+1$ fuerit primus, vbi imprimis notari conuenit, niſi $6n+1$ ſit primus, hanc proprietatem ſaepius fallere, vti fit in numeris 55, 85, qui etſi multiplum ſenarii vnitate ſuperant, tamen neutiquam in forma $pp+3qq$ continentur. At ſi huiusmodi numerus $6n+1$ fuerit primus, quantumuis ſit magnus,

veluti 20161, certo pronunciare licet, duo dari quadrata pp et qq, vt ſit $20161 = pp + 3qq$, reperitur autem $p = 31$ et $q = 80$, neque plus vno modo hoc fieri poteſt. En ergo ſummam Theorematum hic ſingulari prorſus modo demonſtratorum, quod omnis numerus primus formae $6n + 1$ ſemper in hac forma $pp + 3qq$, idque vnico tantum modo, contineatur, ex quo ſequitur, ſi quispiam numerus formae $6n + 1$ vel prorſus non in forma $pp + 3qq$ contineatur, vel plus vno modo, tum eum certe non fore primum. Fundamentum autem harum demonſtrationum in hac propoſitione eſt ſitum, quod ſi numerus formae $pp + 3qq$ non fuerit primus, eum non alios admittere diuiſores, niſi qui ipſi in eadem forma $pp + 3qq$ contineantur. His autem principiis Auctor iam olim erat vſus, cum demonſtraſſet, non dari duos cubos, quorum ſumma, vel differentia, ſit cubus, tum vero etiam nuper, cum noua plane methodo problema de tribus cubis inueniendis, quorum ſumma ſit cubus, ſoluiſſet, quamobrem, vt hic nihil amplius deſiderari poſſet, omnino neceſſe erat, theoremata iſta rigidis demonſtrationibus confirmari. Caeterum ingenue fatetur Auctor, has demonſtrationes ex principiis nimis alienis eſſe petitas, fonteſque magis proprios dari eo deducentes, ex quibus *Fermatius* hauſiſſe videtur, cum inde ſe demonſtrauiſſe aſſeueret, hanc aequationem generalem $a^n \pm b^n = c^n$ nunquam locum habere poſſe, ſtatim atque exponens n binarium ſuperet, cum tamen *Eulerus* hanc impoſſibilitatem tantum pro caſibus $n = 3$ et $n = 4$ demonſtrare valeat, ex quo eo magis dolendum eſt Fermatiana inuenta temporum iniuria periiſſe.

V.

V.

Conſideratio formularum, quarum integratio per arcus ſectionum conicarum abſolui poteſt.

Auctore Leon. Eulero pag. 129.

Quando integrationes algebraice perficere non licet, valores integralium per quadraturas linearum curvarum vulgo exhiberi ſolent, dum ſcilicet linea curva aſſignatur, cuius area eundem valorem exprimat, vel ſaltem eiusmodi quantitatem, ex qua is determinari poſſit. Inter huiusmodi quantitates, quae dum limites Algebrae communis quaſi tranſcendunt, Tranſcendentes appellantur, frequentiſſime occurrunt, quae a quadratura *circuli* et *hyperbolae* pendent, quorſum omnes formulas integrales nullam irrationalitatem inuoluentes reduci poſſe conſtat, atque hae binae tranſcendentium ſpecies iam ita vſu in Analyſin ſunt receptae, vt propemodum inſtar algebraicarum tractentur. Quae nimirum a quadratura circuli pendent, eae nunc quidem per calculum angulorum feliciſſime expediuntur, quemadmodum eae, quae a quadratura hyperbolae pendent, logarithmis comprehendi ſolent, quorum calculus nunc fere inter elementa refertur. Quodſi vero quadraturis magis complicatis opus eſt, euolutio multo maioribus difficultatibus eſt obnoxia. Etſi enim deſcriptio linearum curuarum conceditur, tamen in praxi nimis eſt moleſtum

ſtum, areas iis incluſas ſatis exacte dimetiri. Quam ob cauſam iam pridem Geometrae in hoc elaborauerunt, vt loco quadraturarum potius rectificationes curuarum in hunc vſum traducerent; quia ſtatim ac linea curua accurate fuerit deſcripta longitudinem cuiusque arcus ſine vllo apparatu ope fili dimetiri licet, in quo negotio olim *Hermannus* immortalem gloriam eſt aſſecutus, dum problema ab aliis pro deſperato habitum ſumma ſagacitate reſoluit, et pro cuiuscunque curuae quadratura lineas curuas adeo algebraicas inuenire docuit, quarum rectificatione idem praeſtari queat. Cum igitur nullum ſit dubium, quin huiusmodi conſtructiones eo ſint elegantiores, quo facilius curuae, quarum rectificatio adhibetur, deſcribi queant, in hoc negotio ſectionibus conicis, Ellipſi ſcilicet et Hyperbolae, merito primae partes ſunt tribuendae; et cum plerumque difficillimum ſit indolem earum formularum integralium perſpicere, quarum valores per arcus, ſiue ellipticos, ſiue hyperbolicos, exprimere liceat, Auctor hic ſingulari methodo praecipuas formulas integrales inueſtigat, quae hoc modo conſtructionem admittunt. Celeb. *Alembertus* quidem hoc idem argumentum iam pridem in actis Acad. Reg. Pruſſicae pertractauit, *Euleri* vero methodus plane noua, qua arcus ſectionum conicarum aliarum curuarum inter ſe comparare docuit, in hac inueſtigatione eximiam praeſtitit vtilitatem, vt hoc negotium multo vberius confeciſſe videatur. Plurimae autem transformationes, quibus Auctor in hac ardua euolutione vtitur, in Analyſi haud ſpernendam vtilitatem habere poſſint. Interim laudi ac dignitati huiusmodi inueſtigationum nihil de-

detrahetur, ſi obſeruauerimus, nunc quidem in calculi applicatione ad praxin neque curuarum quadraturam, neque rectificationem, magnopere deſiderari, cum omnia multo facilius et accuratius per methodos appropinquandi expediri queant.

VI.

Conſtructio aequationis differentio-differentialis etc.

Auctore Leon. Eulero pag. 150.

Forma aequationis, quam Auctor hic conſtruendam ſuſcepit, ita eſt comparata, vt latiſſime pateat, ac per vniuerſam Analyſin ampliſſimum habeat vſum; cum in ea omnia, quae olim de celeberrima illa aequatione Riccatiana ſunt inueſtigata, contineantur. Si hoc negotium per methodos vſitatas tentetur, ſummae difficultates obſtant, quo minus ad finem perduci queat; nouam igitur Auctor ac prorſus ſingularem methodum exponit huiusmodi aequationes tranctandi, cuius quidem iam pridem nonnulla egregia ſpecimina edidit; neque vllum eſt dubium, quin iſta methodus, ſi diligentius excolatur, inſignia incrementa Analyſi ſit allatura. Caſu autem euenit, vt haec tractatio non penitus ad finem ſit perducta, ſiue quaedam capita perierint, ſiue ab Auctore ſint neglecta. Quae autem hic proferuntur, omnino ſufficiunt ad vim nouae huius methodi per-

perſpiciendam, atque adeo, quae deſunt, ab attento lectore harum rerum ſtudioſo haud difficulter reſtituentur. Quin etiam ſi ex hac parte attentio excitetur, nullum eſt dubium, quin Analyſis inde multo maiora incrementa ſit conſecutura.

VII.

Annotationes in locum quendam Carteſii, ad circuli quadraturam ſpectantem.

Auctore Leon. Eulero pag. 157.

Peripheriam circuli ad diametrum eſſe incommenſurabilem, ſeu nullam dari menſuram, qua tam diametrum, quam peripheriam, ita metiri liceat, vt nihil relinquatur, iam ab antiquiſſimis Geometris eſt obſervatum, etſi hoc etiam nunc aliter demonſtrari non poteſt, niſi quod omnes conatus huiusmodi menſuram inueniendi fuerint irriti. Nullos ſcilicet eiusmodi binos numeros exhibere licet, qui inter ſe eandem praeciſe rationem teneant, quae inter diametrum ac peripheriam intercedit, ex quo in praxi tales numeri vſurpari ſolent, qui tantum proxime ad iſtam rationem accedant, cuiusmodi ſunt Archimedei 7 ad 22 et Metiani 113 ad 355; tum vero ab aliis iſta vera ratio multo accuratius numeris expreſſa, vt etiam in maximorum circulorum computo error omnino ſit

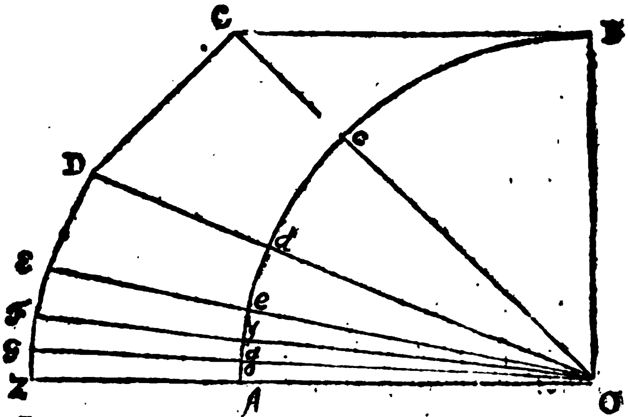
con-

contemnendos. Incommenſurabilitas autem in ſe ſpectata non obſtaret, quominus ratio diametri ad peripheriam geometrice aſſignari poſſet, cum quadrati Diagonalis ad latus quoque ſit incommenſurabilis, atque in genere omnes quantitates irrationales, quae ab extractione radicum oriuntur, geometrice conſtrui poſſint. Verum peripheria circuli ad genus Irrationalium longe ſublimius referenda videtur, ad quod demum radicis extractione infinities repetita pertingere liceat; vnde etiam geometrice plus praeſtari non poteſt, quam vt vera peripheriae ad diametrum ratio continuo propius exprimatur. Atque hoc modo Conſtructio *Carteſiana*, quam Cel. Auctor hic perpendit, eſt comparata, vt continua rectangulorum certa lege decreſcentium appoſitione linea tandem eliciatur recta peripheriae circuli aequalis; haecque conſtructio ita ingenioſe eſt excogitata, vt facillima operatione citiſſime ad veritatem conuergat; in quo eximium monumentum ſummae inuentoris ſagacitatis mirari debemus. *Eulerus* autem, dum hoc inuentum obliuioni ſubtrahit, plures egregias formulas et ſeries ad circuli menſuram pertinentes profert, quibus huiusmodi approximationes geometricae multiplicari magisque perfici queant. Veluti cum demonſtrauiſſet, denotante q longitudinem quadrantis circuli, cuius radius $=1$, eſſe:

$$q = \text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}q \cdot \text{ſec.}\,\tfrac{1}{32}q \cdot \text{etc.}$$

 hinc

hinc ſequens conſtructio ſatis concinna et elegans con[illegible]ditur. Conſtituto Quadrante AOB radio OB iungatur normalis BC rectae OC angulum AOB biſecanti occurrens in C.



Tum huic OC in C normaliter iungatur CD occurrens rectae OD angulum AOC biſecanti in D. Similimodo huic OD normaliter iungatur recta DE occurrens rectae OE angulum AOD biſecanti in E; hincque OE denuo normaliter recta EF occurrens rectae DF angulum AOE biſecanti in F; atque ita porro. Hoc modo tandem peruenietur vsque ad radium OA productum, in cuius puncto Z constructio vltimo cadat; quo facto erit recta OZ longitudini quadrantis B*cdefg*A praeciſe aequalis.

Plurimas autem alias huiusmodi conſtructiones ex Formulis Auctoris facile deriuare licet. Notaſſe hic iuuabit, puncta B, C, D, E, F reperiri in tali linea curua, cuius natura, poſito angulo quocunque AOD $= \Phi$ et recta OD $= v$, ita exprimitur, vt ſit $v = \frac{q \sin. \Phi}{\Phi}$. Hinc enim ſumta quacunque ratione inter angulum Φ et angulum rectum, cuius menſura eſt arcus q, vt ſit $\Phi = \frac{m}{n} q$, erit $v = \frac{n}{m} \sin \frac{m}{n} q$ ideoque recta v geometrice aſſignari poteſt. Cum autem angulo Φ continuo immi-

imminuendo ad angulum euaneſcentem fuerit peruentum, vbi fit $\frac{\text{ſin.}\,\Phi}{\Phi} = 1$, tum recta v manifeſto fit Quadranti q aequalis: Similes autem formulas alias quotcunque pro lubitu fingere licet.

VIII.

Demonſtratio generalis Theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam eleuando.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 169.

Vt veritates mathematicae, quarum certitudo in aliis diſciplinis tanquam exemplum imitandum proponi ſolet, extra omnem dubitationis aleam collocentur, non ſufficit, eas eiusmodi demonſtrationibus muniri, quibus animi ad diſcendum parati atque ingenio ſatis perſpicaci praediti acquieſcant, ſed etiam omnino eſt neceſſarium, vt omnes obiectiones ſolide refellantur, atque adeo cauillationes Sophiſtarum explodantur. Ad hoc genus imprimis eſt referenda demonſtratio Euclidea de aequalitate angulorum alternorum in lineis parallelis, quae haud leuibus dubiis eſt obnoxia, vt etiam ſummi Geometrae in ea firmius ſtabilienda ſtudium atque operam collocauerint, in quo autem non parum eſt dolendum, quod iſtae emendationes nimis ſint prolixae et arduae, quam vt elementis inſeri queant. In Analyſi etiam pura eiusmodi occurrunt demonſtrationes,

quas cauillandi ſtudium non mediocriter laboſare eſt annixum, cum circa quantitates plurimae veritates tanquam generales admitti ſoleant, etiamſi demonſtratio tantum ad numeros integros ſit accommodata. Huiusmodi obtrectationes imprimis expertum eſt Theorema *Newtonianum*, quo poteſtas binomii $(x+y)^m$ generaliter in hanc ſeriem euolui ſtatuitur:

$$x^m + \frac{m}{1} x^{m-1} y + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.x^{m-3} y^3 + \text{etc.}$$

cum tamen iſta reſolutio nonniſi pro iis caſibus, quibus exponens m eſt numerus integer, ſit demonſtrata. Tantum autem abeſt, vt pro reliquis caſibus, quibus m eſt vel numerus fractus, vel irrationalis, vel tranſcendens, vel adeo imaginarius, de eius veritate dubitetur, vt potius huic Theoremati in latiſſimo ſenſu accepto vniuerſa Analyſis infinitorum ſit ſuperſtructa. Hinc ii, qui eius veritatem in genere, Analyſi infinitorum in ſubſidium vocata, demonſtrare ſunt conati, manifeſto vitioſiſſimum circulum in ratiocinando commiſerunt. Non inutiliter itaque collocauit laborem Auctor, cum demonſtrationem fundamentalis huius totius Analyſeos principii, idque per ſola Algebrae communis elementa, condere aggreſſus eſt. Singulari autem omnino artificio, poſtquam formulam $(x+1)^m$ huic feriei $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} +$ etc. aequalem finxit, oſtendit primo quidem ſemper eſſe $A = 1$, tum vero a quantitate B reliquas C, D, E etc. ita pendere, vt ſit:

$$C = B.\frac{B-1}{2};\ D = C.\frac{B-2}{3};\ E = D.\frac{B-3}{4};\ \text{etc.}$$

verum

verum mirifico prorſus caſu hic vſu venit, vt ipſa quantitas B hinc non determinetur. Altera igitur huius demonſtrationis pars in hoc verſatur, vt aliunde oſtendat, ſemper eſſe B = *m*, quod quidem tanto rigore praeſtat, vt nulli plane dubio locus relinquatur.

IX.

De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus commentatio.

Auctore F. V. T. Aepino p. 181.

Spectat haec commentatio ad Theoriam aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, ſcilicet:

$$x^n + A x^{n-1} + B x^{n-2} + C x^{n-3} + \text{etc.} \ldots + M x + N = 0$$

quam conſtat ſemper reſolui poſſe in totidem factores ſimplices formae $x + p$, quot maximus exponens n contineat vnitates. Saepe numero autem euenit, vt iſti factores ſimplices euadant imaginarii, ac tum demonſtratum eſt, numerum huiusmodi factorum imaginariorum ſemper eſſe parem. Quod autem praeterea in Analyſi aſſumi ſolet, tales factores imaginarios ita eſſe comparatos, vt cuique ſuus conueniat ſocius, qui per eum multiplicatus productum producat reale; id quidem tantum pro aliquibus caſibus firmiter eſt demonſtratum, generalem vero demonſtrationem adhuc deſiderari,

derari, omnes qui hanc Theoriam accuratius ſunt ſcrutati, confitentur. Quotcunque ſcilicet aequatio habuerit factores imaginarios, quorum vnus ſit $x+p$, ideoque p quantitas imaginaria, demonſtrari debet, inter reliquos ſemper dari vnum illius quaſi ſocium $x+q$, ita vt productum $(x+p)(x+q)=xx+(p+q)x+pq$ euadat reale; ad quod quidem requiri perſpicuum eſt, vt binarum quantitatum imaginariarum p et q tam ſumma, quam productum, abeat in quantitatem realem. Huius itaque theorematis demonſtrationem condere aggreſſus eſt Auctor, in quo quidem negotio ita procedit, vt ſi ſupponatur, (cuius perfectam demonſtrationem, ex analyſi infinitorum petitam, ſibi vindicat *Alembertus*,) omnes quantitates imaginarias ad formam $A+B\sqrt{-1}$ reducibiles eſſe, poſtea ſingulari quodam artificio, propoſitionis antea indicatae probationem, inde deducat, quae quidem demonſtratio, ita comparata eſt, vt per ſe attentionem mereri videatur, etſi concedatur, ſub aſſumta ab Auctore hypotheſi, dari forſitan faciliores aliquas ad demonſtrationem hanc abſoluendam vias.

X.

Solutio Problematis cuiusdam ad maxima minimaue pertinentis.

Auctore Steph. Rumowski pag. 189.

Problema hoc, cuius ſolutionem Cl. Auctor feliciter perfecit, omni Geometrarum attentione dignum eſt

iudi-

indicandum. Etſi enim ad ſimoſam illam de Iſoperimetricis quaeſtionem pertinet, circa quam opera ac ſtudio Cel. *Euleri* nihil amplius reperitur, quod deſiderari queat, tamen eius ſolutio in ſe ſpectata non ſolum eſt pulcerrima, ſed etiam tantas implicat difficultates, ad quas ſuperandas inſignia Analyſeos artificia requiruntur. Clar. quidem Auctor idonea Variabilium electione ſolutionem ita inſtruxit, vt commode prima Integratio ſuccederet, et altera quaſi ſponte ſeparationem Variabilium largiretur. In ſolutione autem, quam ab *Eulero* filio ſibi miſſam communicat, prima integratio multo maiorem ſollertiam requirit, et haud contemnenda calculi artificia complectitur. Caeterum ipſa quaeſtio, qua pro data Coni altitudine inter omnes baſes, quae Cono aequalem ſoliditatem conciliant, ea quaeritur, vnde coni ſuperficies minima oriatur? neutiquam inutilis eſt putanda, cum talis minimi cognitio ſaepius ingentem lucem foenerari queat: *quod magis perſpicuum redditur*, ſi quaeſtio eadem aliis verbis ita efferatur, vt inter omnes conos tam eiusdem altitudinis quam eiusdem ſuperficiei is definiatur, qui maxime ſit capax? Solutio autem huius problematis tandem ad eiusmodi aequationem perducitur, quae innumerabiles lineas curuas in ſe complectitur, inter quas circulus etiam tanquam ſpecies occurrit. Ingrediuntur enim in aequationem finalem tres nouae conſtantes arbitrariae, vnde pro earum diuerſa determinatione infinitae curuae diuerſae obtinentur. Quae infinita multitudo, quomodo cum problematis natura conſiſtere poſſit, haud facile apparet, ampliorique explicatione indiget. Namque

ſi

ſi baſis circularis ſatisfacit, ita vt conus ei ſuperſtructus minorem habeat ſuperficiem, quam ſi alia quaecunque figura eiusdem capacitatis baſi tribueretur; omnino mirum videtur, quid reliquae lineae curuae in ſolutione aeque contentae ſibi velint, et quomodo ad problema ſoluendum accommodari debeant? Ad hoc intelligendum indoles huiusmodi quaeſtionum accuratius eſt perpendenda. Primo igitur antequam tota coni ſuperficies vndequaque terminata conſideretur, ſolutio ad quemuis arcum indefinitum baſeos ita pertinere eſt cenſenda, vt inter omnes curuas iisdem terminis comprehenſas, quae ſimul idem ſpacium includant, ea definiatur, ex qua minima ſuperficies conica gignatur. Hic ergo tres res tanquam datae ſunt ſpectandae, bina ſcilicet puncta, per quae curua tranſire debet, et area, quam iſta curua includit. Quam ob rem ſolutionem completam ita comparatam eſſe oportet, vt curua quaeſita per data duo puncta deſcribi poſſit, ſimulque eius area inter haec puncta contenta datam quantitatem nanciſcatur. His ergo conditionibus vt ſatisfieri poſſit, omnino neceſſe eſt, vt aequatio finalis tres quantitates ab arbitrio noſtro pendentes inuoluat. Quo effectuato iam perſpicuum eſt, quid aequatio illa maxime generalis inuenta ſibi velit, et quomodo ad vſum ſit traducenda? Quolibet enim caſu oblato duo puncta, per quae curuae eſt tranſeundum, tanquam data proponi ſunt intelligenda, vna cum area inter ea comprehenſa, tum vero aequationis ternae conſtantes arbitrariae ita determinentur, vt linea curua per iſta duo puncta tranſeat, et area inter ea comprehenſa datam illam quantitatem obtineat:

ex

ex quo quidem eſt, in aequatione problema perfecte ſoluente neceſſario tres conſtantes indefinitas ineſſe debere. Deinde etiam notari conuenit, quomodocunque iſtas conſtantes pro lubitu determinauerimus, vt curua determinata reſultet, eam ſemper problemati ita ſatisfacere, vt ſumtis in ea ad libitum binis punctis, inter omnes alias lineas, quae per eadem puncta ductae aequale ſpatium includant, quarum multitudo vtique eſt infinita, ea, quae fuerit reperta, minimam generet ſuperficiem conicam. Atque hoc modo vtique euenire poteſt, vt curua ſatisfaciens maxime a circulo diſcrepet. Statim enim atque bina puncta data non aeque fuerint a centro baſis remota, areaque inter ea comprehenſa ab area ſectoris circularis diuerſa, neutiquam fieri poteſt, vt circulus quaeſtionem reſoluat. Ex quo iam perſpicue intelligitur, cur ſolutio iſtius problematis infinitam diuerſarum linearum curuarum multitudinem complectatur.

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Dilucidationes de reſiſtentia fluidorum.

Auctore Leon. Eulero pag. 197.

Quantam reſiſtentiam quaeuis corpora in fluido, veluti aqua, aut aere, mota patiantur, et quantum inde eorum motus debilitetur? quaeſtio eſt in vniuerſa Phyſica maximi momenti, cum nullus motus in hoc mundo exiſtat, qui ab huiusmodi perturbatione ſit immunis. Ex quo iam dudum naturae ſcrutatores, atque imprimis Geometrae, ſummo ſtudio fuerunt occupati, vt leges iſtius reſiſtentiae, quam corpora in fluidis mota ſuſtinent, inueſtigarent, eiusque veram quantitatem quouis caſu aſſignarent. Primum quidem ſolam experientiam conſulentes mox animaduerterunt, quo fluidum fuerit denſius, eo maiorem eſſe reſiſtentiam, idemque corpus ſimili motu in aqua latum tanto maiorem pati reſiſtentiam, quam in aere, quanto aqua aerem denſitate ſuperet. Tum vero etiam facile obſeruarunt, in eodem fluido reſiſtentiam eo eſſe maiorem, quo motus fuerit velocior. Imprimis autem ſenſerunt, reſiſtentiam plurimum a figura corporis pendere, effectumque fluidi eo eſſe minorem, quo obliquius in corporis ſuperficiem allabatur; quod diſcrimen praecipue

in nauigatione cernitur, dum aliae naues pro diuerſa figura aliis multo aptiores deprehenduntur ad reſiſtentiam ſuperandam, ex quo nata eſt quaeſtio plurimum agitata, cuiusmodi figuram naui tribui conueniat, vt minimam reſiſtentiam patiatur. Quae phaenomena vt explicarent, atque accuratius explorarent Geometrae, ad motus principia confugerunt, indeque per calculum definire ſunt conati, quanta quouis caſu reſiſtentia eſſe debeat, cum ratione celeritatis, qua corpus in fluido promoueatur, tum vero ratione eius figurae; atque tandem vniuerſam reſiſtentiae Theoriam ad duplicem regulam reuocaſſe ſunt arbitrati; quarum altera ad motum directum pertinet, quo ſuperficies plana perpendiculariter in fluidum occurrit, eaque ſtatuitur, reſiſtentiam quadrato celeritatis eſſe proportionalem, et quouis caſu aequiualere ponderi cylindri fluidi, cuius baſis aequalis ſit ſuperficiei motae, altitudo vero cum illa conueniat, ex *qua* graue cadendo eam *ipſam celeritatem acquirat*, qua corpus aduerſus fluidum mouetur. Altera regula ad motus obliquos ſpectat, quando motus directio ad ſuperficiem eſt obliqua, eaque reſiſtentia quadrato ſinus anguli obliquitatis proportionalis ſtatuitur. Hinc quaecunque fuerit corporis figura, eius ſuperficies in innumerabiles particulas infinite ſecta concipitur, et pro qualibet angulus obliquitatis, ſub quo in fluidum incurrit, indeque quantitas reſiſtentiae definitur; atque ex his omnibus reſiſtentiis elementaribus tandem tota reſiſtentia colligi ſolet, quatenus quidem calculum expedire licet. Celeberr. igitur huius diſſertationis Auctor in eo verſatur, vt principia, vnde hae regulae ſunt deductae,

accuratiori examini ſubiiciat. quae cum hypotheſi manifeſto falſae innitantur, qua, ad ſimilitudinem colliſionis corporum ſolidorum, particulae fluidi ſimiliter corpus in eo motum percutere aſſumuntur, eas tanquam omni fundamento deſtitutas reiicere non dubitat..... Plerumque quidem eas tam parum a veritate recedere fatetur, vt error enormis non ſit metuendus; veluti euenit, ſi corpus figura non nimis irregulari praeditum in fluido ampliſſimo moueatur, neque tamen celeritate adeo magna, vt pone corpus ob fluidum ſequi non valens quaſi vacuum relinquatur. Sin autem fluidum ſpatio ſatis anguſto eſt incluſum, in quo corpus motum partem ſatis notabilem occupet, manifeſtum eſt, illas regulas immaniter fallere debere. Si enim corpus totam cauitatem, qua fluidum includitur, repleret, procedere plane non poſſet, ac reſiſtentiam quaſi infinitam ſentiret, niſi quatenus fluidum ſe comprimi pateretur. Deinde etiam regulae illae memoratae tantum partem corporis anticam reſpiciunt, in quam fluidum allidit, pars vero poſtica plane non in cenſum trahitur, cum tamen experientia teſte eius figura multum ad reſiſtentiam, ſiue augendam, ſiue minuendam, conferat. His igitur perpenſis Auctor luculenter oſtendit, in reſiſtentia nullam plane colliſionem ſimilem ei, qua corpora ſolida in conflictu ſe mutuo percutiunt, admitti poſſe, quo ipſo totum fundamentum illarum regularum corruit. Partes autem fluidi anteriores iam antequam corpus motu ſuo ad eas pertingit, ad motum concitantur, quo iuxta corpus defluunt, ſpatium pone corpus relictum occupaturae, ita vt reſpectu corporis fluidum continuo circa

id

id refluat, quemadmodum nauigantes vident aquam continuo a prora ad puppim defluere. Hinc perſpicuum eſt, corpus in fluido motum ab eo aliam vim non ſuſtinere, praeter preſſionem, quam fluidum praeterlabens in totam eius ſuperficiem circumquaque exerit, et reſiſtentiam nihil aliud eſſe, niſi effectum ex omnibus his preſſionibus natum, motui corporis contrarium. In quo *primo* tenendum *eſt*, *ſi preſſio* aquae, iuxta corpus praeterfluentis, haud differret ab ea, quam aqua quieta in corpus exereret, quoniam tum omnes preſſiones ſe mutuo eſſent deſtructurae, nullum motus impedimentum, nullamque propterea reſiſtentiam, inde eſſe exorturam. Eatenus ergo reſiſtentia exiſtit, quatenus aqua circa corpus praeterfluens aliam in id exercet preſſionem atque aqua ſtagnans; atque ex hoc fonte vera reſiſtentiae origo eſt haurienda. Primo igitur motum aquae praeterfluentis, tum vero preſſionem, qua inde corpus in *ſingulis punctis ſollicitatur*, definiri oportet, hincque *demum* ex omnibus preſſionibus inter ſe collatis vera reſiſtentiae quantitas aſſignari poterit. Haec autem inueſtigatio maxime ardua eſt cenſenda, cum perfectam Theoriam motus ac preſſionis fluidorum requirat. Etiamſi enim idem Auctor principia huius Theoriae perfecte euoluiſſet, ex iisque omnia quae tam ad motum, quam preſſionem fluidorum pertinent, formulis analyticis eſſet complexus, tamen Calculi ad eas expediendas neceſſarii ſubſidia adhuc deſiderantur, vt completam reſiſtentiae Theoriam inde vix ſperare liceat. Cum autem ea duplici inueſtigatione contineatur, altera ad motum fluidi iuxta corpus defluentis, altera

vero ad eius preſſionem in ſingulis ſpectante, eiusmodi nexum Auctor ex Theoria agnouit, vt ex motu cognito preſſio, ac viciſſim definiri poſſit. Quodſi ergo vndecunque motus, quo fluidum iuxta corpus praeterfluit, fuerit cognitus, ex eo preſſionem, quam corpus in ſingulis punctis ſuſtinet, indeque porro reſiſtentiam ipſam determinare docet, idque ope regulae ſatis ſimplicis, qua euictum eſt, quo celerius fluidum in quoque corporis puncto praeterfluit, ibidem preſſionem eo eſſe minorem, ita vt maxima preſſio ibi in corpus exeratur, vbi fluidi motus fuerit lentiſſimus. Atque hinc iam intelligitur, partem corporis poſticam in determinatione reſiſtentiae minime eſſe negligendam, vti fit in eius vulgari aeſtimatione. His expoſitis Auctor viciſſim inquirit, quomodo cognita reſiſtentia, ſeu preſſione, qua corpus circumquaque vrgetur, inde ipſe fluidi motus iuxta corpus defluentis definiri, ſimulque conditiones aſſignari queant, ſub quibus talis motus locum habere poſſit, vnde Theoria fluidorum haud ſpernenda incrementa capere videtur. Imprimis autem cum reſiſtentia per vulgares regulas definita ſaepenumero vix ſenſibiliter a veritate recedat, eos inueſtigat caſus, quibus haec determinatio cum veritate prorſus conueniat, inuenitque hoc fieri non poſſe, niſi corpus habeat figuram conoidis parabolici, ſimulque ſecundum directionem axis in fluido promoueatur; quia autem hoc conoides nusquam terminatur, ſed in infinitum porrigitur, manifeſtum eſt, plane nunquam vulgarem reſiſtentiae determinationem veritati conſentaneam eſſe poſſe.

II.

II.
Principia Theoriae Machinarum.
Auctore Leon. Eulero p. 230.

Hic non agitur de vulgari Machinarum doctrina, qua conſtructio earum et compoſitio ex machinis ſimplicibus tradi ſolet, et quae ex *ſolis principiis ſtaticis* naturae aequilibrii innixis petitur, ita vt ad ipſum motum, quo tamen totus effectus abſoluitur, vix reſpiciatur. In hac igitur diſſertatione ea potiſſimum, quae ad effectum machinarum determinandum ſpectant, exponuntur, in quo negotio commode vſu venit, vt quomodocunque machina fuerit compoſita, nihil aliud inde in computum ingrediatur, praeter ſolam rationem, quae inter celeritatem vis agentis et celeritatem oneris mouendi intercedit, et ex machinae ſtructura ſecundum *praecepta in ſtaticis tradita facile innoteſcit.* Bina ſcilicet *loca* in qualibet machina ſunt conſideranda, in quorum altero vis mouens, in altero vero vis oneris reluctans, applicatur, motuque machinae impreſſo videndum eſt, quam rationem celeritates in his locis inter ſe ſint habiturae. Iam cognita hac ratione certum eſt, ad onus mouendum tantam requiri vim, quae ad onus teneat eandem rationem inuerſam. Hinc Auctor momentum vis agentis appellat productum, quod oritur, ſi haec vis celeritatem, qua operatur, multiplicetur; et vt iſta menſura ſit determinata, celeritatem exprimit ſpatio vno minuto ſecundo confecto. Simili modo momentum oneris, ſeu vis reluctantis, vocat productum, quod

quod oritur, ſi haec vis reluctans per ſuam celeritatem ſeu ſpatium vno minuto ſecundo abſolutum, multiplicetur. Perſpicuum autem eſt, hoc momento oneris veram menſuram effectus, quam machina producit, contineri, cum ſine dubio effectus tanto maior ſit aeſtimandus, quo magis oneri renitatur, et quo celerius promoueatur; at momentum hoc modo expreſſum ſimul effectum vno minuto ſecundo editum accurate metietur. Simili modo prius momentum vis agentis veram menſuram *actionis* largitur, quam certe diſtinctius mente concipere non licet. In omnibus nunc motibus machinarum ope effectis ſemper momentum vis agentis aequale eſt momento vis reluctantis, ſeu actio aequalis effectui, ſi quidem a frictione mentem abſtrahamus, et motus machinae fuerit aequabilis. Verum frictionis ratio haud difficulter habetur, dum ob eam tantum oneris momentum augetur, ita vt tum hoc momentum ob frictionem auctum momento vis agentis aequale ſit ſtatuendum, vnde pro data actione effectus machinae ob frictionem vtique diminuitur. In machinarum ergo conſtructione imminutio frictionis vtique maximi eſt momenti, at perfectio machinarum non tam a minuta frictione ipſa, ſed ab imminutione eius momenti pendet, quod quomodo obtineri poſſit, ipſa frictione non minuta, ab Auctore docetur. Quod vero ad motum machinae vniformem attinet, pleraeque quidem, dum ſunt in actione, aequabiliter mouentur; verum tamen in earum partibus ſaepe motus inaequalitas ſpectatur, dum verbi gratia piſtilla alternatim attolluntur et detruduntur, vnde actio machinae quoddam patitur detrimentum, atque

atque Auctori anſam praebet hanc machinarum conditionem accuratius inueſtigandi. His autem praemiſſis tota machinarum perfectio eo reuocatur, vt data vi agente machina ita inſtruatur, vt inde maximus obtineatur effectus, quae quidem quaeſtio primo intuitu ſolutionis non capax videtur, cum ſemper effectus ſit actioni huius vis aequalis, *niſi totam perfectionem in ſola momenti frictionis imminutione quaerere velimus.* Verum Auctor hic imprimis oſtendit, etiamſi vires ad machinam mouendam adhibendae ſint datae, tamen idcirco earum actionem neutiquam eſſe datam, ſed prouti tardius, vel celerius, operentur, eam modo maiorem, modo minorem, exiſtere poſſe; ex quo his viribus quouis caſu ita vti conuenit, vt earum actio fiat maxima; quia tum etiam effectus machinae maximus efficietur. Hic igitur indoles virium mouentium potiſſimum *eſt ſpectanda*, *vbi primo quidem*, ſi viribus *hominum* vtamur, notari oportet, quantacunque vi homo, dum eſt in quiete, operari, hoc eſt trahere, vel trudere valeat, tamen eius vim, quo celerius idem opus exequi debet, continuo diminui, ac tandem prorſus euaneſcere. Ita ſi homo, dum quieſcit, onus 100 librarum mouere valeat, idem progrediens eo minus onus poſt ſe trahere valebit, quo celerius incedit, ac ſi maxima qua poteſt celeritate currit, ne minimum quidem onus protrahere poterit, cum omnes ſuas vires in proprium motum impendat. Ponamus eius vires conſumi, dum ſingulis minutis ſecundis ſpatium 6 pedum percurrit; et cum priori caſu, quo quieſcit, vis exerta ſit 100 libr. celeritas autem nulla, poſteriori vero vis

nulla, celeritas autem 6 pedum, vtroque caſu actio hominis, productum ſcilicet ex vi in celeritatem, eſt nulla; dabitur ergo certus celeritatis gradus, quo ſi homo operetur, tametſi minorem vim quam 100 libr. exerat, actio tamen eius ſit maxima, atque adeo machinae applicata maximum effectum producat. Ad hanc definiendam Auctor quidem ad hypotheſin confugit, ſed ratione non deſtitutam, atque experientia confirmatam: ſumit ſcilicet, ſi homo, aliaue potentia agens, in quiete exerere valeat vim $= A$, at vero celeritate $= f$ progrediens nihil amplius praeſtare poſſit; tum ſi idem homo celeritate $= v$ incedat, exerere poſſe vim $= (1 - \frac{v}{f})^2 A$: vnde cum eius actio ſit aeſtimanda $= v(1 - \frac{v}{f})^2 A$, ea erit maxima, ſi fuerit $v = \frac{1}{3} f$, et ipſa actio maxima ſit $= \frac{4}{27} A f$. Ita ſi pro homine ſumatur $A = 100$ libr. et celeritas extrema $f = 6$ ped. homo efficaciſſime operabitur, ſi celeritate 2 ped. vno minuto ſecundo aget, tum autem vim exeret $= \frac{4}{9}\, 100 = 44\frac{1}{9}$ libr. et eius actio erit $= 44\frac{1}{9} \cdot 2 = 89$. Quoties ergo ad machinas mouendas operis hominum vti velimus, efficiendum eſt, vt hominum motus ſit 2 ped. ſingulis minutis ſecundis; ſcilicet ſi onus mouendum cum frictione reſiſtentiam faciat R libr. id tanta celeritate u moueri poterit, vt ſit $R u = \frac{4}{27} A f$, ideoque $u = \frac{4 A f}{27 R}$: vnde cum celeritas vis agentis ſit $= \frac{1}{3} f$, machinam ita inſtrui conueniet, vt ſit celeritas vis ad celeritatem oneris vt 1 ad $\frac{4 A}{9 R}$.

Idem tenendum eſt de viribus animalium cuiusque generis, quae ad machinas mouendas adhibentur; vbi

vbi imprimis notandum eſt, ea, quae maximae celeritatis ſunt capacia, maximum effectum producere. Ita ſi equus in quiete tantum anniti queat, quantum tres homines, ſimul vero triplo maiorem celeritatem ſuſtinere poſſit, eius actio efficaciſſima nouies erit maior quam vnius hominis, vnusque equus tantum praeſtare poterit, quam nouem homines. Eadem regula quoque locum habet in vi fluminis, cuius actio ad rotas circumagendas eſt maxima, ſi rota tanta velocitate verſetur, vt celeritas aquae allabentis ſit pars tertia. Haec igitur ſunt vera principia, ex quibus omnis generis machinae ad ſummum perfectionis gradum euehi poterunt, ad quod vulgarem machinarum doctrinam parum conferre manifeſtum eſt.

III.

De motu et attritu lentium, dum ſuper catinis poliuntur.

Auctore Leon. Eulero pag. 254.

Artifices olim in eiusmodi machinis excogitandis fuerunt occupati, quibus ſpreta figura ſphaerica lentibus vitreis figuram, vel parabolicam, vel ellipticam, vel hyperbolicam, aliamue quamcunque inducere poſſent, nunc autem etſi Dioptricae tam theoria, quam praxis, vberius eſt exculta, praeclare tamen nobiscum agi arbitramur, ſi modo lentes exactiſſime ad ſphaericam figuram elaborari poſſent; hoc enim ſi praeſtare liceret,

 multo

multo perfectioribus certe tam teleſcopiis, quam micro-ſcopiis, vteremur. Duae autem ſunt res, quae huic praxi impedimento eſſe deprehenduntur: altera in ipſius vitri natura flexibili et elaſtica eſt ſita, qua fit, vt vitrum etiam planum catino concauo fortiter appreſſum eius figurae apprime ſe applicet, inde vero remotum in priſtinam figuram reſtituatur. Quamuis ergo lens exactiſſime catini figuram induiſſe videatur, plerumque tamen eius figura deinceps multum diuerſa reperitur; quod vitium aliter euitare non licet, niſi vt vitrum, dum ſuper catino atteritur, ipſi leniſſime apprimatur, quo quidem modo labore multo diuturniore opus eſt, quem artifices aegerrime ſuſcipiunt. Alterum impedimentum in ipſo catino reperitur, cuius figura, dum lens atteritur, non parum vitiatur, vt neceſſe ſit, ſaepius veram eius figuram reſtituere, antequam eandem fuerit adepta; attritu enim mutuo non ſolum a vitro, ſed etiam ab ipſo catino, plurimae particulae abraduntur. Hoc vitium imprimis ſe exerit in operis initio, quo lentis figura etiamnum vehementer diſcrepat a catini figura; ideoque catinus in certis tantum locis atteritur; cui vitio quidem artifices remedium afferre ſtudent, dum lentem per totam catini ſuperficiem circumducunt, caſui autem hic nimis latus campus relinquitur, quam vt quicquam certi hinc ſperare liceat. Quando autem lens iam proxime catini figuram eſt adepta, vt laeuigatione tantum ſit opus, minus illud incommodum metuendum videtur, ſiquidem vbique tantumdem a catino abraderetur. Hinc Auctor ſedulo in attritum, quem catinus a lente patitur, inquirit, vbi quidem mecha-

niſmum nunc fere vtique vſu receptum contemplatur, quo lens ope ſtili eius centro applicati ita catino in gyrum acto apprimi ſolet, vt interea libere circa ſtilum gyrari poſſit. Hic igitur primo obſeruat, motum gyratorium lentis ſemper aequalem eſſe motui gyratorio catini, vt vtrinque eodem tempore totidem reuolutiones peragantur; tum vero oſtendit, lentem quidem per totam ſuperficiem aequaliter atteri, attritumque eo eſſe maiorem, quo longius 1mo. lentis centrum a centro catini teneatur remotum, 2do. quo fortius lens ad catinum apprimatur, 3^{tio}. quo minor fuerit lentis ſuperficies, et 4to. quo celerius catinus in gyrum agatur, catinum vero demonſtrat admodum inaequaliter abradi, ſiquidem lentis centrum immotum teneatur; vnde cum eius figura mox deprauetur, idem vitium in lentem transferatur neceſſe eſt, remedium autem, quo vulgo artifices vti ſolent, dum centrum lentis per totum catinum deducunt, nimis incertum iudicat; quin potius ſuadet, centrum lentis perpetuo in eadem a catini centro diſtantia detineri, atque vt catinus vbique aequalem attritum patiatur, definit figuram fruſti cuiusdam vitri, quod in alio loco catino certa vi impreſſum praeciſe tantum de catino abradat, vt tota abraſio vbique aequalis reddatur. Tutiſſimus hic videtur modus, figuram catini ab omni deprauatione immunem conſeruandi, atque artifices hunc modum facile ad praxin accommodabunt. Conſultum quoque foret lentem non vi manus nimis inconſtante ad catinum apprimi, ſed certo quodam pondere ita moderando, ne prius incommodum ſupra memoratum locum habere

 poſſit;

poſſit; tum vero ſingulari artificio conatum lentis centrifugum coerceri conueniet, vt hoc pacto nihil plane fortunae et arbitrio artificis relinquatur. Fruſti autem illius vitrei per ſe otioſi figura facile determinatur, aeque ac vis, qua id ad catinum apprimi debet, vt deſideratus effectus obtineatur. Caeterum hic nouum documentum principii minimae actionis praeter omnem expectationem cernitur, dum enim Auctor motum lentis ſuper catino definiuit, eum ita comparatum eſſe invenit, vt inde attritus minimus exoriretur, ex quo huius principii vſus ampliſſimus et foecundiſſimus per vniverſam naturam eo clarius elucet.

IV.

De noua quadam vectis proprietate Diſſertatio.

Auctore F. V. T. Aepino p. 271.

In hac diſſertatione denuo inſignis caſus, quo principium minimae actionis eminet, profertur, atque adeo ex natura vectis petitus, cuius proprietates nemine contradicente veritatibus aeternis ſunt annumerandae. Conſiderat ſcilicet Cl. Auctor, vectem aequalium brachiorum, quorum extremitates binae ad bina virium centra infinite remota ſingulatim viribus quibuscunque ſollicitentur, quaeritque ſitum, quo vectis ſit in aequilibrio futurus. Ad hoc vtramque vim reſoluit in binas, qua-

quarum altera ad vectem ſit normalis, altera vero in ipſam eius directionem incidens; atque demonſtrat, aequilibrium in eo ſitu fore, vbi ſumma harum poſteriorum virium in axis directionem cadentium futura ſit maxima. Dolendum autem eſt, hanc elegantem proprietatem nimis anguſtis limitibus contineri, dum ea non amplius locum habet, ſtatim ac brachia vectis inaequalis longitudinis aſſumuntur, ſeu centra illa virium non fuerint infinite remota; interim tamen non erit difficile hoc Theorema, adiiciendis adhuc quibusdam conditionibus, non quidem ſine elegantiae iactura latius extendere, quod autem eo minus neceſſarium videtur, cum iam firmiſſimis rationibus ſit euictum, principium minimae actionis per vniuerſam Staticam, quorſum doctrina vectis eſt referenda, eminentiſſime regnare.

V.

Deſcriptio inſtrumenti cuiusdam, nautis Barometri ad inſtar inſeruituri.

Auctore I. E. Zeihero p. 274.

Cum Barometra vulgaria in nauibus ob continuos motus et ſucceſſiones nullum vſum praeſtare queant, iam olim inſtrumentum peculiare ad vſum marinum ab *Hookio* erat excogitatum. Nunc autem Cl. Auctor aliud inſtrumentum ex ipſa aeris indole petitum proponit. Cum enim quouis tempore exacta elaſtici-

ſticitatis aeris menſura deſideretur, cylindrum cauum aere omnino vacuum in hunc finem commendat. Quia enim aer extremus tota vi elaſtica ſua in baſin cylindri agit, easque, ſi eſſent mobiles, per cauitatem cylindri ad occurſum vsque detruderet, ne hoc eueniat, elaſtrum inter baſes in ipſo vacuo conſtituit; cuius vi eae diſtendantur, ita vt tenſio elaſtri quouis tempore cum preſſione aeris in aequilibrio eſſe debeat. Aucta ergo aeris elaſticitate baſes illae mobiles propius ad ſe inuicem adiguntur; ea vero minuta ab elaſtro interno baſes magis repelluntur, ſicque ex earum interuallo ſemper veram aeris preſſionem agnoſcere licebit, ſi modo frictio hunc effectum non impediat.

VI.

Duarum Machinarum etc. deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero p. 279.

Cochlearum vſus per vniuerſam Mechanicam ita eſt ampliſſimus, vt artifices in iis exacte elaborandis merito omne ſtudium et operam impendant; in quo negotio Cl. Auctor feliciſſimo ſucceſſu iam dudum fuit occupatus, atque hic ingenioſas inuentiones cum publico communicat, quas ex ipſo eius ſcripto perſpicere oportet.

VII.

VII.

Acus nauticae noua deſcriptio.

Auctore I. E. Zeihero pag. 284.

Quemadmodum haec acus, exactiſſime veram declinationem magneticam oſtendens, ſuſpendi atque ad vſum accommodari debeat, Cl. Auctor hic perquam ingenioſe docet; quod inuentum eo magis eſt aeſtimandum, quo ampliorem nunc quidem vtilitatem a magnetis declinatione in diuerſis telluris locis accurate obſeruata expectare licet. Famoſiſſimum enim de inuenienda longitudine maris problema commodius felicius que expediri nequit, quam ſi lex fuerit inuenta, ſecundum quam declinatio magnetis in omnibus terrae locis ad quoduis tempus mutationibus eſt obnoxia. Omnino autem eſſet optandum, vt ſimul inclinationis ratio haberetur, *cuius autem accurata obſeruatio* multo maiores ambages et apparatus poſtulat, quam vt a nauigantibus commode inſtitui poſſit.

VIII.

De aequilibrio virium corporibus applicatarum commentatio.

Auctore S. Kotelnikow pag. 286.

Quae de aequilibrio potentiarum in Statica tradi ſolent, huic propoſitioni fundamentali innituntur, quod potentia per diagonalem parallelogrammi expreſſa

aequiualeat binis potentiis per eius latera expreſſis; haecque veritas vulgo ita demonſtrari ſolet, vt motus ſaltem primo initio impreſſi ratio habeatur; quod autem minime congruum videtur, cum Staticae principia ante ſolide demonſtrata eſſe oporteat, quam quicquam de motu explicari poſſit. In primis quidem Commentariorum noſtrorum Tomis egregia occurrit huius veritatis demonſtratio, quae ab omni motus conſideratione immunis negotium quidem plane conficit, ſed tamen tantis ambagibus inuoluitur, vt ipſi inter prima elementa vix locus concedi queat. Interim tamen hinc iſti propoſitioni palmariae tantum firmamentum comparatur, vt non ſolum ipſa, ſed etiam omnia, quae inde circa aequilibrium quotcunque potentiarum proferuntur, veritatibus neceſſariis accenſeri debeant. Ea namque propoſitione ſtabilitur cuiusque potentiae reſolutio in binas alias, quarum directiones cum ad lubitum accipi queant, quouis caſu omnes potentias, quotcunque fuerint propoſitae, ad binas directiones fixas reuocare licet, ex quarum momentis deinceps ſtatus aequilibrii facile determinatur. Cel. *Eulerus* poſtea eandem hanc propoſitionem fundamentalem ex principio maximorum ac minimorum ſingulari modo demonſtrauit, dum aſſumſit, trium potentiarum puncto applicatarum aequilibrium tum dari, cum omnes potentiae iunctim ſumtae maximum effectum produxerint, ſeu ſingulae punctum, in quod agunt, ſecundum ſuam quaeque directionem maxime protraxerint. Hoc igitur eodem principio per omnes ſcientias foecundiſſimo hic vtitur Cl. Auctor ad ſtatum aequilibrii, quando plures tribus potentiae puncto ſunt appli-

applicatae, definiendum; ſumtis ſcilicet in cuiusque potentiae directione puncto fixo, eum quaerit ſtatum, vbi ſingulae potentiae, per diſtantiam quaeque iſtius puncti a puncto, in quod agunt, multiplicatae, minimum producunt aggregatum. Potentiis ergo, quotcunque fuerint, per litteras A, B, C, D etc. indicatis, et puncti, in quod agunt, diſtantiis ab illis punctis, in cuiusque directione aſſumtis per litteras p, q, r, s etc. ſtatus aequilibrii *ibi* datur, vbi quantitas $Ap+Bq+Cr+Ds+$ etc. *fuerit* minima, ſeu eius differentiale euaneſcens, ſcilicet

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds \text{ etc. } = 0$$

vnde ſimul patet, perinde eſſe, vbicunque illa puncta in cuiusque directione accipiantur. Tum vero angulis inter directiones potentiarum per litteras α, β, γ, δ etc. ſingulatim notatis, anguloque quodam indefinito Φ in calculum introducto, Cl. Auctor ex illo principio ſequentem deducit aequationem § 6.

$$\left.\begin{array}{r} A\,\text{coſ.}\,\Phi + B\,\text{coſ}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\alpha+\beta) \\ + D\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} \\ - B\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha - C\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) \\ - D\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta+\gamma) - \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

quae in ſtatu aequibrii ſemper locum habere debet, quicunque valor angulo Φ tribuatur. Variis igitur ipſi Φ valoribus tribuendis pro quolibet potentiarum numero plures inſignes aequilibrii proprietates deriuat, eximio vſu non deſtitutas. Si autem ipſa aequilibrii determinatio ſpectetur, duae aequationes, quotcunque etiam potentiae proponantur, ſufficiunt, ſiquidem, binis angulorum α, β, γ, δ etc. definitis, poſitio puncti O determinatur.

Cum igitur ſuperior aequatio euaneſcere debeat, quicunque valor angulo Φ tribuatur, facile perſpicitur, hoc euenire, ſi modo bina membra, quorum altero coſinus anguli Φ afficitur, altero eiusdem ſinus, ſeorſim nihilo aequentur, vnde ſequentes binae aequationes obtinentur:

$$A + B\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + D\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = 0$$

et $B\,\text{ſin.}\,\alpha + C\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + D\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + \text{etc.} = 0$

quae non ſolum omnes formulas a Cl. Auctore allatas in ſe complectuntur, ſed etiam aeque late patent. Conueniunt autem eae quoque egregie cum regulis ex vulgari theoria petitis, quibus ſtatus aequilibrii definiri ſolet. Si enim per punctum O recta in directionem potentiae A incidens ducta intelligatur, omnesque vires ſecundum binas directiones, quarum altera cum illa conuenit, altera vero eidem eſt perpendicularis, reſoluantur, tum omnium harum virium reſolutarum eae, quae in dictam directionem cadunt, ſimul ſumtae ſe mutuo deſtruere debent, perinde ac eae, quae ad illam directionem ſunt normales. Illud ſcilicet priori aequatione indicatur, hoc vero poſteriori.

IX.

De commoda acus declinatoriae ſuſpenſione diſſertatiuncula.

Auctore S. Kotelnikow pag. 304.

Quo acus magnetica ſtilo, ſuper cuius cuſpide libere gyretur, imponi queat, vulgo perforari et capitulo

tulo inſtrui ſolet; quoniam vero huiusmodi perforatione curſus materiae magneticae non mediocriter interrumpitur, quo fit, vt plerumque acus plures duobus polos recipiat, eorum ſtudium maxime eſt laudandum, qui ſine vlla acus magneticae laeſione idoneam ſuſpenſionem excogitare conantur, quod quidem acum cum alio corpore, in quo ſuſpenſio fiat, firmiter connectendo facile praeſtari poſſe videtur. Verum *hic obſeruandum* eſt, punctum, circa quod acus mobilis reddatur, aliquantillum *ſupra* commune centrum grauitatis exiſtere, ſimulque totum pondus minimum effici debere, ne frictione motus impediatur. Cl. Auctor igitur in eo potiſſimum eſt occupatus, vt minimo adiuncto corpore peregrino his conditionibus ſatisfaciat.

PHYSICA.

I.

Plantarum rariorum deſcriptiones completae.

Auctore Ioh. Chr. Hebenſtreit pag. 315.

Si non noua in regno Naturae reperire occaſio datur, quod quidem in vno loco haerentibus rarius occurrit, cognita, at nondum ſatis deſcripta, pleniore deſcriptione notiora reddere operae pretium eſt. Hanc ſibi prouinciam excolendam ſumſit, dum nobiſcum commoraretur, Cl. *Hebenſtreitius*, cuius ſtudium in accurata et completa Plantarum deſcriptione iam ex praecedentibus Commentariorum noſtrorum voluminibus conſtat. Plantarum hic deſcriptarum et iconibus ad viuas plantas illuſtratarum prima eſt *Meſſerſchmidia*, hoc nomine nuncupata in honorem viri de omni Hiſtoria naturali meritiſſimi *Danielis Gottlieb Meſſerſchmidii*, Medicinae Doctoris, qui iuſſu PETRI MAGNI per nouem annos totam fere Sibiriam, ea cura, quae intelligentiſſimum et ſolertiſſimum naturae indagatorem decet, perluſtrauit, eamque ad fontes *Arguni* fluuii circa lacum *Dalai* reperit. *Meſſerſchmidii* ſchedis vſus b. *Ammanus* deſcriptionem huius Plantae edidit, ſub *Arguſiae* nomine, monuit autem ſe non refragaturum, ſi quis ab inuentore *Meſſerſchmidiam* vocare voluerit. Hoc fecit Ill. *Linnaeus*, at deinceps *Tournefortiae* generi

neri accenſuit. *Hebenſtreitius* omnino ſui generis plantam eſſe docet, quae filamentis, ſitu antherarum, ſtilo, fructu, a *Tournefortia* differat. Altera *Aeſchynomene*, vel *Hedyſarum* Sloani, planta eſt a V. Ill. *Hans Sloane* in Inſula Iamaica primum reperta, cuius vegetationis hiſtoriam et reliqua *Hebenſtreitius* accurate deſcribit, et iconem ſuppeditat, iſti, quam Sloanius ad ſiccam, vt videtur, plantam fieri curauerat, meliorem. Tertia *Verbeſinae* ſpecies, vel *Rudbeckia* Zinnii, vel *Zinnia* Linnaei, ex Gallis originem ducit, Lipſiae primum culta, et abinde Goettingam, Vpſaliam, Petropolin, propagata. Secundum methodum plantarum Cel. *Ludwigii* ad genus *Verbeſinae* referendam eſſe noſter exiſtimat. Hic autem characteres quoque, ab Ill. *Linnaeo* in noua editione Syſt. Nat. Tom. II. pag. 1377. ſuppeditatae, conferri merentur. Quarto loco *Braſſicae* ſpecies occurrit, Sinis indigena, et alias quoque nota, at hic pluribus deſcripta, vna cum aliis obſeruationibus, quas Botanophilis non ingratas futuras eſſe arbitramur.

II.

De gradibus Frigoris ac Caloris ſummis, quos certa fluida ferre poſſunt, etc.

Auctore I. A. Braun p. 339.

Sunt phaenomena Congelationis et Ebullitionis diuerſorum corporum haud exigui momenti, adeoque atten-

attentione et indagine digniſſima. Non igitur mirandum eſt, viros ſummos indagare eiusmodi phaenomena ſtuduiſſe, quos inter magnus *Newtonus* primus ſcalam graduum caloris et frigoris in Actis Societatis Regiae Londinenſis menſe Aprili 1701. N. 270. publicauit. Facit eiusmodi indagatio ad naturam corporum fluidorum et firmorum detegendam, et ad diuerſos, in diuerſis corporibus, effectus caloris et ignis cognoſcendos, qui ſaepe ſunt mirandi. Corpora modo adparent in forma fluidorum, modo in forma ſolidorum, qui duplex corporum ſtatus ſolius caloris et ignis eſt effectus; vti quoque forma vaporum, in quos reſolui ſaepius corpora ſolent, praecipue in eorum ebullitione, huc eſt referenda. Hinc ſequitur, corpora fluida ſolo frigore in corpus firmum abeuntia, glaciem quandam, quae pro diuerſitate corporum diuerſa eſt, conſtituere, et ſtatum fluiditatis a certo caloris gradu pendentem, nil niſi glaciem eſſe fuſam, vti eſt aqua. Quum igitur fluiditas et firmitas conſtituant tantum diuerſum vnius eiusdemque corporis ſtatum, manifeſtum eſt, hunc duplicem ſtatum ad eſſentialia corporis non eſſe referendum, ſed ad extra eſſentialia et accidentia, ſeu modos, dum eiusmodi commutatio ſtatus ſoli calori, nempe vel eius augmento, vel decremento, debeatur. Non enim exiſtimandum eſt, calorem et frigus eſſe res ſua natura diuerſas, licet diuerſis nominibus, iisque poſitiuis, ad illa deſignanda vti conſueuerimus. Frigus enim ſola priuatio et diminutio caloris eſt, et quando in thermometris quibusdam terminus inter

calorem

calorem deſinentem et Frigus incipiens ponitur, id mere eſt arbitrarium. Nam gradus frigoris 200, ſcalae Delilianae, pro gradu caloris inſigni haberi poteſt et debet, reſpectu gradus 600, qui circiter hydrargyrum congelare ſolet. Quod ſi igitur corpus firmum calore fundatur, idem corpus eſſentialiter maneat neceſſe eſt, eiusdem generis. Cera fuſa manet cera, aurum, argentum et omnia metalla fuſa, manent metalla, et eiusdem generis, ſcil. aurum, argentum etc., quo ipſo patet, duritiem et firmitatem perpetuam pro charactere metallorum eſſentiali haberi non poſſe, alias metalla fuſa, in ſtatu ſcilicet fluiditatis, pro metallis non eſſent reputanda, quod abſonum.

Quum hodie conſtet hydrargyrum ſolo frigore abire in corpus firmum, quae eiusdem huius diſſertationis Auctoris Cl. *Braunii* inuentio eſt, et calore rurſus mutari in corpus fluidum, an dubitari poteſt, Mercurium aeque ac reliqua metalla, Aurum, Argentum, Plumbum, Stannum etc. ſi in forma fluidorum adparent, dum fuſa ſunt, pro metallo vero fuſo reputandum eſſe? Differentia enim nulla alia eſt, niſi quod Mercurius multo minore caloris gradu fundatur, quam reliqua metalla, et propter hunc minorem gradum, qui ſemper in Atmoſphera regnat, perpetuo quoque in noſtro terrarum orbe fluidum ſeu fuſum maneat neceſſe eſt, et frigore naturali in metallum firmum et durum, vti reliqua, abire nequeat. Deſinat igitur Mercurius locum inter ſemimetalla occupare; euehatur potius ad dignitatem perfectorum metallo-

 rum,

rum, quod omnino fieri debere luce meridiana clarius eſt, niſi quis manifeſto veritati demonſtratae repugnare velit.

Sunt igitur ſoli gradus caloris diuerſi, qui efficiunt, vt corpora modo ſub ſpecie fluidorum, modo ſub ſpecie firmorum, adpareant. Et hos ipſos gradus caloris diuerſos Cl. Auctor in diuerſis corporibus, multis adcuratisque, quantum fieri potuit, experimentis, determinare ſtuduit. Pleraeque determinationes nouae ſunt, quae vero plane noua non ſunt phaenomena experimentis detecta, ita tamen ſunt comparata, vt cognita partim confirmentur, partim vero emendentur. Haec generatim dicta ſufficiant, ad ſpecialia deſcendere non attinet, quae in diſſertatione ipſa lector harum obſeruationum cupidus euoluere non praetermittet.

III.

Cautelae circa obſeruationes Meteorologicas adhibendae.

Auct. Petro van Muſchenbroek p. 367.

Solas obſeruationes et experimenta ſola, veras firmasque eſſe baſes Philoſophiae naturalis, recte Cel. Auctor ſub finem diſſertationis monet, quoniam ſine his vera theoria condi nequit, ſed loco verae et firmae ſcientiae naturae inanes ſpeculationes et hypotheſes fictae, quas delet dies, proferuntur.

Sequitur hinc, inueſtigationes huius generis veritatum ſcrutatoribus naturae praecipue commendandas

eſſe,

eſſe, ex quibus conſectaria ad veram ſcientiam naturae condendam hauriri et deduci queant. Ad veritates huius generis pertinent quoque obſeruationes Meteororum, quae, tantum abeſt, vt ſint negligendae et ſuperficiarie inſtituendae, vt potius omnem adcurationem mereantur et requirant, quoniam theoria Meteororum, quae tot et tantas generi humano promittit vtilitates, quam longiſſime adhuc a ſua perfectione abeſt. Vti igitur theoria aſtronomica, quae inſigni perfectione hodie gaudet, non niſi poſt innumeras obſeruationes multorum annorum condi potuit; ſic quoque Meteorologia non niſi poſt multorum annorum obſeruationes ad perfectionem quandam poterit perduci. Sunt quidem obſeruationes Meteorologicae a multis hinc annis iam factae, ſed paucae ſcopo indicato ſeruire poſſunt, quia ſunt pleraeque minus accuratae et perfectae. Operae igitur pretium eſt, defectus et imperfectoines obſeruationum *meteorologicarum vulgarium*, quod b. Auctor *in* hac diſſertatione fecit, indicare, et ſimul, quomodo accuratae et perfectae ſint faciendae, oſtendere.

Et quem quis tutiorem viae ductorem deſiderauerit, quam eum, qui per totum fere vitae ſuae decurſum eam calcauit? Beati *Muſchenbroekii* experientia et ſolertia in obſeruationibus et experimentis naturalibus inſtituendis neminem latet. Hinc nullum dubium eſt, quin ipſius conſilia vtilitatem ſint allatura. Hinc quoque Academia non ſuperuacaneum cenſuit, eadem, etiamſi plura alias quoque in vniuerſum nota contineant, inſerere Commentariis ſuis.

IV.

Halonum extraordinariarum deſcriptio.

Auctore F. V. T. Aepino pag. 392.

Si ingenioſa vnquam in lucem producta eſt hypotheſis, explicando phaenomeno cuidam naturali deſtinata, ea certe eſt, quam de Halonum atque Parheliorum cauſis propoſuit magnus *Chriſtianus Hugenius*. Etſi autem hypotheſis iſta miro modo phaenomenis conſentiat, de veritate ipſius tamen dubitandi, immo penitus ipſam reiiciendi, cauſas ſatis praegnantes inuenerunt recentiores Phyſici, quarum vnicam hic adduxiſſe ſufficiat.

Conſtat ex obſeruationibus, et ab ipſo *Hugenio* ita ſtatuitur, eſſe diametrum Halonis interioris fere ſemper 44 ad 45°, atque ſi plures adſunt, ſecundae Halonis diametrum conſtanter duplum huius reperiri, et ad 90° aſcendere, quae quidem obſeruatio ita conſtans eſt, vt ad rariſſima phaenomena pertineant Halones, quarum diametri antea aſſignatis notabiliter aut maiores aut minores reperiuntur. Cum vero Vir ſummus phaenomena haec ex ſphaerulis atque cylindris glacialibus, in aere volitantibus, opaco nucleo praeditis, deriuet, pendere debent diametri Halonum, ſecundum ipſius hypotheſin, a ratione, quae inter diametros globuli glacialis et nuclei opaci intercedit, quam quidem rationem pro halonibus 45° ipſe *Hugenius*, 1000 ad 480, ac pro halonibus 90°. 1000 ad 680 ſtatuit.

Ardua

Ardua itaque iam oritur quaeſtio, vnde fiat, vt natura in producendis globulis glacialibus, modo allegatas corticis diaphani ad nucleum opacum proportiones prae aliis affectet, ac fere nunquam, et inter innumeros, qui ad datae Halonis formationem concurrunt, globulos vix aliquem producat, in quo alia obtineret proportio. Effectus enim naturae determinati a vagis proficiſci cauſis nequeunt, ſed determinatas expoſtulant. Quicquid autem de ortu et formatione globulorum glacialium imaginari velimus, nunquam tamen aliquam mente concipere poterimus cauſam, quae non ad producendas quasuis corticis et nuclei proportiones quaſi indifferens eſſet, vnde miraculi inſtar habendum foret, quod inter plures caſus, quorum nullus peculiari prae reliquis gaudet priuilegio, vnicus ſolus fere conſtanter accidere ſoleat.

Prouti haec euidenter probant, theoriam atque explicationem Halonum et Parheliorum ad deſideranda adhuc pertinere, ſic praeſens Diſſertatio euincit, phaenomenon ipſum, ad hanc vsque diem Phyſicis non ita cognitum fuiſſe, vt omnes et praecipuas ipſius circumſtantias perſpectas habuerint. Producitur namque, novum genus Halonum, quod Philoſophiae naturalis ſcrutatoribus hucusque ignotum fuit, etſi videatur in ſeptentrionalibus terrae regionibus non ita infrequens eſſe, vt inter rariora numerandum ſit. Vidit nempe Auctor, Haloni conſuetae circulari 45°, iunctam Halonem ellipticam, cuius axis minor et verticalis diametrum Halonis circularis aequabat, axis vero maior,

 hori-

horizonti parallelus, ſex circiter diametris ſolaribus axem minorem ſuperabat.

Solerter inquiſiuit Auctor, qui deſcriptum ſe legiſſe phaenomenon non recordabatur, an alicubi mentionem ipſius iniectam inuenire poſſet, aſt fruſtra; vnde pro nouo et incognito hactenus habendum eſſe ſtatuit.

Notiſſimum quidem eſt, hinc inde allegari apud auctores Halones ellipticas, ſed patet ex intuitu, ſermonem nullibi eſſe, niſi de Halonibus, quae in ſe circulares quidem ſunt, et actuali inſtituta dimenſione tales reperiuntur, aſt per fallaciam opticam, ellipticam, ſeu oualem, potius figuram mentiuntur. Eae vero Halones, quas Auctor hic producit, id peculiare habent, quod non ſolum ellipticae videantur, ſed dimenſae actu quoque tales inueniantur, et praeterea axis ipſorum maior horizonti parallelus ſit, qui in prioris generis Halonibus nunquam non horizonti perpendiculariter inſiſtere videtur.

Etſi itaque Auctor nullum inuenerit veſtigium, deſcriptas eſſe alicubi Halones vere ellipticas, non difficile tamen ipſi fuit agnoſcere, apparuiſſe idem hoc phaenomenon quibusdam obſeruatoribus, aſt ita incompletum, vt iuſtam ſibi ipſius exinde formare ideam non potuerint.

Quamuis tandem Auctor, in nuda phaenomeni maxime notabilis deſcriptione hic ſubſiſtat, neque ad eruendam cauſam ipſius ac ſimilium phaenomenorum animum

animum aduertat, iungit tamen cogitationes aliquas ſuas, huc pertinentes, quaeſtionum ſub forma, in quarum aliqua inſinuat, mirabilis phaenomeni Halonum et Parheliorum cauſam, ſua ex mente, ſine dubio in iis quaerendam eſſe, quae ſummus *Newtonus* de proprietate luminis, quam acceſſuum facilis transmiſſionis et reflexionis nomine inſigniuit, detexit, vnde optandum eſt, vt aliquis Phyſicorum ad vlterius examinandam hanc doctrinam, quae, neſcio quo fato, inde a *Newtoni* tempore fere neglecta ac inculta iacet, animum aduertat.

V.

Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum deſcriptiones.

Auctore I. T. Koelreuter p. 404.

Recte Cl. Auctor celebrat ingentem rerum naturalium theſaurum in Muſeo Petropolitano aſſeruatum, et inprimis Collectionem Piſcium, quam immortalis memoriae Imperator PETRVS MAGNVS a V. Cel. *Alb. Seba* haud paruo pretio comparauit. Ipſe quidem *Seba* res Muſei ſui rariores deſcribere inſtituit, et elegantiſſimis iconibus illuſtratas duobus tomis euulgauit. Tertium autem, qui piſces exhibere debebat, mors in lucem emittere prohibuit. Hinc operam pro amplificanda Hiſtoria naturali non inutiliter collocauit *Koelreuterus*, dum

piſces

piſces rariores, quorum vel nomina tantum, vel nimis breues et defectuoſae deſcriptiones apud Auctores Ichthyologos extant, tam pleniore et accuratiore deſcriptione, quam iconibus ſuo ductu confectis, notiores reddere adgreſſus eſt. Sunt autem piſces a *Koelreutero*, dum nobiscum commoraretur, deſcripti in vniuerſum tredecim. Ex his tres hoc loco comparent: Gaſteropelecus *Gronouii*, ſiue Clupea (Sternicla) *Linnaei*, Trutta dentata, *Piabucu* Braſilienſium *Marcgrafii*, et Gobionis ſpecies, a nemine ante indicata. Reliqui ſequentia Commentariorum volumina ornabunt. Rationem, qua Auctor in deſcribendo et omnes piſcium partes menſurando procedit, laudare ſuperfluum foret. Fatebuntur artis periti, nihil, quod notatu dignum ſit, praetermiſſum eſſe, et, ſi omnes Ichthyologi hac via incederent, fore, vt nihil in hac ſcientia dubium aut incertum remaneret. Monemus tantum, in noua Syſtematis Naturae editione anni 1758. Ill. *Linnaeum* nomen vulgare Sterniclae, et denominationem Gaſteropeleci *Gronouii*, non Clupeae pinnis flauis, ventralibus minutiſſimis, ſed Clupeae pinnis ventralibus nullis, adſcripſiſſe.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

I.

Inueſtigatio poſitionum inſigniorum Ruſſiae locorum.

Auctore A. N. Griſchow pag. 433.

Atlantem Ruſſicum An. 1745. ab Academia euulgatum multa emendatione indigere, nemini notius eſt, quam ipſi Academiae, quae ideoque, ſtatim poſt primum hoc tentamen abſolutum, de corrigendis eius erroribus ac ſupplendis defectibus ſerio cogitauit. Pluribus opus erat obſeruationibus Aſtronomicis ad poſitiones locorum accurate ſtabiliendas. Nonnullarum quoque prouinciarum nouae delineationes geodaeticae deſiderabantur, prioribus, quae extabant, praeſtantiores, quibus ſine poſitiones locorum ex obſeruationibus aſtronomicis erutae parcam tantum lucem iteratis laboribus affunderent. Rem hanc, propter magnitudinem Imperii Ruſſici, vltimis cogniti orbis limitibus terminatum, lente procedere, mirum nemini videbitur. Delineatae autem ſunt, quantum ex nouis cum Academia communicatis ſubſidiis fieri potuit, tabulae nouae geographicae complures, quae, poſtquam vltimam limam expertae fuerint, teſtabuntur, non inanem fuiſſe eorum operam, qui huc vſque in Atlante Ruſſico emendando verſati ſunt. Cura b. *Griſchouio* hunc in

ſinem demandata, haec fuit, vt poſitiones locorum, de quibus obſeruationes aſtronomicae habebantur, ex iisdem obſeruationibus ac correſpondentibus aliis, inueſtigaret, quod quanta accuratione ac ſollertia praeſtitit, lectores in ipſo eius ſcripto non ſine voluptate perſpicient. Nos tantum Longitudines ac Latitudines locorum, ex eius inueſtigatione determinatas, hic apponemus:

Nomina locorum	Longitudo	Latitudo
Archangelopolis	56°. 21′. 15″	64°. 33′. 36″
Riga	41. 18. 45	56. 56. 24
Reualia	41. 57. 30	59. 26. 22
Dagher - Ort	39. 35. 0	58. 56. 0
Narua	- - -	59. 23. 27
Bereſow	- - -	63. 56. 14
Samarowskoi jam	- - -	60. 55. 30
Demianskoi jam	- - -	59. 30 34
Tobolsk	- - -	58. 6. 46.
Nouo Vſolie	74. 13. 0	59. 23. 54
Weretie	74. 15. 15	59. 22. 40
Saigatka	70. 43. 0	56. 43. 15
Sarapul	70 13. 0	56. 26. 40
Vſt - Ykskoe	69. 13. 0	51. 51. 50
Swinji gori	67. 43. 0	55. 36. 0
Caſan	66. 28. 0	55. 45 vel 47
Niſchnei Nowgorod	- - -	56. 18. 0
Moſcua	55. 12. 45	55. 45. 46.

Non poſſumus non monere, haberi quoque Latitudinem vrbis Tobolsk, opera V. Cl. *Chappe d'Auteroche*, cum tranſitum Veneris per diſcum Solis a. 1761 ibidem obſer-

obſeruaret, magno rigore ſtabilitam, ex cuius obſeruationibus etiam patet, Latitudinem vrbis Caſan aliqua correctione indigere. Habet namque Vir accuratiſſimus

pro Tobolsk	58°. 12′. 22″	vid. eius *Memoire*
pro Caſan	55. 43. 58	*du Paſſage de Venus.*

Quadrantis quidem verificationem, dum Caſani eſſet, non inſtituit: inſtrumentum autem optimum, quo vſus eſt, tantis variationibus, ac iſtud Cel. *Deliſle*, obnoxium eſſe non potuit; vnde de *Chappiana* obſeruatione intra minuti primi interuallum ſecuri ſumus, cum in *Deliſleanam* ſuſpicio erroris aliquot minutorum cadat.

Caeterum non ingratum erit lectoribus aſtronomis, declinationes Stellarum *Rigel*, γ *Draconis*, *ſtellae polaris* et *Pallicii*, ex propriis obſeruationibus b. *Griſchovii* exacte admodum ſtabilitas, hic reperire.

II.

Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum Tych. Brahei etc. diſquiſitio.

Auctore A. N. Griſchow pag. 476.

Inter obſeruationes Aſtronomicas ſaeculo XVI. inſtitutas maximam certe merentur attentionem, eae, quas ſummi nominis Aſtronomus Danus *Tycho de Brahe*, Vraniburgi, aliisque in locis magno numero inſtituit. Etſi enim organa, quae adhibuit *Tycho*, perfectione ho-

diernis aequari nullo modo queant, magna tamen, Ill. Aſtronomi ſollertia, ipſaque vetuſtas harum obſeruationum, ſummum ipſis pretium conciliant. Vt vero tantus obſeruationum aſtronomicarum theſaurus et nobis et poſteris in vſum cedere queat, neceſſarium inprimis erat, vt ſitus Obſeruatoriorum, vbi inſtitutae ſunt, quantum fieri poteſt, exacte determinaretur, quod iam ante ſaeculum perſpexit Academia Scientiarum Pariſina, dum celeberr. Aſtronomum *Picardum* in Inſulam Huennam miſit, vt in Vraniburgi arcis Latitudinem atque Longitudinem ſollicite inquireret; aſt minus feliciter ceſſit hic labor, vnde Celeb. *Griſchowio*, nouas circa hanc rem diſquiſitiones inſtituendi, campus relictus fuit.

Procedit in hoc negotio Cl. Vir ea ratione, vt ex propriis ſuis obſeruatis declinationem *α Leonis* aut *Reguli*, atque *ſtellae polaris* magno rigore determinet, tumque partim ex *Picardi*, partim ex ipſius *Tychonis*, obſeruationibus, circa dictas modo ſtellas inſtitutis, Latitudinem Vraniburgi, ex prioribus 55°. 54′. 12″. 3‴. ex poſterioribus 55°. 54′. 17″. 4‴. calculi ope eruat, ea quidem cum accuratione, vt de Latitudine celebris huius Obſeruatorii intra pauca ſecunda certi eſſe queamus.

Daniam relinquens Ill. *Brahaeus* per aliquot tempus commoratus eſt in arce Wandesburgo, non procul a celebri Germaniae emporio Hamburgo ſita, quae nunc Wandesbeck dicitur, ibique obſeruationes habuit, vtiles futuras, modo de loci huius poſitione conſtet. Aggreditur itaque huius quoque loci Latitudinis deter-

determinationem *Griſchowius*, pari felicitate, dum ipſam ex ipſius *Tychonis* obſeruationibus 53°. 35′. 12½″. deducit.

Anſam hinc arripit Cl. Auctor corrigendi enormem quendam errorem, quem in collocatione vrbis Hamburgi committere ſolent, noſtro etiam tempore, Geographi atque Aſtronomi, dum vrbis huius Latitudinem 6, 8. immo ad 20′. vera maiorem exhibent. Invenit nempe ex menſurationibus in agro Hamburgenſi inſtitutis *Griſchowius*, Wandesburgum, vel Wandesbeck, 1′4″½ magis ſeptentrionem verſus ſitum eſſe, ac vrbis Hamburgi medium, vnde Eleuatio poli Hamburgo tribuenda prodit 53°. 34′. 8″.

Addidit his diſquiſitionibus Auctor proprias ſuas obſeruationes, quas circa Latitudinem Obſeruatoriorum Regiorum, *Pariſienſis* et *Berolinenſis*, *ſumma ſollertia* et excellentiſſimo inſtrumento, Quadrante nempe tripedali Pariſiis conſtructo, qui hodie in Obſeruatorio Academiae noſtrae aſſeruatur, inſtituit, ex quibus prioris Latitudinem 48°. 50′. 12½″. aliquot nempe ſecundis maiorem ea, quam aſſumere ſolent Aſtronomi Pariſienſes, poſteriorem 52°. 31′. 0″. exacte inuenit.

III.

Obſeruationes Lunares correſpondentes in Inſula Oeſilia habitae a. 1752.

Auctore A. N. Griſchow pag. 515.

Hae ſunt obſeruationes a b. *Griſchouio* ex compacto cum Cel. Abbate *de la Caille* Arensburgi in Inſula Oeſilia, ad Parallaxin Lunae inueſtigandam, inſtitutae, de quibus in Summario Tom. VI. horum Commentariorum pag. 43. dictum eſt, Academiam operam daturam, vt quantocyus lucem publicam adſpiciant. Additae ſunt obſeruationes pro Refractione determinanda, nec non pro Longitudine et Latitudine Obſeruatorii Arensburgenſis, ex quibus prodit

Longitudo Arensburgi ab Inſula Ferro	39°. $56\frac{1}{4}'$.
vel	39°. $57\frac{1}{2}'$.
Aſſumta differentia Meridianorum Pariſios inter atque Ferro inſulam vt in Faſtis aſtronomicis Pariſienſibus pro a. 1763. ſtabilita legitur.	19°. 54′
Latitudo Arensburgi - - - -	58°. 15′. $9''\frac{1}{2}$.
Latitudo Petropoli in Obſeruatorio -	59°. 56′. $23\frac{1}{2}$
	vel $24\frac{1}{2}$.

Adplicatis correctionibus ex deuiatione, praeceſſione et aberratione, et adhibita refractionis tabula Caſſiniana.

INDEX

INDEX COMMENTARIORVM.

Mathematica.

L. Euleri, De integratione aequationum differentialium p. 3.
Eiusdem, Solutio Problematis de inueſtigatione trium numerorum, quorum tam ſumma, quam prodnctum, nec non ſumma productorum ex binis, ſint numeri quadrati p. 64.
Eiusdem, Theoremata Arithmetica, noua methodo demonſtrata p. 74.
Eiusdem, Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonſtrationibus ſupponuntur p. 105.
Eiusdem, Conſideratio formularum, quarum integratio per arcus ſectionum conicarum abſolui poteſt p. 129.
Eiusdem, Conſtructio aequationis differentio-differentialis p. 150.
Eiusdem, Annotationes in locum quendam Carteſii, ad circuli quadraturam ſpectantem p. 157.
Aepini, Demonſtratio generalis Theorematis Newtoniani de binomio ad potentiam indefinitam eleuando p. 169.
Eiusdem, De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus p. 181.
Rumowski, Solutio Problematis cuiusdam ad maxima minimaue pertinentis p. 189.

Phyſico-Mathematica.

L. Euleri, Dilucidationes de reſiſtentia fluidorum p. 197.
Eiusdem, Principia Theoriae Machinarum p. 230.

Eiusdem

— *Eiusdem*, De motu et attritu lentium, dum ſuper catinis poliuntur p. 254.
Aepini, De noua quadam vectis proprietate p. 271.
— *Zeiheri*, Deſcriptio inſtrumenti cuiusdam, nautis Barometri ad inſtar inſeruituri p. 274.
Eiusdem, Duarum Machinarum etc. deſcriptio p. 279.
— *Eiusdem*, Acus nauticae noua deſcriptio p. 284.
Kotelnikow, De aequilibrio virium corporibus applicatarum p. 286.
— *Eiusdem*, De commoda acus declinatoriae ſuſpenſione p 304.

Phyſica.

Hebenſtreit, Plantarum rariorum deſcriptiones completae p. 315.
— *Braun*, De gradibus Frigoris ac Caloris ſummis, quos certa fluida ferre poſſunt, etc. p. 339.
Muſchenbroek, Cautelae circa obſeruationes Meteorologicas adhibendae p. 367.
Aepini, Halonum extraordinariarum deſcriptio p. 392.
Koelreuter, Piſcium rariorum e Muſeo Petropolitano exceptorum deſcriptiones p 404.

Aſtronomica.

— *Griſchow*, Inueſtigatio poſitionum inſigniorum Ruſſiae locorum p. 433.
— *Eiusdem*, Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum Tych. Brahei etc. diſquiſitio p. 476.
— *Eiusdem*, Obſeruationes Lunares correſpondentes in Inſula Oeſilia habitae p. 515.

* * *

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
INTEGRATIONE
AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Conſidero hic aequationes differentiales primi gradus, quae duas tantum variabiles inuoluunt, quas propterea ſub hac forma generali $M\,dx + N\,dy = 0$, repraeſentare licet, ſi quidem M et N denotent functiones quaſcunque binarum variabilium x et y. Demonſtratum autem eſt, huiusmodi aequationem ſemper certam relationem inter variabiles x et y exprimere, qua pro quouis valore vnius certi valores pro altera definiantur. Cum autem per integrationem iſta relatio finita inter ambas variabiles inueniri debeat, aequatio integralis, ſi quidem ad omnem amplitudinem extendatur, nouam quantitatem conſtantem recipiet, quae, dum penitus ab arbitrio noſtro pendet, infinitas quaſi aequationes integrales complectitur, quae omnes aequationi differentiali aeque conueniant.

2. Propoſita igitur huiusmodi aequatione differentiali quacunque $M\,dx + N\,dy = 0$, tota vis Analyſeos in hoc conſiſtit, vt aequatio finita inter easdem variabiles

biles x et y eliciatur, quae eandem inter illas relationem exprimat, atque ipſa differentialis, et quidem latiſſimo ſenſu, ita vt conſtantem quampiam arbitrariam, quae in differentiali non ineſt, contineat. Verum ſi haec quaeſtio ita generaliſſime proponatur, nulla plane adhuc inuenta eſt via ad eius ſolutionem perueniendi; atque omnes caſus, quos adhuc reſoluere licuit, ad numerum perquam exiguum reduci poſſunt, ita vt in hac Analyſeos parte, perinde ac in reliquis, maxima adhuc incrementa deſiderentur; neque ob hanc cauſam vnquam plena omnium huius ſcientiae arcanorum cognitio expectari queat.

5. Quae quidem adhuc in hoc negotio ſunt praeſtita, ea fere omnia ad hos caſus referri poſſunt, quibus aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, vel ſponte ſeparationem variabilium admittit, vel per idoneas ſubſtitutiones ad talem formam reduci poteſt. Quodſi enim introducendis loco x et y binis nouis variabilibus v et z, aequatio differentialis propoſita in huiusmodi formam $Vdv + Zdz = 0$ transmutari queat, in qua V ſit functio ipſius v tantum, et Z ipſius z tantum, totum negotium erit confectum, dum aequatio integralis completa erit:

$$\int Vdv + \int Zdz = \text{Conſt.}$$

quae manifeſto illam conſtantem arbitrariam, per generalem integrationem inuectam complectitur. Atque huc fere redeunt omnia artificia, quibus Analyſtae adhuc in reſolutione huiusmodi aequationum ſunt vſi.

4. Niſi igitur aequatio propoſita differentialis ſponte ſeparationem variabilium admittat, totum negotium in hoc conſumi eſt ſolitum, vt idoneae ſubſtitutiones, quae ad ſeparationem viam parent, inueſtigantur, in quo etiam ſaepius ſummam ſagacitatem, quam Geometrae ad ſcopum obtinendum adhibuerunt, admirari oportet. Interim tamen cum nulla certa via pateat, huiusmodi ſubſtitutiones inueſtigandi, haec methodus minus ad rei naturam videtur accommodata, ex quo conſtitui, aliam methodum non nouam quidem, verum tamen etiamnunc non ſatis excultam, accuratius perpendere, quae vti ſubſtitutionibus non eget, ita etiam naturae aequationum magis conſentanea videtur, dum eius ratio indoli differentialium innititur, tum vero etiam priorem methodum, velut partem, in ſe complectitur.

5. Aequatione differentiali ad hanc formam $M\,dx + N\,dy = 0$ perducta, conſideretur formula $M\,dx + N\,dy$ ſine reſpectu habito, quod ea euaneſcere debeat, et examinetur, vtrum ea ſit differentiale cuiuspiam functionis ipſarum x et y, nec ne? Quemadmodum hoc examen ſit inſtituendum, iam paſſim abunde eſt explicatum; vtramque ſcilicet functionem M et N differentiari oportet, et cum earum differentialia huiusmodi formam ſint habitura:

$$dM = p\,dx + q\,dy \text{ et } dN = r\,dx + s\,dy$$

diſpiciatur, vtrum ſit $q = r$, nec ne? Quodſi enim fuerit $q = r$, hoc infallibile eſt criterium, formulam $M\,dx + N\,dy$ eſſe integrabilem: at ſi non fuerit $q = r$, aeque certum eſt, iſtam formulam ex nullius finitae functionis ipſarum x et y differentiatione eſſe ortam. Ex

quo tota quaeſtio ad duos caſus reducitur, quorum alter locum habet, ſi fuerit $q = r$, alter vero, ſi hae quantitates q et r non fuerint inter ſe aequales.

6. Ad aequalitatem igitur, vel inaequalitatem, quantitatum q et r agnoſcendam, ne opus quidem eſt, vt functiones M et N penitus per differentiationem euoluantur, ſed ſufficit in functione M, quae cum dx eſt coniuncta, quantitatem x vt conſtantem ſpectare, eamque tantum eius differentialis partem quaerere, quae ex variabilitate ipſius y tantum naſcitur, ſi quidem hoc modo membrum $q dy$ obtinetur, valorem autem ipſius q ſic erutum hac ſcriptione $\left(\frac{dM}{dy}\right)$ denotare ſoleo. Simili modo altera functio N, quae cum dy eſt coniuncta, ita differentietur, vt y pro conſtante tractetur, et ex variabilitate ſolius x impetretur differentialis pars $r dx$, vbi valorem ipſius r pariter per $\left(\frac{dN}{dx}\right)$ exprimo. Quodſi ergo formula $M dx + N dy$ ita fuerit comparata, vt ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, ea eſt integrabilis, eiusque integrale ſequenti modo inueniri poterit. Quo facto, ſi hoc criterium non locum habeat, videamus quomodo ſit procedendum.

Problema I.

7. Si aequatio differentialis $M dx + N dy = 0$ ita fuerit comparata, vt ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, inuenire eius aequationem integralem.

Solutio.

Si fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, tunc datur functio finita binarum variabilium x et y, quae differentiata praebet

bet $Mdx + Ndy$. Sit V iſta functio, et cum ſit $dV = Mdx + Ndy$, erit Mdx differentiale ipſius V, ſi tantum x variabile ſumatur, et Ndy eius differentiale, ſi tantum y variabile capiatur. Hinc ergo viciſſim V reperietur, ſi vel Mdx integretur, ſpectata y vt conſtante, vel Ndy integretur, ſpectata x vt conſtante: ſicque haec operatio reducitur ad integrationem formulae differentialis vnicam variabilem inuoluentis, quae in hoc negotio, ſiue algebraice ſuccedat, ſiue quadraturas curuarum requirat, concedi poſtulatur. Cum autem hac ratione quantitas V duplici modo inueniatur, et altera integratio vice conſtantis functionem quamcunque ipſius y, altera vero ipſius x aſſumat, ita vt ſit

$$\text{et } V = \int Mdx + Y, \text{ et } V = \int Ndy + X,$$

ſemper has functiones Y ipſius y, et X ipſius x; ita definire licet, vt fiat $\int Mdx + Y = \int Ndy + X$, id quod quouis caſu facile praeſtatur. Quo facto cum quantitas V ſit integrale formulae $Mdx + Ndy$, euidens eſt, aequationis propoſitae $Mxd + Ndx = 0$ integralem aequationem fore $V = \text{Conſt.}$ eamque completam, propterea quod inuoluit conſtantem quantitatem ab arbitrio noſtro pendentem.

Coroll. 1.

8. In hoc problemate ſtatim continetur caſus aequationum ſeparatarum. Si enim fuerit M functio ipſius x tantum, et N functio ipſius y tantum, erit vtique $\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$ et $\left(\frac{dN}{dx}\right) = 0$, ideoque $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$; qui eſt ergo caſus ſimpliciſſimus, quem problema in ſe complectitur.

Coroll.

Coroll. 2.

9. Quodſi autem in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit M functio ſolius x, et N ſolius y, vtraque pars ſeorſim integrabilis exiſtit, atque aequatio integralis erit:

$$\int M dx + \int N dy = Const.$$

Coroll. 3.

10. Praeterea vero noſtrum problema reſolutionem infinitarum aliarum aequationum differentialium largitur, quarum omnium character communis in hoc conſiſtit, vt ſit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, earumque reſolutio per integrationem formularum, vnicam variabilem continentium, expediri poteſt.

Scholion 1.

11. Quoties ergo in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, eius reſolutio nullam habet difficultatem, dummodo integratio formularum vnicam variabilem inuoluentium concedatur; quam quidem iure poſtulare licet. Interim tamen determinatio functionum illarum X et Y, quae loco conſtantium introduci debent, moleſtiam quandam creare videri poſſet, quae autem ſingulis caſibus mox euaneſcere reperietur. Verum quo magis et haec operatio contrahatur, ne duplici quidem integratione eſt opus. Poſtquam enim altera pars Mdx, ſpectata y tanquam conſtanti, fuerit integrata, quod integrale ſit $= Q$, ſtatuatur $V = Q + Y$, poſito tantiſper Y pro functione inde-

indefinita ipſius y, in quam altera variabilis x prorſus non ingrediatur. Tum differentietur denuo haec quantitas $Q+Y$, tractando x tanquam conſtantem, et quia differentiale prodire debet $=N\,dy$, ex hac conditione functio Y facillime definietur, quandoquidem ex rei natura hinc ſponte eliminabitur quantitas x. Inuenta autem iſta functione Y, aequatio integralis erit $Q+Y=$ Conſt. quam operationem ſequentibus exemplis illuſtrari conueniet.

Exemplum 1.

12. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$2axy\,dx+axx\,dy-y^3\,dx-3xyy\,dy=0.$$

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx+N\,dy=0$, erit:

$$M=2axy-y^3 \text{ et } N=axx-3xyy.$$

Primum igitur diſpiciendum eſt, vtrum hic caſus in problemate contineatur? quem in finem quaeramus valores:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=2ax-3yy, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right)=2ax-3yy,$$

qui cum ſint aequales, operatio praeſcripta neceſſario ſuccedet. Reperietur autem, ſumta y pro conſtante:

$$\int M\,dx=axxy-y^3x+Y;$$

cuius formae ſi differentiale ſumatur, poſita x conſtante, prodibit:

$$axx\,dy-3yyx\,dy+dY=N\,dy,$$

et pro N valore ſuo $axx-3xyy$ reſtituto, fiet $dY=0$, ex quo naſcitur $Y=0$, vel $Y=$ conſt. Quare aequatio integralis quaeſita habebitur:

$$axxy-y^3x=\text{Conſt.}$$

Exemplum 2.

13. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{y\,dy + x\,dx - 2y\,dx}{(y-x)^2} = 0$$

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, erit:

$$M = \frac{x - 2y}{(y-x)^2} \text{ et } N = \frac{y}{(y-x)^2}$$

Iam vt pateat, num haec aequatio in caſu problematis contineatur, quaerantur valores differentiales:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{-2y}{(y-x)^3} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3}$$

qui cum ſint aequales, negotium ſuccedet. Quare ſecundum regulam colligatur, ſumto y conſtante, integrale:

$$\int M\,dx = \int \frac{x\,dx - 2y\,dx}{(y-x)^2} = -\int \frac{dx}{y-x} - \int \frac{y\,dx}{(y-x)^2}$$

ac reperietur:

$$\int M\,dx = l(y-x) - \frac{y}{y-x} + Y$$

cuius differentiale, ſumto x conſtante, producere debet alteram aequationis propoſitae partem $N\,dy$; vnde habebitur:

$$N\,dy = \frac{dy}{y-x} + \frac{x\,dy}{(y-x)^2} + dY = \frac{y\,dy}{(y-x)^2} + dY.$$

Cum igitur ſit $N\,dy = \frac{y\,dy}{(y-x)^2}$ et $dY = 0$, et $Y = 0$, conſtantem enim in Y negligere licet, quia iam in aequationem integralem introducitur, quippe quae erit:

$$l(y-x) - \frac{y}{y-x} = \text{Conſt.}$$

Exemplum 3.

14. *Integrare hanc aequationem differentialem:*

$$\frac{dx}{x} + \frac{yy\,dx}{x^3} - \frac{y\,dy}{xx} + \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} = 0$$

Com-

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx + N\,dy = 0$, habebimus:

$$M = \frac{xx + yy + y\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} \text{ et } N = \frac{-y - \sqrt{(xx+yy)}}{xx}$$

vnde pro criterio explorando quaeratur:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} + \frac{yy}{x^3\sqrt{(xx+yy)}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{2\sqrt{(xx+yy)}}{x^3} - \frac{x}{xx\sqrt{(xx+yy)}}$$

qui valores reducti cum fiant aequales, ſcilicet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{xx+2yy}{x^3\sqrt{(xx+yy)}}$$

reſolutio erit in poteſtate. Inueſtigetur ergo, ſumto y conſtante:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} + y\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{(xx+yy)}.$$

At per regulas integrandi, formulas vnicam variabilem inuoluentes, quia hic y pro conſtante habetur, reperitur:

$$\int\frac{y\,dx}{x^3}\sqrt{(xx+yy)} = \frac{-y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \tfrac{1}{2}l\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y}$$

ita vt ſit:

$$\int M\,dx = lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \tfrac{1}{2}l\frac{\sqrt{(xx+yy)}-y}{y} + Y$$

At huius quantitatis differentiale, aſſumto x pro conſtante, quia praebere debet $N\,dy = -\frac{y\,dy - dy\sqrt{(xx+yy)}}{xx}$, nanciſcemur:

$$N\,dy = \frac{-y\,dy}{xx} - \frac{dy\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} - \frac{yy\,dy}{2xx\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{dy}{2y} - \frac{dy}{2\sqrt{(xx+yy)}} + dY$$

qua forma cum illa comparata fiet:

$$dY = -\frac{dy\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \frac{yy\,dy}{2xx\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{dy}{2y} + \frac{dy}{2\sqrt{(xx+yy)}}$$

vbi termini, qui adhuc continent x, ſponte ſe deſtruunt, ita vt ſit $dY = \frac{dy}{2y}$ et $Y = \tfrac{1}{2}ly$. Quo valore pro Y inuento, obtinebitur aequatio integralis quaeſita:

$$lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{(xx+yy)}}{2xx} + \tfrac{1}{2}l(\sqrt{(xx+yy)} - y) = \text{Conſt.}$$

Scholion 2.

15. Ex his exemplis ſatis perſpicitur, quemadmodum perpetuo operatio praeſcripta ſit inſtituenda, ita vt hinc nulla amplius difficultas moleſtiam faceſſat, niſi quae ex integratione formularum, vnicam variabilem inuoluentium, quandoque relinquitur, dum integratio neque algebraice abſolui, neque ad circuli hyperbolaeue quadraturam reduci patitur. Verum tum ſuperiores quadraturas ſimili modo tractari oportet, et ſi quae difficultates relinquantur, eae non huic methodo ſunt adſcribendae. Quam ob rem hic aſſumere licet, quoties aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$ ita fuerit comparata, vt in ea ſit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, toties integrationem eſſe in noſtra poteſtate; vnde ad eas aequationes pergo, in quibus hoc criterium non habet locum.

Theorema.

16. Si in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ non fuerit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, ſemper datur multiplicator, per quem formula $Mdx + Ndy$ multiplicata fiat integrabilis.

Demonſtratio.

Cum non ſit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, etiam formula $Mdx + Ndy$ non erit integrabilis, ſeu nulla exiſtit functio ipſarum x et y, cuius differentiale ſit $Mdx + Ndy$. Verum hic non tam formulae $Mdx + Ndy$, quam aequationis $Mdx + Ndy = 0$, quaeritur integrale; et cum eadem aequatio ſubſiſtat, ſi per functionem quam-

quamcunque L ipſarum x et y multiplicetur, ita vt ſit $LMdx + LNdy = 0$, demonſtrandum eſt, ſemper eiusmodi dari functionem L, vt formula $LMdx + LNdy$ fiat integrabilis. Quo enim hoc eueniat, neceſſe eſt, vt ſit:

$$\left(\frac{d.LM}{dy}\right) = \left(\frac{d.LN}{dx}\right)$$

vel ſi ponatur $dL = Pdx + Qdy$, cum ſit $\left(\frac{dL}{dy}\right) = Q$, et $\left(\frac{dL}{dx}\right) = P$, functio L ita debet eſſe comparata, vt ſit:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP.$$

Euidens autem eſt, hanc conditionem ſufficere ad definiendam functionem L, per quam ſi formula $Mdx + Ndy$ multiplicetur, fiat integrabilis.

Coroll. 1.

17. Inuento ergo tali multiplicatore L, qui reddat formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem, aequatio $Mdx + Ndy = 0$, in formam $LMdx + LNdy = 0$ translata, integrari poterit methodo in problemate praecedente expoſita.

Coroll. 2.

18. Quaeratur ſcilicet, ſpectata y tanquam conſtante, integrale $\int LMdx$, ad quod adiiciatur talis functio Y ipſius y, vt ſi aggregatum $\int LMdx + Y$ denuo differentietur, ſpectata iam x vt conſtante, prodeat $LNdy$. Quo facto erit aequatio integralis $\int LMdx + Y = Const.$

Coroll. 3.

19. Multiplicator igitur L ita debet eſſe comparatus, vt poſito $dL = Pdx + Qdy$, ſatisfiat huic aequationi:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP$$

vel huic:

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

vnde manifeſtum eſt, ſi eſſet $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, pro L ſumi poſſe vnitatem, vel quantitatem conſtantem quamcunque, dum ſit $P = 0$, et $Q = 0$.

Scholion.

20. Si ergo hinc in genere multiplicator L inveniri poſſet, haberetur vniuerſalis reſolutio omnium aequationum differentialium primi gradus; id quod ne ſperare quidem licet. Contentos ergo nos eſſe oportet, ſi pro variis caſibus, pluribusque aequationum differentialium generibus, huiusmodi factores inueſtigare valeamus. Sunt autem duo aequationum genera, pro quibus tales factores commode erui poſſunt, quorum alterum eas comprehendit aequationes, in quibus altera variabilis nusquam vltra vnam dimenſionem exſurgit; alterum vero genus eſt aequationum homogenearum. Praeter haec vero duo genera plures alii exiſtunt caſus, quibus inuentio talis factoris abſolui poteſt, quos diligentius examinaſſe, vſu non carebit, cum haec ſola via patere videatur ad eam Analyſeos partem, quae adhuc deſideratur, excolendam ac perficiendam. Quam ob

ob rem hic conſtitui, plura aequationum genera colligere, quae per huiusmodi multiplicatorem ad integrabilitatem perduci poſſunt.

Problema 2.

21. Cognito vno multiplicatore L, qui formulam $M dx + N dy$ integrabilem reddit, inuenire infinitos alios multiplicatores, qui idem officium praeſtent.

Solutio.

Cum formula $L(M dx + N dy)$ per hypotheſin ſit integrabilis, ſit eius integrale $= z$, ita vt ſit $dz = L(M dx + N dy)$, exiſtente z quapiam functione ipſarum x et y. Denotet iam Z functionem quamcunque ipſius z, et quia formula $Z dz$ eſt etiam integrabilis, ob $Z dz = LZ(M dx + N dy)$, manifeſtum eſt formulam propoſitam $M dx + N dy$ quoque fieri integrabilem, ſi per LZ multiplicetur. Dato ergo vno multiplicatore L, qui formulam $M dx + N dy$ integrabilem reddat, ex eo innumerabiles alii factores LZ inueniri poſſunt, qui idem ſint praeſtituri, ſumendo pro Z functionem quamcunque integralis $\int L(M dx + N dy)$.

Coroll. 1.

22. Propoſita igitur formula differentiali quacunque $M dx + N dy$, non ſolum vnus, ſed etiam infiniti dantur multiplicatores, qui eam integrabilem reddant. Quorum autem vnum inueniſſe ſufficit, cum reliqui omnes per hunc determinentur.

Coroll.

Coroll. 2.

23. Si ergo habeatur aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, ea infinitis modis ad integrabilitatem perduci poteſt. Siue autem capiatur multiplicator L, ſiue alius quicunque LZ, aequatio integralis inuenta eodem redit; ſiquidem ille factor L praebet $z =$ Conſt. hic vero $\int Z dz =$ Conſt. id quod conuenit cum $\int Z dz$ et ſit functio ipſius z.

Exemplum 1.

24. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam* $\alpha y dx + \beta x dy$ *integrabilem.*

Vnus multiplicator hoc praeſtans in promtu eſt, ſcilicet $\frac{1}{xy}$. Sit ergo $L = \frac{1}{xy}$, fiatque $dz = \frac{\alpha y dx + \beta x dy}{xy} = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, vnde integrando prodit $z = \alpha lx + \beta ly = lx^{\alpha} y^{\beta}$. Denotet iam Z functionem quamcunque ipſius $z = lx^{\alpha} y^{\beta}$, hoc eſt ipſius $x^{\alpha} y^{\beta}$, atque omnes multiplicatores quaeſiti in hac forma generali $\frac{1}{xy}$ funct. $x^{\alpha} y^{\beta}$ continebuntur.

Simpliciores ergo multiplicatores reperientur, ſi loco functionis poteſtas quaecunque ipſius $x^{\alpha} y^{\beta}$ capiatur; ſicque formula $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabilis redditur per hunc multiplicatorem latius patentem $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$. Si magis compoſiti deſiderentur, plures huiusmodi vtcunque inter ſe combinari poterunt, vt habeatur $A x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1} + B x^{\alpha m - 1} y^{\beta m - 1}$ etc.

Exem-

Exemplum 2.

25. *Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam differentialem* $\alpha x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\beta x^{\mu}y^{\nu-1}dy$ *integrabilem.*

Hic iterum ſtatim ſe offert vnus multiplicator $L=\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}}$, qui praebet $dz=\frac{\alpha dx}{x}+\frac{\beta dy}{y}$, vnde fit $z=\alpha lx-\beta ly=lx^{\alpha}y^{\beta}$. Poſito igitur Z pro functione quacunque ipſius $x^{\alpha}y^{\beta}$, omnes multiplicatores continebuntur in hac expreſſione generali $\frac{Z}{x^{\mu}y^{\nu}}=\frac{1}{x^{\mu}y^{\nu}}$ funct. $x^{\alpha}y^{\beta}$. Si loco iſtius functionis ſumatur poteſtas quaecunque $x^{\alpha n}y^{\beta n}$, innumeri hinc obtinebuntur multiplicatores, vnico termino conſtantes $x^{\alpha n-\mu}y^{\beta n-\nu}$, ſumendo pro n numeros quoscunque.

Scholion.

26. Fieri igitur poteſt, vt duae pluresue huiusmodi formulae differentiales $\alpha x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\beta x^{\mu}y^{\nu-1}dy$ communem recipiant multiplicatorem: quod ſi eueniat aequatio differentialis, ex huiusmodi formulis, tanquam membris, compoſita, integrabilis reddi poterit, dum multiplicator iſte communis adhibetur. Quem caſum iam olim tractatum euoluamus.

Problema 3.

27. Propoſita ſit iſta aequatio differentialis:

$$\alpha y dx+\beta x dy+\gamma x^{\mu-1}y^{\nu}dx+\delta x^{\mu}y^{\nu-1}dy=0$$

cuius integralem inueniri oporteat.

 Solutio.

Solutio.

Ad multiplicatorem idoneum inueniendum, quo haec aequatio reddatur integrabilis, conſideretur vtrumque membrum ſeorſim. Ac prius quidem membrum $\alpha y dx + \beta x dy$ vidimus integrabile reddi hoc multiplicatore $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$, poſterius vero membrum $\gamma x^{\mu - 1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu - 1} dy$ hoc $x^{\gamma m - \mu} y^{\delta n - \nu}$. Quia nunc pro n et m numeros quoscunque accipere licet, hi duo factores ad aequalitatem reduci poterunt; vnde fit

$$\alpha n - 1 = \gamma m - \mu \text{ et } \beta n - 1 = \delta m - \nu$$

ideoque $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, hincque obtinetur:

$$m = \frac{\alpha \nu - \beta \mu - \alpha + \beta}{\alpha \delta - \beta \gamma} \text{ et } n = \frac{\gamma \nu - \delta \mu - \gamma + \delta}{\alpha \delta - \beta \gamma}$$

His valoribus pro m et n inuentis, iſte multiplicator communis dabit hanc aequationem integralem:

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 1.

28. Haec ergo aequatio integralis ſemper eſt algebraica, ſiquidem pro m et n valores veri reperiantur. Ii igitur tantum caſus ſingulari reductione indigent, quibus numeri m et n vel in infinitum abeunt, vel euaneſcunt.

Coroll. 2.

29. Infiniti autem euadunt ambo numeri m et n, ſi fuerit $\alpha \delta = \beta \gamma$. Verum hoc caſu ipſa aequatio differentialis in duos factores reſoluitur, hancque formam acquirit

$$(\alpha y dx + \beta x dy)(1 + \tfrac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1}) = 0$$

ideoque

ideoque erit vel $\alpha y dx + \beta x dy = 0$, vel $1 + \frac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1} = 0$, quarum reſolutionum neutra difficultate laborat.

Coroll. 3.

30. At ſi fiat $n = 0$, ſeu $\gamma(\nu - 1) = \delta(\mu - 1)$, conſideretur numerus n, vt valde paruus, et cum ſit per ſeriem conuergentem

$$x^{\alpha n} = 1 + \alpha n lx + \frac{1}{2}\alpha^2 n^2 (lx)^2 + \text{etc. et } y^{\beta n} = 1 + \beta n ly + \frac{1}{2}\beta^2 n^2 (ly)^2 + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} = \frac{1}{n} + \alpha lx + \beta ly = lx^\alpha y^\beta$$

prima parte $\frac{1}{n}$ in conſtantem inuoluta. Hoc ergo caſu erit aequatio integralis:

$$lx^\alpha y^\beta + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 4.

31. Statuatur ergo pro hoc caſu $\mu = \gamma k + 1$ et $\nu = \delta k + 1$, vt habeatur iſta aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\gamma k} y^{\delta k + 1} dx + \delta x^{\gamma k + 1} y^{\delta k} dy = 0$$

et cum ſit $m = \frac{\alpha \delta k - \beta \gamma k}{\alpha \delta - \beta \gamma} = k$, erit aequatio integralis.

$$lx^\alpha y^\beta + \frac{1}{k} x^{\gamma k} y^{\delta k} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 5.

32. Simili modo ſi fuerit $m = 0$, ſeu $\alpha(\nu - 1) = \beta(\mu - 1)$ ob $\frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = lx^\gamma y^\delta$, ſi ponatur $\mu = \alpha k + 1$ et $\nu = \beta k + 1$, vnde fit $n = \frac{\gamma \beta k - \delta \alpha k}{\alpha \delta - \beta \gamma} = -k$; erit huius aequationis

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\alpha k} y^{\beta k + 1} dx + \delta x^{\alpha k + 1} y^{\beta k} dy = 0$$

 inte-

integralis:

$$-\frac{1}{k}x^{-\alpha k}y^{-\beta k}+lx^{\gamma}y^{\delta}=\text{Conſt.}$$

Scholion.

33. Neque vero huiusmodi reſolutio in membra, quae per eundem multiplicatorem reddantur integrabilia, ad omnis generis aequationes patet. Euenire enim vtique poteſt, vt tota aequatio per quampiam quantitatem multiplicata integrabilis euadat, cum tamen nulla eius pars inde ſeorſim integrabilis exiſtat, ex quo huic tractationi, qua hic ſum vſus, non nimis tribui oportet.

Problema 4.

34. Si propoſita ſit aequatio differentialis

$$P\,dx+Q\,y\,dx+R\,dy=0$$

vbi P, Q et R denotant functiones quaſcunque ipſius x, ita vt altera variabilis y plus vna dimenſione non habeat, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Comparata hac aequatione cum forma $M\,dx+N\,dy=0$ erit $M=P+Qy$ et $N=R$, vnde fiet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right)=Q \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right)=\frac{dR}{dx}.$$

Statuatur iam L pro multiplicatore quaeſito, ſitque $dL=p\,dx+q\,dy$, atque huic aequationi ſatisfieri oportet

$$\frac{Np-Mq}{L}=Q-\frac{dR}{dx}=\frac{Rp-(P+Qy)q}{L}$$

Cum

Cum iam ſit $Q-\frac{dR}{dx}$ functio ipſius x tantum, pro L quoque functio ipſius x tantum accipi poterit, ita vt ſit $q=0$, et $dL=pdx$; vnde erit:

$$Q-\frac{dR}{dx}=\frac{Rp}{L}, \text{ ſeu } Qdx-dR=\frac{RdL}{L}$$

ideoque $\frac{dL}{L}=\frac{Qdx}{R}-\frac{dR}{R}$. Quare integrando habebitur $lL=\int\frac{Qdx}{R}-lR$, et ſumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, prodit

$$L=\frac{1}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}$$

Inuento autem hoc multiplicatore erit aequatio integralis:

$$\int\frac{Pdx}{R}e^{\int\frac{Qdx}{R}}+ye^{\int\frac{Qdx}{R}}=\text{Conſt.}$$

Coroll. 1.

35. Si aequatio habeat formam propoſitam, ea, antequam hoc modo tractetur, diuidi poterit per R, vt hanc formam induat $Pdx+Qydx+dy=0$, ſeu ſtatim aſſumere licet $R=1$, quo facto multiplicator erit $e^{\int Qdx}$, et aequatio integralis $\int e^{\int Qdx}Pdx+e^{\int Qdx}y=\text{Conſt.}$

Coroll. 2.

36. Si ponatur hoc integrale $\int e^{\int Qdx}Pdx+e^{\int Qdx}y=z$, ita vt z ſit functio quaepiam ambarum variabilium, tum vero Z denotet functionem quamcunque ipſius z; omnes multiplicatores, qui formulam $Pdx+Qydx+dy$ reddunt integrabilem, in hac forma generali $e^{\int Qdx}Z$ continentur.

Problema 5.

37. Si propoſita ſit aequatio differentialis:

$$Py^n dx + Qy dx + R dy = 0,$$

vbi P, Q et R denotent functiones quascunque ipſius x, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Erit ergo $M = Py^n + Qy$, et $N = R$, hincque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = nPy^{n-1} + Q, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}$$

Quare poſito multiplicatore quaeſito L et $dL = pdx + qdy$, erit ex ante inuentis:

$$\frac{Rp - Py^n q - Qyq}{L} = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}.$$

Fingatur $L = Sy^m$, exiſtente S functione ipſius x tantum, erit $p = \frac{y^m dS}{dx}$, et $q = mSy^{m-1}$, quibus valoribus ſubſtitutis, prodibit:

$$\frac{RdS}{Sdx} - mPy^{n-1} - mQ = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}$$

Quae aequatio vt ſubſiſtere poſſit, ſumi debet $m = -n$, ac fiet

$$\frac{RdS}{Sdx} = (1-n)Q - \frac{dR}{dx}, \text{ ſeu } \frac{dS}{S} = \frac{(1-n)Qdx}{R} - \frac{dR}{R}$$

Vnde cum integrando proueniat $S = \frac{1}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}$, erit, ob $m = -n$, multiplicator quaeſitus:

$$L = \frac{y^{-n}}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}}.$$

et aequatio integralis erit

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} + \int \frac{Pdx}{R} e^{(1-n)\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 1.

Coroll. 1.

38. Si $n = 0$, habemus caſum ante tractatum aequationis $P dx + Q y dx + R dy = 0$, quae per multiplicatorem $\frac{1}{R} e^{\int \frac{Q dx}{R}}$ integrabilis redditur; et cuius aequatio integralis eſt

$$y e^{\int \frac{Q dx}{R}} + \int \frac{P dx}{R} e^{\int \frac{Q dx}{R}} = \text{Conſt.}$$

Coroll. 2.

39. At ſit $n = 1$, vt aequatio differentialis ſit:

$$P y dx + Q y dx + R dy = 0$$

multiplicator, ob $1 - n = 0$, erit $\frac{1}{R y}$; quo aequatio reducitur ad hanc formam $\frac{P dx + Q dx}{R} + \frac{dy}{y} = 0$, cuius integralis manifeſto eſt $\int \frac{(P + Q) dx}{R} + ly = \text{Conſt.}$

Scholion.

40. Caeterum hoc problema ex antecedente facile deducitur. Diuidatur enim aequatio differentialis propoſita per y^n, et habebitur:

$$P dx + Q y^{1-n} dx + R y^{-n} dy = 0$$

Ponatur $y^{1-n} = z$, erit $(1-n) y^{-n} dy = dz$, ſicque aequatio tranſit in hanc:

$$P dx + Q z dx + \frac{1}{1-n} R dz = 0$$

quae cum aequatione problematis praecedentis conuenit. Cum igitur hae duae aequationes referendae ſint ad caſum, quo altera variabilis nusquam vltra vnam dimenſionem aſcendit, hunc methodo hac per multiplicato-

res

res expediuimus. Pergo itaque ad alterum genus aequationum differentialium homogenearum, quas etiam hac methodo tractari poſſe conſtat. Ad hoc autem lemma, quo natura functionum homogenearum continetur, praemitti neceſſe eſt, ſi quidem operationem ex primis principiis petere velimus.

Lemma.

41. Si V fuerit functio homogenea, in qua binae variabiles x et y vbique n dimenſiones conſtituant, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ ita erit comparatum, vt ſit $Px + Qy = nV$.

Demonſtratio.

Ponatur $y = xz$, et functio V induet huiusmodi formam $x^n Z$, exiſtente Z quapiam functione ipſius z tantum. Hinc ergo erit $dV = nx^{n-1} Z dx + x^n dZ$. Ad has duas variabiles x et z etiam differentiale propoſitum $dV = Pdx + Qdy$ reducatur, et cum ſit $dy = zdx + xdz$, erit

$$dV = (P + Qz)dx + Qxdz$$

neceſſe igitur eſt, vt ſit $nx^{n-1}Z = P + Qz$, et per x vtrinque multiplicando: $nx^n Z = nV = Px + Qxz = Px + Qy$: ita vt ſit $R + Qy = nV$.

Coroll. 1.

42. Quia ergo habemus duas aequationes:

$dV = Pdx + Qdy$, et $nV = Px + Qy$

hinc

hinc ambae functiones P et Q definiri poterunt; reperietur enim:

$$P = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } Q = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}.$$

Coroll. 2.

43. Quoties ergo V eſt functio homogenea n dimenſionum, toties ob $P = \left(\frac{dV}{dx}\right)$ et $Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$ erit

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{y\,dV - nV\,dy}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } \left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{nV\,dx - x\,dV}{y\,dx - x\,dy}$$

vbi notandum eſt, in his fractionibus differentialia ſe mutuo tollere, ſeu vtrumque numeratorem fore per $y\,dx - x\,dy$ diuiſibilem.

Problema 6.

44. Propoſita aequatione differentiali $M\,dx + N\,dy = 0$, in qua M et N ſint functiones homogeneae ipſarum x et y eiusdem ambae dimenſionum numeri, inuenire multiplicatorem, qui eam aequationem reddat integrabilem.

Solutio.

Sit n numerus dimenſionum, vtrique functioni M et N conueniens, eritque per §. praec.

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{nM\,dx - x\,dM}{y\,dx - x\,dy} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{y\,dN - nN\,dy}{y\,dx - x\,dy}$$

ideoque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{n(M\,dx + N\,dy) - x\,dM - y\,dN}{y\,dx - x\,dy}.$$

Iam facile colligere licet, dari multiplicatorem, qui etiam ſit functio homogenea ipſarum x et y. Sit ergo L talis

functio homogenea m dimenſionum. Quare ſi in §. 19 ponatur $dL = Pdx + Qdy$, erit (42.)

$$P = \frac{ydL - mLdy}{ydx - xdy} \text{ et } Q = \frac{mLdx - xdL}{ydx - xdy}$$

hincque, cum eſſe oporteat per §. 19.

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

obtinebitur vtrinque per $ydx - xdy$ multiplicando:

$$\frac{NydL - mLNdy - mLMdx + MxdL}{L} = n(Mdx + Ndy) - xdM - ydN$$

vnde elicitur:

$$\frac{dL}{L} = \frac{(m+n)(Mdx + Ndy) - xdM - ydN}{Mx + Ny}$$

quae formula manifeſto fit integrabilis poſito $m + n = -1$, quo facto erit $lL = -l(Mx + Ny)$. Quam ob rem multiplicator quaeſitus habebitur $L = \frac{1}{Mx + Ny}$.

Coroll. 1.

45. Propoſita igitur aequatione differentiali homogenea $Mdx + Ndy = 0$, ea facillime ad integrabilitatem reducetur, propterea quod formula $\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny}$ eſt integrabilis, cuius integrale, per methodum ſupra traditam inuentum, dabit aequationem integralem quaeſitam.

Coroll. 2.

46. Eo caſu tantum incommodum oritur, vbi ſit $Mx + Ny = 0$, veluti euenit in aequatione $ydx - xdy = 0$, quae diuidi deberet per $xy - xy = 0xy$. Sed quia huius diuiſoris multiplum quodcunque aeque ſatisfacit, diuiſor xy negotium conficiet, quemadmodum per ſe eſt perſpicuum.

Scholion.

Scholion.

47. Notiſſima eſt methodus, qua ſagaciſſimus *Ioh. Bernoullius* olim omnes aequationes differentiales homogeneas ad ſeparabilitatem variabilium perducere docuit. Propoſita ſcilicet huiusmodi aequatione $Mdx + Ndy = 0$, in qua M et N ſint functiones homogeneae n dimenſionum, ponere iubet $y = ux$, quo facto functiones M et N huiusmodi formas induent, vt ſit $M = x^n U$, et $N = x^n V$, exiſtentibus U et V functionibus ipſius u tantum. Aequatio ergo propoſita per x^n diuiſa abibit in hanc: $Udx + Vdy = 0$. Cum autem ſit $dy = udx + xdu$, habebimus $Udx + Vudx + Vxdu = 0$, quae per $x(U + Vu)$ diuiſa fit ſeparabilis, ſeu haec forma

$$\frac{(U + Vu)dx + Vxdu}{x(U + Vu)} \text{ integrabilis.}$$

Sit eſt $(U + Vu)dx + Vxdu = \frac{1}{x^n}(Mdx + Ndy)$.

et $x^n(U + Vu) = M + Nu$. Integrabilis ergo erit haec formula:

$$\frac{Mdx + Ndy}{x(M + Nu)} = \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} \text{ ob } ux = y.$$

Expoſitis igitur his duobus aequationum generibus, quae per idoneos multiplicatores integrabiles reddi poſſunt, videamus, ad quaenam alia genera eadem methodus extendi poſſit: ac primo quidem obſeruo, omnes aequationes differentiales, quae aliis methodis integrari poſſunt, etiam hac methodo per idoneum multiplicatorem tractari poſſe, id quod in ſequente problemate clarius explicabitur.

Problema 7.

48. Propoſita aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$, ſi inuenta fuerit eius integralis aequatio completa, aſſignare omnes multiplicationes, qui aequatorem differentialem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequatio integralis completa inuoluat quantitatem conſtantem arbitrariam C, quae in aequatione differentiali non ineſt, vtcunque ea ſit implicata, quaeratur eius valor per reſolutionem aequationis, qui ſit $C = V$, eritque V functio ipſarum x et y, quae inſuper conſtantes aequationis differentialis in ſe complectetur. Tum iſta aequatio $C = V$ differentietur, ſicque prodibit $0 = dV$. Ac iam neceſſe eſt, vt dV diuiſorem habeat ipſam formulam differentialem propoſitam. Sit itaque $dV = L(Mdx + Ndy)$, eritque L multiplicator idoneus, qui aequationem differentialem propoſitam reddit integrabilem. Deinde cum, denotante Z functionem quamcunque ipſius V, ſit etiam formula $ZdV = LZ(Mdx + Ndy)$ integrabilis, expreſſio LZ omnes multiplicatores includet, quibus aequatio differentialis propoſita $Mdx + Ndy = 0$ ſit integrabilis.

Coroll. 1.

49. Quoties ergo aequationis differentialis $Mdx + Ndy = 0$ integrale completum aſſignari poteſt, toties non ſolum vnum, ſed plane omnes multiplicatores definire licet, quibus ea aequatio integrabilis reddatur.

Coroll.

Coroll. 2.

50. Cum ergo aliis methodis plurium aequationum differentialium integralia completa ſint inuenta, hinc methodus hactenus tradita, quae ad duo tantum aequationum genera adhuc eſt applicata, non mediocriter amplificari poterit.

Scholion.

51. Interim tamen, niſi ad ſpecialiſſima exempla deſcendere velimus, aequationes differentiales, quarum integralia completa aſſignare licet, ad exiguum numerum reducuntur. Ac primo quidem occurrunt aequationes differentiales primi gradus in hac forma contentae

$$dx(\alpha + \beta x + \gamma y) + dy(\delta + \varepsilon x + \zeta y) = 0$$

quae quia facile ad homogeneas reuocantur, etiam hac methodo per multiplicatores tractari poterunt. Deinde memoratu digna eſt haec forma $dy + Pydx + Qyydx = Rdx$, cuius ſi conſtet vnus valor ſingularis ſatisfaciens, ex eo integrale completum effici poteſt, ex quo his caſibus multiplicatores idoneos aſſignare licebit. Tertio etiam perpendi merentur caſus huius aequationis $dy + yydx = ax^m dx$, ab inuentore Riccatiana dictae, quibus ea ad ſeparabilitatem reduci poteſt. Denique exiſtunt caſus huius aequationis $ydy + Pydx = Qdx$, qui cum ſint integrabiles, ad multiplicatorum inueſtigationem ſunt accommodati. Hinc noua patefiet via ex data multiplicatorum forma eas aequationes inueniendi, quae per eos fiant integrabiles, vnde fortaſſe haud ſpernenda analyſeos incrementa haurire licebit.

Problema 8.

52. Propoſita aequatione differentiali primi gradus:

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)dx+(\delta+\varepsilon x+\zeta y)dy=0$$

inuenire multiplicatores, qui eam reddant integrabilem.

Solutio.

Reducatur haec aequatio ad homogeneitatem ponendo:

$x=t+f$ et $y=u+g$, vt prodeat

$$(\alpha+\beta f+\gamma g+\beta t+\gamma u)dt+(\delta+\varepsilon f+\zeta g+\varepsilon t+\zeta u)du=0$$

quae poſito $\alpha+\beta f+\gamma g=0$ et $\delta+\varepsilon f+\zeta g=0$, vnde quantitates f et g determinantur, vtique fit homogenea, ſcilicet

$$(\beta t+\gamma u)dt+(\varepsilon t+\zeta u)du=0;$$

ideoque per multiplicatorem $\frac{1}{\beta tt+(\gamma+\varepsilon)tu+\zeta uu}$ integrabilis redditur. Hinc inuentis litteris f et g aequatio propoſita integrabilis euadet, ſi diuidatur per

$$\beta(x-f)^2+(\gamma+\varepsilon)(x-f)(y-g)+\zeta(y-g)^2,$$

ſeu per

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy-(2\beta f+\gamma g+\varepsilon g)x$$
$$-(2\zeta g+\gamma f+\varepsilon f)y+\beta ff+(\gamma+\varepsilon)fg+\zeta gg$$

Cum autem ſit $f=\frac{\alpha\zeta-\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$, et $g=\frac{\beta\delta-\alpha\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$,

prodibit diuiſor quaeſitus:

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy+\frac{\alpha\gamma\delta-\alpha\alpha\zeta+\alpha\delta\varepsilon-\beta\delta\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}$$
$$\frac{-2\alpha\beta\zeta+\beta\gamma\delta-\beta\delta\varepsilon+\alpha\gamma\varepsilon+\alpha\varepsilon\varepsilon}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}x$$
$$\frac{-2\beta\delta\zeta+\alpha\varepsilon\zeta-\alpha\gamma\zeta+\gamma\delta\varepsilon+\gamma\gamma\delta}{\gamma\varepsilon-\beta\zeta}y.$$

In-

Inuento autem vno diuiſore, ſeu multiplicatore, ex eo reperientur facile omnes poſſibiles.

Coroll. 1.

53. Forma ergo diuiſoris, per quem aequatio differentialis

$$(\alpha+\beta x+\gamma y)dx+(\delta+\varepsilon x+\zeta y)dy=0$$

redditur integrabilis, eſt

$$\beta xx+(\gamma+\varepsilon)xy+\zeta yy+Ax+By+C$$

vbi conſtantes A, B, C ſupra ſunt definitae.

Coroll. 2.

54. Cum diuiſor inuentus etiam ſatisfaciat, ſi per $\gamma\varepsilon-\beta\zeta$ multiplicetur, patet, caſu, quo $\beta\zeta=\gamma\varepsilon$, diuiſorem fore

$$(\alpha\varepsilon\varepsilon-\beta\delta\varepsilon+\beta\gamma\delta-\alpha\beta\zeta)x+(\gamma\gamma\delta-\alpha\gamma\zeta$$
$$+\alpha\varepsilon\zeta-\beta\delta\zeta)y+\alpha\gamma\delta-\alpha\alpha\zeta+\alpha\delta\varepsilon-\beta\delta\delta$$

qui poſito $\beta=mf$; $\gamma=nf$; $\varepsilon=mg$; $\zeta=ng$, abit in

$$m(\alpha g-\delta f)(mg-nf)x+n(\alpha g-\delta f)(mg-nf)y$$
$$+(\alpha g-\delta f)(\delta m-\alpha n)$$

Coroll. 3.

55. Quare ſi aequatio propoſita fuerit huiusmodi:

$$(\alpha+f(mx+ny))dx+(\delta+g(mx+ny))dy=0$$

ea redderur integrabilis, ſi diuidatur per

$$(mg-nf)(mx+ny)+\delta m-\alpha n$$

ſiue per $mx+ny+\frac{\delta m-\alpha n}{mg-nf}$. At ſi fuerit $mg-nf=0$, aequatio propoſita iam ipſa eſt integrabilis.

Prob-

Problema 9.

56. Propoſita hac aequatione differentiali:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

vbi P, Q et R ſint functiones ipſius x tantum, ſi conſtet, huic aequationi ſatisfacere $y = v$, exiſtente v functione ipſius x, inuenire multiplicatores, qui iſtam aequationem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequationi ſatisfaciat valor $y = v$, erit

$$dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0;$$

ſi ergo ponatur $y = v + \frac{1}{z}$, habebitur

$$-\frac{dz}{zz} + \frac{Pdx}{z} + \frac{2Qvdx}{z} + \frac{Qdx}{zz} = 0$$

ſiue:

$$dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$$

quae integrabilis redditur per multiplicatorem

$$e^{-\int (P + 2Qv)dx}.$$

Hic ergo multiplicator per zz multiplicatus conueniet aequationi propoſitae. Cum ergo ſit $z = \frac{1}{y - v}$, multiplicator aequationem propoſitam integrabilem reddens erit:

$$\frac{1}{(y-v)^2} e^{-\int (P + 2Qv)dx}$$

Sit breuitatis gratia $e^{-\int (P + 2Qv)dx} = S$. Quia aequationis $dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$ integrale eſt

$$Sz - \int QSdx = \text{Conſt.}$$

omnes multiplicatores quaeſiti continebuntur in hac forma:

$$\frac{S}{(y-v)^2} \text{ funct. } \left(\frac{S}{y-v} - \int QSdx\right)$$

vbi

vbi per hypotheſin v eſt functio cognita ipſius x, ideoque etiam $S = e^{-\int (P + 2Qv)dx}$

Coroll. 1.

57. Multiplicator ergo, qui primum ſe obtulit, eſt $\frac{S}{(y-v)^2}$, tum vero etiam multiplicator erit $\frac{S}{S(y-v)-(y-v)^2 \int QSdx}$ qui etſi continet formulam integralem $\int QSdx$, ſaepe numero illo ſimplicior euadere poteſt.

Coroll. 2.

58. Si enim S eſt quantitas exponentialis, fieri poteſt, vt $\int QSdx$ huiusmodi formam S T induat, exiſtente T functione algebraica, quo caſu multiplicator erit.

$$\frac{1}{y-v-(y-v)^2 T} = \frac{1}{(y-v)(1-Ty+Tv)}$$

ideoque algebraicus, quod in priori forma fieri nequit.

Coroll. 3.

59. Cum his duobus caſibus multiplicator ſit fractio, in cuius ſolum denominatorem variabilis y ingreditur, ibique vltra quadratum non aſcendat, innumerabiles alii huiusmodi multiplicatores exhiberi poſſunt: Sit enim $\int QSdx = V$, et fractionis $\frac{S}{(y-v)^2}$ denominatorem multiplicare licebit per $A + B(\frac{S}{y-v} - V) + C(\frac{S}{y-v} - V)^2$, ſicque erit generalior multiplicatoris forma:

$$\frac{S}{A(y-v)^2 + BS(y-v) - BV(y-v)^2 + CSS - 2CSV(y-v) + CVV(y-v)^2}$$

ſiue:

$$\frac{S}{(A-BV+CVV)y^2 - (2Av - BS - 2BVv + 2CSV + 2CVVv)y + Avv - BSv - BVvv + CSS + 2CSVv + CV^2v^2}.$$

Coroll. 4.

60. Quodſi ergo haec formula $\frac{dy+Pydx+Qyydx+Rdx}{Lyy+My+N}$ fuerit integrabilis, denominator ita debet eſſe comparatus, vt ſit

$$SL=A-BV+CVV,\ SM=S(B-2CV)-2v(A-BV+CVV)$$

et $SN=CSS-Sv(B-2CV)+vv(A-BV+CVV)$ exiſtente $dv+Pvdx+Qvvdx+Rdx=0$, $S=e^{-\int(P+2Qv)dx}$ et $V=\int QSdx$.

Problema 10.

61. Propoſita aequatione differentiali praecedente:

$$dy+Pydx+Qyydx+Rdx=0$$

inuenire functiones L, M et N ipſius x, vt ea per formulam $Lyy+My+N$ diuiſa fiat integrabilis.

Solutio.

Cum igitur integrabilis eſſe debeat haec formula:
$\frac{dy+dx(Py+Qyy+R)}{Lyy+My+N}$
per proprietatem generalem eſſe opportet, poſtquam per $(Lyy+My+N)^2$ multiplicauerimus:

$$-\frac{yydL}{dx}-\frac{ydM}{dx}-\frac{dN}{dx}=\begin{matrix}+QMyy-2RLy+NP\\-PLyy+2QNy-RM\end{matrix}$$

Vnde pro determinatione functionum L, M et N has conſequimur aequationes:

I. $dL=PLdx-QMdx$
II. $dM=2RLdx-2QNdx$
III. $dN=RMdx-PNdx$,

ex

ex quarum prima deducimus:

$$M = \frac{PL}{Q} - \frac{dL}{Q\,dx}$$

et ex ſecunda: $N = \frac{RL}{Q} - \frac{dN}{2Q\,dx}$,

qui valores pro M et N in tertia ſubſtituti, dant:

$$dN = \frac{P\,dM}{2Q} - \frac{R\,dL}{Q},$$

Cum autem ſit, ſumto differentiali dx conſtante,

$$dM = \frac{P\,dL + L\,dP}{Q} - \frac{PL\,dQ}{QQ} - \frac{ddL}{Q\,dx} + \frac{dQ\,dL}{QQ\,dx}, \text{ erit}$$

$$N = \frac{RL}{Q} - \frac{P\,dL}{2QQ\,dx} - \frac{L\,dP}{2QQ\,dx} + \frac{PL\,dQ}{2Q^3\,dx} + \frac{ddL}{2QQ\,dx^2} - \frac{dQ\,dL}{2Q^3\,dx^2}$$

$$\text{et } dN = \frac{PP\,dL}{2QQ} + \frac{PL\,dP}{2QQ} - \frac{PPL\,dQ}{2Q^3} - \frac{P\,ddL}{2QQ\,dx} + \frac{P\,dQ\,dL}{2Q^3\,dx} - \frac{R\,dL}{Q}$$

quod ergo illius differentiali debet aequari; vnde fit:

$$\begin{aligned} 0 = {} & QQ\,d^3L - 3Q\,dQ\,ddL - PPQQ\,dL\,dx^2 - 2QQ\,dP\,dL\,dx \\ & + 3\,dQ^2\,dL + 2PQ\,dQ\,dL\,dx - Q\,dL\,ddQ + 4Q^3R\,dL\,dx^2 \\ & - PQQL\,dP\,dx^2 + PPQL\,dQ\,dx^2 - QQL\,dx\,ddP \\ & + PQL\,dx\,ddQ \\ & + 3QL\,dP\,dQ\,dx - 3PL\,dQ^2\,dx + 2Q^3L\,dR\,dx^2 \\ & - 2Q^2RL\,dQ\,dx^2. \end{aligned}$$

Haec autem aequatio ſi per $\frac{L}{Q^4}$ multiplicetur, integrari poterit, eritque eius integralis

$$\begin{aligned} \text{Conſt.} = {} & \frac{L\,ddL}{QQ} - \frac{L\,dL\,dQ}{Q^3} - \frac{dL^2}{2QQ} - \frac{PPLL\,dx^2}{2QQ} - \frac{LL\,dP\,dx}{QQ} \\ & + \frac{PLL\,dQ\,dx}{Q^3} + \frac{2RLL\,dx^2}{Q} \end{aligned}$$

quae in hanc formam abit:

$$\begin{aligned} 2EQ^3\,dx^2 = {} & 2QL\,ddL - 2L\,dL\,dQ - Q\,dL^2 - PPQLL\,dx^2 \\ & - 2QLL\,dP\,dx + 2PLL\,dQ\,dx + 4QQRLL\,dx^2. \end{aligned}$$

Quodſi ponatur $L = zz$, aequatio induet hanc formam:

$$\begin{aligned} \frac{2EQ^3\,dx^2}{z^3} = {} & 4Q\,ddz - 4\,dQ\,dz - z(PPQ\,dx^2 + 2Q\,dP\,dx \\ & - 2P\,dQ\,dx - 4QQR\,dx^2). \end{aligned}$$

Coroll. 1.

62. Quoties ergo per problema praecedens, valor ipſius L aſſignari poteſt, toties aequatio differentialis tertii ordinis hic inuenta, et ea, ſecundi ordinis, ad quam illam reduxi, generaliter reſolui poterit: quae reſolutio, cum alias foret difficillima, probe eſt notanda.

Coroll. 2.

63. Scilicet ſi v fuerit eiusmodi functio ipſius x, quae loco y poſita, ſatisfaciat aequationi $dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$, capiatur $S = e^{-\int(P + 2Qv)dx}$, ſtatuaturque $V = \int QSdx$, quo facto erit pro noſtra aequatione differentiali tertii ordinis $L = \frac{A - BV + CVV}{S}$, qui valor cum tres conſtantes arbitrarias complectatur, adeo erit eius aequationis differentiale completum.

Coroll. 3.

63. Si ſit $P = 0$, $Q = 1$ et R functio quaecunque ipſius x, aequatio differentialis tertii gradus hanc accipiet formam:

$$0 = d^3L + 4RdLdx^2 + 2LdRdx^2$$

pro cuius ergo differentiali completo inueniendo, quaeratur primo functio ipſius x, quae ſit $= v$, quae ſatisfaciat huic aequationi $dv + vvdx + Rdx = 0$: tum ponatur $V = \int e^{-2\int vdx}dx$, eritque $L = (A - BV + CVV)e^{+2\int vdx}$.

Coroll. 4.

Coroll. 4.

64. Idem ergo integrale ſatisfaciet huic aequationi differentiali ſecundi gradus:

$$E\,dx^2 = 2L\,ddL - dL^2 + 4RLL\,dx^2$$

et, poſito $L = zz$, etiam huic:

$$\frac{E\,dx^2}{z^3} = ddz + Rz\,dx^2$$

pro qua itaque eſt $z = e^{+\int v\,dx}\sqrt{(A - BV + CVV)}$.

Scholion.

65. Omnino animaduerti meretur haec integratio, quippe quae ex aliis principiis vix quidem praeſtari poteſt. Hinc autem adipiſcimur integrationem completam ſequentis aequationis differentio-differentialis ſatis late patentis:

$$ddz + S\,dx\,dz + Tz\,dx^2 = \frac{E\,dx^2}{z^3}e^{-2\int S\,dx}$$

Primo nempe quaeratur valor ipſius v ex hac aequatione differentiali primi gradus:

$$dv + vv\,dx + Sv\,dx + T\,dx = 0$$

quo inuento ponatur breuitatis ergo $V = \int e^{-2\int v\,dx - \int S\,dx}\,dx$ eritque:

$$z = e^{\int v\,dx}\sqrt{(A + BV + CVV)},$$

ſi modo conſtantes arbitrariae A, B, C ita accipiantur, vt ſit $AC - \frac{1}{4}BB = E$, ſicque adhuc duae conſtantes arbitrio noſtro relinquuntur, vti natura integrationis completae poſtulat.

Exemplum 1.

66. *Propoſita ſit haec aequatio differentialis*

$$dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x} = 0\,,$$

cuius multiplicatores, qui eam reddant integrabilem, inveſtigari oporteat.

Erit ergo, Problema 9. huc transferendo, $P = 1$, $Q = 1$ et $R = -\frac{1}{x}$, et quia aequationi ſatisfacit valor $y = \frac{1}{x}$, erit $v = \frac{1}{x}$. Quare fiet $S = e^{-\int(1+\frac{2}{x})dx} = \frac{1}{xx}e^{-x}$ et multiplicator, qui primum ſe offert, habebitur $= e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}$. Hunc autem porro multiplicare licet per functionem quamcunque huius formae $e^{-x}\frac{1}{x(xy-1)} - \int e^{-x}\frac{dx}{xx}$; cum vero haec forma integrari nequeat, alii multiplicatores idonei aſſignari nequeunt. Ob primum ergo integrabilis eſt haec forma:

$$e^{-x}\frac{1}{(xy-1)^2}\left(dy + y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$$

cuius, ſi x capitur conſtans, integrale eſt.

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X$$

quae differentiata, poſito y conſtante, praebet

$$\frac{e^{-x}dx(xxy + 2xy - x - 1)}{xx(xy-1)^2} + dX$$

quod aequari debet alteri membro $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2}\left(y\,dx + yy\,dx - \frac{dx}{x}\right)$

vnde fit $dX = \frac{e^{-x}dx}{xx(xy-1)^2}(xxyy - 2xy + 1) = e^{-x}\frac{dx}{xx}$;

ſicque

ſicque integrale completum noſtrae aequationis eſt

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + \int e^{-x}\frac{dx}{xx} = \text{Conſt.}$$

Exemplum 2.

67. Inuenire multiplicatores idoneos, qui reddant hanc aequationem integrabilem:

$$dy + yy\,dx - \frac{a\,dx}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)^2} = 0.$$

Caſus ſingularis huic aequationi ſatisfaciens eſt

$$y = \frac{k+\gamma x}{\alpha+\beta x+\gamma xx} = v$$

exiſtente $k = \frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta - \alpha\gamma + a)}$.

Cum nunc ſit $P=0$, et $Q=1$, erit

$$S = e^{-\int\frac{2k\,dx+2\gamma x\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

vel poſito breuitatis gratia $\pm\sqrt{(\frac{1}{4}\beta\beta-\alpha\gamma+a)} = \frac{1}{2}n$ erit

$$S = \frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma xx}\, e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$$

et $\int S\,dx = -\frac{1}{n}\, e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}$

Multiplicator ergo primum inuentus eſt

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}} \cdot \frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)^2}$$

qui porro duci poteſt in functionem quamcunque huius quantitatis

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\left(\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}+\frac{1}{n}\right).$$

Ducatur ergo in

$$e^{\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}} \cdot \frac{(\alpha+\beta x-\gamma xx)y-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}$$

ac

ac prodibit multiplicator algebraicus:

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma xx}{((\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x)((\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x)}$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$\frac{1}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)\left(y-\frac{-2\gamma x-\beta-\surd(\beta\beta-4\alpha\gamma+4\alpha)}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)\left(y-\frac{-2\gamma x-\beta+\surd(\beta\beta-4\alpha\gamma+4\alpha)}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)}\right)}$$

Aequationis autem integrale completum eſt

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y+n-k-\gamma x}{(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-k-\gamma x}=\text{Conſt.}$$

exiſtente $n=\surd(\beta\beta-4a\gamma+4a)$ et $k=\frac{\beta+n}{2}$.
Ex quo aequatio integralis completa erit

$$e^{-\int\frac{n\,dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}}\cdot\frac{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)+n-\beta-2\gamma x}{2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-n-\beta-2\gamma x}=\text{Conſt.}$$

cuius indoles eſt manifeſta, dummodo $n=\surd(\beta\beta-4\alpha\gamma+4a)$ ſit numerus realis.

Quodſi autem valor ipſius n ſit imaginarius, puta $n=m\surd-1$, ob $e^{p\surd-1}=\text{coſ.}p+\surd-1\,\text{ſin.}p$, aequatio integralis ita ad realitatem perduci poteſt. Sit $-m\int\frac{dx}{\alpha+\beta x+\gamma xx}=p$, et $2(\alpha+\beta x+\gamma xx)y-\beta-2\gamma x=q$, eritque ea:

$$(\text{coſ.}p+\surd-1\,\text{ſin.}p)\cdot\frac{q+m\surd-1}{q-m\surd-1}=\text{Conſt.}=A+B\surd-1$$

hinc fit:

$$q\,\text{coſ.}p-m\,\text{ſin.}p+(m\,\text{coſ.}p+q\,\text{ſin.}p)\surd-1=Aq+Bm+(Bq-Am)\surd-1$$

aequentur ſeorſim membra realia et imaginaria:

$$q\,\text{coſ}p-m\,\text{ſin.}p=Aq+Bm;\quad m\,\text{coſ}p+q\,\text{ſin.}p=Bq-Am$$

quae duae aequationes congruunt, ſi capiatur $AA+BB=1$.

Sit

Sit itaque conſtans arbitraria $A = \cos.\theta$, vt ſit $B = \sin.\theta$ et caſu, quo $\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)} = m\sqrt{-1}$, aequatio realis erit

$$q\cos.p - m\sin.p = q\cos.\theta + m\sin.\theta \text{ ſeu } q = \frac{m(\sin.p + \sin.\theta)}{\cos.p - \cos.\theta} = m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

Quare aequationis differentialis

$$dy + yydx + \frac{(mm + \beta\beta - 4\alpha\gamma)dx}{4(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

poſito $p = \int \frac{-mdx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$, aequatio integralis completa eſt

$$2(\alpha + \beta x + \gamma xx)y = \beta + 2\gamma y + m\cot.\frac{\theta - p}{2}$$

ſeu $y = \frac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\cot.\frac{\theta - p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$.

Vel ſit $\theta = 180^\circ - \zeta$, et habebitur $y = \frac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m\,\mathrm{tang}.\frac{\zeta + p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$

Hoc autem caſu notandum eſt, integrale ſpeciale, ex quo haec omnia deduximus, fieri imaginarium, quo tamen non obſtante inde integrale completum in forma reali exhibere licuit.

Exemplum 3.

68. *Propoſita aequatione Riccatiana* $dy + yydx - ax^m dx = 0$, *pro caſibus exponentis* m, *quibus eam ſeparare licet, inuenire multiplicatores idoneos.*

Sit $y = v$ valor aequationi ſatisfaciens, et cum ſit $P = 0$, $Q = 1$, et $R = -ax^m$, erit primus multiplicator, aequationem integrabilem reddens,

$$e^{-2\int v dx} \frac{1}{(y - v)^2}$$

per quem ſi aequatio multiplicetur, cum integrale completum ſit

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{1}{y-v}-\int e^{-2\int v\,dx}dx=\text{Conſt.}$$

Quare ſi Z denotet functionem quamcunque huius quantitatis, omnes multiplicatores continebuntur in hac forma:

$$e^{-2\int v\,dx}\frac{Z}{(y-v)^2}$$

Hinc ſi ponatur $\int e^{-2\int v\,dx}dx=V$, omnes multiplicatores in hac forma $\frac{1}{Lyy+My+N}$ contenti obtinebuntur, ſi capiatur:

$$L=e^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$

$$M=B-2CV-2ve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$

$$N=Ce^{-2\int v\,dx}-v(B-2CV)+vve^{2\int v\,dx}(A-BV+CVV)$$

Verum hic valor ipſius L. ſimul eſt integrale completum huius aequationis differentialis tertii gradus:

$$0=d^3L-4ax^m dL\,dx^2-2maLx^{m-1}dx^3$$

hincque etiam huius ſecundi gradus:

$$E\,dx^2=2L\,ddL-dL^2-4aLLx^m dx^2$$

exiſtente $E=4AC-BB$.

Scholion.

69. Re attentius perpenſa aequationem differentialem tertii ordinis etiam methodo directa reſolui, eiusque integrale completum idem, quod hic eſt aſſignatum, elici poſſe deprehendi. Sit enim propoſita haec aequatio:

$$d^3L+4R\,dL\,dx^2+2L\,dR\,dx^2=0$$

vbi

vbi R ſit functio quaecunque ipſius x, ſumto differentiali dx conſtante. Iam quaero functionem ipſius x, per quam iſta aequatio multiplicata euadat integrabilis. Sit S iſta functio, et aequationis

$$S d^3 L + 4 S R d L dx^2 + 2 S L d R dx^2 = 0$$

integrale erit

$$S ddL - dS dL + L(ddS + 4 S R dx^2) = 2 C dx^2$$

dummodo ſit

$$d^3 S + 2 S dR dx^2 + 4 R dS dx^2 = 0.$$

Sufficit ſcilicet quemuis valorem particulariter ſatisfacientem ſumſiſſe. At haec aequatio, per S multiplicata, neglecta conſtante, dat integrale:

$$S ddS - \tfrac{1}{2} dS^2 + 2 SSR dx^2 = 0.$$

Ponatur $S = e^{2\int v dx}$, eritque

$$2 dv + 2 vv dx + 2 R dx = 0$$

vnde negotium huc redit, vt pro v ſaltem valor particularis inueſtigetur, qui ſatisfaciat huic aequationi differentiali primi gradus: $dv + vv dx + R dx = 0$, quem igitur tanquam conceſſum aſſumo. Hinc noſtra aequatio ſemel integrata erit, ob $S = e^{2\int v dx}$,

$$ddL - 2vdxdL + L(2dvdx + 4vvdx^2 + 4Rdx^2) = 2Ce^{-2\int vdx} dx^2$$

Cum igitur, ob $R dx = -dv - vv dx$, habeamus

$$ddL - 2 v dx dL - 2 L dx dv = 2 C e^{-2\int v dx} dx^2$$

eius integrale manifeſto eſt:

$$dL - 2 L v dx = B dx + 2 C dx \int e^{-2\int v dx} dx$$

et per $e^{-2\int v dx}$, denuo multiplicando integrale, prodibit

$$e^{-2\int vdx} L = A + B\int e^{-2\int vdx} dx + 2C\int e^{-2\int vdx} dx \int e^{-2\int vdx} dx$$

 Quare

Quare ſi breuitatis gratia ponatur $\int e^{-2\int v\,dx}dx = V$, habebimus

$$L = e^{2\int v\,dx}(A + BV + CVV)$$

prorſus vti ante inuenimus.

Problema 2.

70. Propoſita aequatione Riccatiana $dy + yydx = ax^m dx$, inuenire eius integralia particularia, caſibus, quibus ea ſeparabilis exiſtit.

Solutio.

Ponendo $a = cc$, et $m = -4n$, tribuatur aequationi iſta forma:

$$dy + yydx - ccx^{-4n}dx = 0.$$

Cum enim quaeſtio circa integralia particularia verſetur, nihil intereſt, vtrum ea ſint realia, nec ne Quo autem facilius, et vna quaſi operatione, hos caſus, quibus y per functionem ipſius x exprimere licet, eliciamus: ſtatuamus $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$, et ſumto dx conſtante, nanciſcemur hanc aequationem differentialem ſecundi gradus:

$$-2ncx^{-2n-1}dx + \frac{ddz}{zdx} + \frac{2cx^{-2n}dz}{z} = 0, \text{ ſeu}$$

$$\frac{ddz}{dx^2} + \frac{2c\,dz}{x^{2n}dx} - \frac{2ncz}{x^{2n+1}} = 0$$

cuius valor fingatur:

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

quo

quo debite ſubſtituto obtinebimus:

$$0 = n(n-1)Ax^{n-2} + (3n-1)(3n-2)Bx^{3n-3} + (5n-2)(5n-3)Cx^{5n-4} + \text{etc.}$$
$$+2ncAx^{-n-1} + 2(3n-1)cB + 2(5n-2)cC + 2(7n-3)cD$$
$$-2ncA - 2ncB - 2ncC - 2ncD$$

vnde coefficientes ficti ita determinantur:

$$2(2n-1)cB + n(n-1)A = 0;\quad B = \frac{-n(n-1)A}{2(2n-1)c}$$
$$2(4n-2)cC + (3n-1)(3n-2)B = 0;\quad C = \frac{-(3n-1)(3n-2)B}{4(2n-1)c}$$
$$2(6n-3)cD + (5n-2)(5n-3)C = 0;\quad D = \frac{-(5n-2)(5n-3)C}{6(2n-1)c}$$

Statim igitur atque vnus coefficiens euaneſcit, ſequentes ſimul omnes euaneſcunt, id quod euenit his caſibus:

$$n = 0;\ n = \tfrac{1}{3};\ n = \tfrac{2}{3};\ n = \tfrac{3}{7};\ \text{etc.}$$
$$n = 1;\ n = \tfrac{2}{3};\ n = \tfrac{3}{5};\ n = \tfrac{4}{7};\ \text{etc.}$$

Denotante igitur i numerum integrum quemcunque, quoties fuerit $n = \frac{2}{2i \pm 1}$, toties reſolutio aequationis exhiberi poteſt. Erit enim $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{zdx}$, exiſtente

$$z = Ax^{n} + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

Proueniet ergo hic valor particularis ipſius y:

$$y = cx^{-2n} + \frac{nAx^{n-1} + (3n-1)Bx^{3n-2} + (5n-2)Cx^{5n-3} + \text{etc.}}{Ax^{n} + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.}}$$

Coroll. 1.

71. Quodſi ergo iſte valor particularis ipſius y vocetur $= v$ erit aequationis propoſitae multiplicator idoneus $= e^{-2\int v dx} \cdot \frac{1}{(y-v)^2}$. Ac ſi ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx = V$,

$= V$, ſumtis $A = o$, et $C = o$, erit alius factor ſimplicior

$$\frac{1}{e^{2\int v dx} V yy - (1 + 2 v e^{2\int v dx} V) y + v + v v e^{2\int v dx} V.}$$

Coroll. 2.

72. At eſt $\int v dx = \frac{-c}{(2n-1)x^{2n-1}} + l(Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.}$

vnde fit $e^{-2\int v dx} = \frac{2c}{e^{(2n-1)x^{2n-1}}} \cdot \frac{1}{(Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.})^2}$

ex quo porro inueniri poteſt valor ipſius $V = \int e^{-2\int v dx} dx$ qui ſi fuerit huiusmodi $e^{-2\int v dx} T$, exiſtente T functione algebraica, erit ſuperior multiplicator algebraicus.

Coroll. 3.

73. Inuento valore v, ſeu integrali particulari aequationis propoſitae, inde ſtatim habebitur integrale completum eiusdem, quippe quod erit:

$$\frac{e^{-2\int v dx}}{y - v} - \int e^{-2\int v dx} dx = \text{Conſt.}$$

Caſus 1. quo $n = o$.

74. Pro hac ergo aequatione $dy + yy dx = cc dx$, ob $B = o$, $C = o$ etc. erit valor particularis $y = c$; Quare

Quare poſito $v=c$, erit $e^{-2\int v\,dx}=e^{-2cx}$ et $V=\int e^{-2\int v\,dx}\,dx=-\frac{1}{2c}e^{-2cx}$; vnde integrale completum eſt

$$\frac{e^{-2cx}}{y-c}+\frac{1}{2c}e^{-2cx}=\text{Conſt.}$$

ſeu

$$\frac{e^{-2cx}(y+c)}{y-c}=\text{Conſt.}$$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx}V=-\frac{1}{2c}$, et $v=c$, erit multiplicator algebraicus:

$$\frac{1}{-\frac{1}{2c}yy+\frac{1}{2}c}$$

qui reducitur ad $\frac{1}{yy-cc}$, vti per ſe eſt perſpicuum.

Caſus 2. quo $n=1$.

75. Pro hac ergo aequatione $dy+yy\,dx=\frac{cc\,dx}{x^4}$ ob $B=0$, $C=0$ etc. erit valor particularis $y=\frac{c}{xx}+\frac{1}{x}$. Quare poſito $v=\frac{c}{xx}+\frac{1}{x}$, erit $e^{-2\int v\,dx}=\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xx}$ et $V=-\frac{1}{2c}e^{\frac{2c}{x}}$. Hinc integrale completum eſt

$$\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xxy-x-c}+\frac{1}{2c}e^{\frac{2c}{x}}=\text{Conſt.}$$

ſeu $e^{\frac{2c}{x}}\cdot\frac{xxy-x+c}{xxy-x-c}=\text{Conſt.}$

Porro, ob $e^{2\int v\,dx}V=-\frac{xx}{2c}$, et $v=\frac{x+c}{xx}$, habebitur multiplicator algebraicus:

$$\frac{1}{xxyy-2xy+1-\frac{cc}{xx}}=\frac{1}{(xy-1)^2-\frac{cc}{xx}}$$

ſiue

ſiue aequatio propoſita $dy+yydx-\frac{ccdx}{x^4}=0$ ſit integrabilis, ſi diuidatur per $(xy-1)^2-\frac{cc}{xx}$.

Caſus 3. quo $n=\frac{1}{3}$.

76. Pro hac ergo aequatione $dy+yydx-ccx^{-\frac{4}{3}}dx=0$ eſt $B=-\frac{A}{3c}$, $C=0$, etc. vnde integrale particulare

$$y=cx^{-\frac{2}{3}}+\frac{cx^{-\frac{2}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}}-1}=\frac{3ccx^{1-\frac{1}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}}-1}=v$$

et $e^{-2\int vdx}=e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}\frac{\text{Conſt.}}{(x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3c})^2}=e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{(3cx^{\frac{1}{3}}-1)^2}$

hincque $V=\int e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}\frac{dx}{(3cx^{\frac{1}{3}}-1)^2}=-e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}\frac{3cx^{\frac{1}{3}}+1}{18c^2(3cx^{\frac{1}{3}}-1)}$

Quare integrale completum eſt

$$\frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}}{(3cx^{\frac{1}{3}}-1)^2y-3ccx^{-\frac{1}{3}}(3cx^{\frac{1}{3}}-1)}+\frac{e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{1}{3}}+1)}{18c^2(3cx^{\frac{1}{3}}-1)}=\text{Conſt.}$$

ſiue $e^{-6cx^{\frac{1}{3}}}\frac{y(1+3cx^{\frac{1}{3}})+3ccx^{-\frac{1}{3}}}{y(1-3c3^{\frac{1}{3}})+3ccx^{-\frac{1}{3}}}=\text{Conſt.}$

Tum, ob $e^{2\int vdx}V=\frac{1-9ccx^{\frac{2}{3}}}{18c^3}$, prodibit diuiſor aequationem integrabilem reddens:

$$(y+3ccx^{-\frac{1}{3}})^2-9ccx^{\frac{2}{3}}yy$$

Caſus

Caſus 4. quo $n = \frac{2}{3}$.

77. Pro hac ergo aequatione $dy + yy\,dx - cc\,x^{-\frac{8}{3}}dx = 0$ eſt $B = + \frac{A}{3c}$, $C = 0$ etc. vnde integrale particulare:

$$y = \frac{c\,x^{-\frac{4}{3}} + 2c\,x^{-\frac{1}{3}} + 1}{3c\,x^{\frac{2}{3}} + x} = \frac{3cc\,x^{-\frac{2}{3}} + 3c\,x^{-\frac{1}{3}} + 1}{3c\,x^{\frac{2}{3}} + x} = v$$

et $e^{-2\int v dx} = e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2}$: ex quo porro elicitur:

$$V = \int \frac{e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}dx}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2} = \frac{-e^{6cx^{-\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{2}{3}} - x)}{18c^3(3cx^{\frac{2}{3}} + x)}.$$

Quare integrale completum erit:

$$e^{6cx^{-\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}}{(x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}} = \text{Conſt.}$$

Tum ob $e^{2\int v dx}V = \frac{xx - 9cc\,x^{\frac{4}{3}}}{18c^4}$. prodit diuiſor algebraicus aequationem propoſitam integrabilem reddens:

$$((x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}})((x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}).$$

Caſus 5. quo $n = \frac{2}{5}$.

78. Pro hac ergo aequatione $dy + yy\,dx - cc\,x^{-\frac{9}{3}}dx = 0$ erit $B = -\frac{3A}{5c}$; $C = -\frac{B}{5c} = +\frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. ideo-

que integrale particulare:

$$y = cx^{-\frac{4}{5}} + \frac{\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5c}x^{-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{5}} - \frac{3}{5c}x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{25cc}} = cx^{-\frac{4}{5}} + \frac{10ccx^{-\frac{3}{5}} - 3cx^{-\frac{4}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3}.$$

ſeu $y = \dfrac{25c^3x^{-\frac{2}{5}} - 5ccx^{-\frac{3}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3} = v$. Vnde integrale completum oritur:

$$e^{-10cx^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}}}{(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}}} = \text{Conſt.}$$

Et ſi huius fractionis ponatur

numerator $(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} + 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = P$, et

denominator $(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{3}{5}} - 25c^3x^{-\frac{2}{5}} = Q$, erit diuiſor aequationem propoſitam integrabilem reddens $= PQ$.

Caſus 6. quo $n = \frac{3}{5}$.

79. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{12}{5}}dx = 0$, erit $B = \frac{3A}{5c}$; et $C = \frac{B}{5c} = \frac{3A}{25cc}$; $D = 0$ etc. hincque integrale particulare prodit:

$$y = cx^{-\frac{6}{5}} + \frac{15ccx^{-\frac{2}{5}} + 12cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} \text{ ſeu}$$

$$y = \frac{25c^3x^{-\frac{6}{5}} + 30ccx^{-\frac{2}{5}} + 15cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{3}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} = v$$

vnde

vnde integrale completum obtinetur:

$$e^{10cx^{-\frac{1}{5}}}\cdot\frac{(3x-15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3+15cx^{-\frac{1}{5}}-30ccx^{-\frac{2}{5}}+25c^{3}x^{-\frac{3}{5}}}{(3x+15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3-15cx^{-\frac{1}{5}}-30ccx^{-\frac{2}{5}}-25c^{3}x^{-\frac{3}{5}}}=\text{Conſt.}$$

Ac neglecto factore exponentiali $e^{10cx^{-\frac{1}{5}}}$, productum ex numeratore et denominatore praebebit diuiſorem, per quem aequatio propoſita diuiſa euadit integrabilis.

Problema 12.

80. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere reſolutionem huius aequationis:

$$dy+yydx-ccx^{\frac{-4i}{2i+1}}dx=0.$$

Solutio.

Cum igitur ſit $n=\frac{i}{2i+1}$, reperietur

$$B=-\frac{(i+1)i}{2(2i+1)c}A$$

$$C=+\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2.4(2i+1)^{2}c^{2}}A$$

$$D=-\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.4.6(2i+1)^{3}c^{3}}A$$

$$E=+\frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(i-1)(i-2)(i-3)}{2.4.6.8(2i+1)^{4}c^{4}}A$$

etc.

tum vero integrale particulare erit:

$$y=cx^{\frac{-2i}{2i+1}}+\frac{\frac{i}{2i+1}Ax^{\frac{-i-1}{2i+1}}+\frac{i-1}{2i+1}Bx^{\frac{-i-2}{2i+1}}+\frac{i-2}{2i+1}Cx^{\frac{-i-3}{2i+1}}+\frac{i-3}{2i+1}Dx^{\frac{-i-4}{2i+1}}+\text{etc.}}{Ax^{\frac{i}{2i+1}}+Bx^{\frac{i-1}{2i+1}}+Cx^{\frac{i-2}{2i+1}}+Dx^{\frac{i-3}{2i+1}}+\text{etc.}}$$

 quod

quod vt ad eundem denominatorem reducatur, ſtatuamus:

$$\mathfrak{A} = c\text{A}$$
$$\mathfrak{B} = -\frac{i(i-1)}{2(2i+1)}\text{A}$$
$$\mathfrak{C} = +\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i+1)^2 c}\text{A}$$
$$\mathfrak{D} = -\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i+1)^3 c^2}\text{A}$$
etc.

vnde fiet:

$$y = \frac{\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}{\mathfrak{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}$$

Ponamus porro breuitatis gratia:

$$\text{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \text{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \text{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \text{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \text{P}$$
$$\text{A}x^{\frac{i}{2i+1}} - \text{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \text{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} - \text{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \text{Q}$$
$$\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$
$$-\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} - \mathfrak{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque integrale completum erit:

$$e^{-2(2i+1)cx^{\frac{+1}{2i+1}}}\,\frac{\text{Q}y - \mathfrak{Q}}{\text{P}y - \mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

Tum vero diuiſor, aequationem propoſitam reddens integrabilem, erit $= (\text{P}y - \mathfrak{P})(\text{Q}y - \mathfrak{Q})$.

Coroll. 1.

81. Quodſi ergo in aequatione $dy + yydx + ax^{\frac{-4i}{2i+1}}dx = 0$ coefficiens a fuerit quantitas negatiua, vt poſito $a =$

$a = -cc$, ſit c quantitas realis, integrale completum hic inuentum formam habet realem, et quouis caſu facile exhiberi poteſt, pariter ac diuiſor, qui aequationem integrabilem reddit.

Coroll. 2.

82. At ſi a fuerit quantitas poſitiua, puta $a = aa$, vt habeatur haec aequatio: $dy + yy\,dx + aa\,x^{\frac{-4i}{2i+1}}dx = 0$, erit $c = a\sqrt{-1}$, et coefficientes B, D, F etc. et $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ etc. fient imaginarii; vnde valores particulares $y = \frac{\mathfrak{P}}{P}$ et $y = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}$ prodibunt imaginarii.

Coroll. 3.

83. Hoc tamen caſu, quo $c = a\sqrt{-1}$ et $cc = -aa$, fient $P+Q$ et $\mathfrak{P}+\mathfrak{Q}$ quantitates reales, at $P-Q$ et $\mathfrak{P}-\mathfrak{Q}$ imaginariae. Quodſi ergo ponatur

$$P+Q = 2R;\quad P-Q = 2S\sqrt{-1};\quad \mathfrak{P}+\mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P}-\mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

erunt R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ quantitates reales, et ob

$$P = R + S\sqrt{-1};\quad Q = R - S\sqrt{-1};\quad \mathfrak{P} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1};$$
$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

fiet diuiſor, reddens aequationem integrabilem,

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}$$

ideoque realis.

Coroll. 4.

84. At eodem caſu $c = a\sqrt{-1}$, ob $e^{-p\sqrt{-1}} = \cos p - \sqrt{-1}\sin p$, erit $e^{-2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}\sqrt{-1}} = \cos. 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} - \sqrt{-1}. \sin. 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$; vnde poſito breuitatis gratia $2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} = p$, erit integrale completum:

$$(\cos. p - \sqrt{-1}\sin. p). \frac{(R - S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1}}{(R + S\sqrt{-1})y - \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}} = \text{Conſt.}$$

quae forma eſt imaginaria.

Coroll. 5.

85. Tribuatur autem conſtanti talis forma: $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et aequatione integrali euoluta, erit:

$$(Ry - \mathfrak{R})\cos. p - (Ry - \mathfrak{R})\sin. p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S})\cos p\sqrt{-1} - (Sy - \mathfrak{S})\sin. p = (Ry - \mathfrak{R})\alpha - (Ry - \mathfrak{R})\beta\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\alpha\sqrt{-1} + (Sy - \mathfrak{S})\beta.$$

Iam aequentur ſeorſim partes reales et imaginariae:

$$(Ry - \mathfrak{R})\cos. p - (Sy - \mathfrak{S})\sin p = \alpha(Ry - \mathfrak{R}) + \beta(Sy - \mathfrak{S})$$
$$(Ry - \mathfrak{R})\sin. p + (Sy - \mathfrak{S})\cos p = \beta(Ry - \mathfrak{R}) - \alpha(Sy - \mathfrak{S})$$

quae duae aequationes conueniunt, ſi modo ſit $\alpha\alpha + \beta\beta = 1$. Sit ergo $\alpha = \cos. \zeta$, et $\beta = \sin. \zeta$, prodibitque ex vtraque

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \frac{\sin. p + \sin. \zeta}{\cos. p - \cos. \zeta} = \cot. \frac{\zeta - p}{2}.$$

Coroll. 6.

Coroll. 6.

86. Sumto ergo pro ζ angulo quocunque, ſi ſit $c = a\sqrt{-1}$, erit integrale completum aequationis propoſitae

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \cot.\frac{\zeta - p}{2}$$

ſeu $y = \dfrac{\mathfrak{R}\,\text{ſin.}\frac{\zeta - p}{2} - \mathfrak{S}\,\text{coſ.}\frac{\zeta - p}{2}}{R\,\text{ſin.}\frac{\zeta - p}{2} - S\,\text{coſ.}\frac{\zeta - p}{2}}$

exiſtente $p = 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$.

Problema 13.

87. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere reſolutionem huius aequationis:

$$dy + yydx - ccx^{\frac{-4i}{2i-1}}dx = 0.$$

Solutio.

Quia eſt $n = \frac{i}{2i-1}$, haec reſolutio deriuari poteſt ex ſolutione praecedentis problematis, ponendo $-i$ loco i. Quare tribuantur litteris B, C, D, etc. ſequentes valores:

$$B = + \frac{i(i-1)}{2(2i-1)c}A$$

$$C = + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2\cdot 4(2i-1)^2c^2}A$$

$$D = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2\cdot 4\cdot 6(2i-1)^3c^3}A$$

etc.

Tum

Tum vero alterarum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. determinatio ita ſe habebit:

$$\mathfrak{A} = c\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{B} = + \frac{(i+1)i}{2(2i-1)}\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{C} = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2.4\,(2i-1)^2 c}\,\mathrm{A}$$
$$\mathfrak{D} = + \frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2.4.6\,(2i-1)^3 c^2}\,\mathrm{A}$$
etc.

Quibus valoribus conſtitutis, ponatur breuitatis gratia:

$$\mathrm{A}x^{\frac{+i}{2i-1}} + \mathrm{B}x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + \mathrm{C}x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + \mathrm{D}x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathrm{P}$$
$$\mathrm{A}x^{\frac{+i}{2i-1}} - \mathrm{B}x^{\frac{+i+1}{2i-1}} + \mathrm{C}x^{\frac{+i+2}{2i-1}} + \mathrm{D}x^{\frac{+i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathrm{Q}$$
$$\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i+1}{2i-1}} + \mathfrak{C}x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$
$$-\mathfrak{A}x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B}x^{\frac{-i-1}{2i-1}} - \mathfrak{C}x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D}x^{\frac{-i+3}{2i-1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque hinc ſtatim habentur duae integrationes particulares:

$$\text{I. } y = \frac{\mathfrak{P}}{\mathrm{P}}, \text{ et II. } y = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathrm{Q}}.$$

Tum vero aequatio integralis completa erit:

$$e^{2(2i-1)c x^{\frac{-1}{2i-1}}}\,\frac{\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q}}{\mathrm{P}y - \mathfrak{P}} = \text{Conſt.}$$

et diuiſor aequationem propoſitam integrabilem reddens, fiet $= (\mathrm{P}y - \mathfrak{P})(\mathrm{Q}y - \mathfrak{Q})$.

Coroll.

Coroll. 1.

88. Quodſi autem aequatio propoſita fuerit huiusmodi:

$$dy + yy\,dx + aax^{\frac{-4i}{2i-1}}dx = 0$$

vt ſit $cc = -aa$, et $c = a\sqrt{-1}$, integrationes particulares exhibitae fient imaginariae, ob $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$, etc. item $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ etc. imaginarias, dum reliquarum litterarum valores ſunt reales.

Coroll. 2.

89. At ſi ponatur:

$$P + Q = 2R;\; P - Q = 2S\sqrt{-1};\; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$
$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

quantitates R, S, $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ nihilo minus ſiunt, vt ante, reales, et diuiſor aequationem reddens integrabilem erit:

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}.$$

Coroll. 3.

90. Tum vero, ſi ponatur breuitatis cauſa $2(2i-1)ax^{\frac{-1}{2i-1}} = p$, aequatio integralis completa erit:

$$\frac{Ry - \mathfrak{R}}{Sy - \mathfrak{S}} = \cot.\frac{\zeta + p}{2}$$

vnde elicitur:

$$y = \frac{\mathfrak{R}\sin.\frac{\zeta+p}{2} - \mathfrak{S}\cos.\frac{\zeta+p}{2}}{R\sin.\frac{\zeta+p}{2} - S.\cos.\frac{\zeta+p}{2}}$$

vbi angulus ζ vicem gerit conſtantis arbitrariae.

 Scholion.

Scholion.

91. Solutiones horum duorum poſtremorum problematum non tam per accuratam analyſin ſunt euolutae, quam per inductionem ex caſibus particularibus ſupra expeditis deriuatae, quandoquidem progreſſio ab his caſibus ad ſequentes ſatis erat manifeſta. Fundamentum autem harum ſolutionum in hoc potiſſimum eſt ſitum, quod ſolutio particularis, vnde omnia ſunt deducta, re vera eſt geminata, cum quantitas c, cuius quadratum tantum in aequatione differentiali occurrit, aeque negatiue, ac poſitiue, accipi poſſit. Quoties autem huiusmodi aequationum binae ſolutiones particulares ſunt cognitae, ex iis multo facilius ſolutio generalis, indeque multiplicatores, eas integrabiles reddentes, erui poſſunt, id quod operae pretium erit clarius expoſuiſſe.

Problema 14.

92. Datis duabus ſolutionibus particularibus huiusmodi aequationis:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire eius ſolutionem generalem, et multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat.

Solutio.

Sint M et N huiusmodi functiones ipſius x, quae loco y ſubſtitutae, ambae aequationi propoſitae ſatisfaciant, ita vt ſit:

$$dM + PMdx + QM^2dx + Rdx = 0$$

$$\text{et} \quad dN + PNdx + QN^2dx + Rdx = 0.$$

Ponatur

Ponatur $\frac{y-M}{y-N}=z$, ſeu $y=\frac{M-Nz}{1-z}$, erit

$$dy=\frac{dM-zdM+Mdz-Ndz-zdN+zzdN}{(1-z)^2}$$

quibus valoribus in aequatione propoſita ſubſtitutis, et tota aequatione per $(1-z)^2$ multiplicata, prodibit:

$$(1-z)dM-z(1-z)dN+(M-N)dz+P(1-z)Mdx-P(1-z)Nzdx$$
$$+QMMdx-2QMNzdx+QNNzzdx+R(1-z)^2dx=0.$$

Iam pro dM et dN ſubſtituantur valores ex binis ſuperioribus aequationibus differentialibus oriundi:

$$-P(1-z)Mdx-Q(1-z)M^2dx-R(1-z)dx$$
$$+Pz(1-z)Ndx+Qz(1-z)N^2dx+Rz(1-z)dx+(M-N)dz=0$$
$$+P(1-z)Mdx+QM^2dx\quad+R(1-z)^2dx$$
$$-Pz(1-z)Ndx-2QMNzdx$$
$$+QN^2zzdx$$

qua aequatione in ordinem redacta, orietur:

$$QzM^2dx+QzN^2dx-2QMNzdx+(M-N)dz=0$$

ſeu $Q(M-N)dx+\frac{dz}{z}=0$, ita vt ſit:

$$z=Ce^{-\int Q(M-N)dx}$$

vnde aequatio integrata generalis erit:

$$e^{\int Q(M-N)dx}\frac{y-M}{y-N}=\text{Conſt.}$$

Pro multiplicatore autem inueniendo, notetur, aequationem propoſitam, facta ſubſtitutione primum per $(1-z)^2$, eſſe multiplicatam, tum vero diuiſam per $z(M-N)$, euaſiſſe integrabilem. Statim ergo per $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$ multiplicata fiet integrabilis: ex quo factor erit $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$, qui ob $z=\frac{y-M}{y-N}$ hanc induet formam:

$$\frac{M-N}{(y-M)(y-N)}.$$

Problema 15.

93. Propoſita aequatione $y\,dy + Py\,dx + Q\,dx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(y+M)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura ergo differentialium eſſe oportet:

$$\frac{1}{dx}\,d.\,y(y+M)^n = \frac{1}{dy}\,d\,(Py+Q)(y+M)^n$$

vnde cum M ſit functio ipſius x tantum, erit

$$ny(y+M)^{n-1}\frac{dM}{dx} = P(y+M)^n + n(Py+Q)(y+M)^{n-1}$$

quae diuiſa per $(y+M)^{n-1}$ abit in hanc;

$$\frac{ny\,dM}{dx} = (n+1)Py + PM + nQ$$

vnde neceſſe eſt ſit:

$$P = \frac{n\,dM}{(n+1)dx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-PM}{n} = -\frac{M\,dM}{(n+1)dx}$$

His igitur valoribus ſubſtitutis aequatio

$$y\,dy + \frac{ny\,dM}{n+1} - \frac{M\,dM}{n+1} = 0$$

fit integrabilis, ſi multiplicetur per $(y+M)^n$.

Coroll. 1.

94. Quia haec aequatio eſt homogenea, ea quoque fit integrabilis, ſi diuidatur per $(n+1)yy + nyM - MM = (y+M)((n+1)y - M)$. Neque ergo hinc nouae aequationes methodo hac tractabiles obtinentur.

Coroll. 2.

95. Quoniam autem habemus duos multiplicatores $(y+M)^n$ et $\frac{1}{(y+M)((n+1)y - M)}$: ſi alter per alterum

cum diuiditur, quotiens conſtanti arbitrariae aequatum dabit integrale completum. Quare aequatio $ydy+\frac{nydM}{n+1}-\frac{MdM}{n+1}=0$ generaliter integrata praebet:

$$(y+M)^{n+1}((n+1)y-M)=\text{Conſt.}$$

Problema 16.

96. Propoſita aequatione $ydy+Pydx+Qdx=0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(yy+My+N)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura differentialium fit neceſſe eſt:

$$\frac{1}{dx}d.y(yy+My+N)^n=\frac{1}{dy}d.(Py+Q)(yy+My+N)^n$$

Cum igitur M, N, P et Q ſint per hypotheſin functiones ipſius x, erit, facta euolutione:

$$ny(yy+My+N)^{n-1}\left(y\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dx}\right)=P(yy+My+N)^n$$
$$+n(Py+Q)(2y+M)(yy+My+N)^{n-1}$$

et poſt diuiſionem per $(yy+My+N)^{n-1}$

$$nyy\frac{dM}{dx}+\frac{nydN}{dx}=(2n+1)Pyy+(n+1)PMy+PN$$
$$+2nQy\qquad+nQM$$

Hinc fieri oportet:

I. $ndM=(2n+1)Pdx$

II. $ndN=(n+1)PMdx+2nQdx$

III. $0=PN+nQM$

Prima dat $P=\frac{ndM}{(2n+1)dx}$, et vltima $Q=\frac{-PN}{nM}$,

ſeu $Q=\frac{-NdM}{(2n+1)Mdx}$; qui valores in media ſubſtituti praebent:

$$ndN=\frac{n(n+1)MdM}{2n+1}-\frac{2nNdM}{(2n+1)M} \text{ ſeu}$$

$$(2n+1)MdN+2NdM=(n+1)MMdM$$

quae multiplicata per $M^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$ et integrata praebet:

$$(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N=Conſt.+(n+1)\int M^{\frac{2n+3}{2n+1}}dM$$

ſeu $(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N=Conſt.+\frac{2n+1}{4}M^{\frac{4n+4}{2n+1}}$

vnde fit $N=\alpha M^{\frac{-2}{2n+1}}+\frac{1}{4}M^2$.

Cum ergo ſit

$$Pdx=\frac{ndM}{2n+1} \text{ et } Qdx=-\frac{\alpha M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM}{2n+1}-\frac{MdM}{4(2n+1)}$$

iſta aequatio differentialis:

$$ydy+\frac{nydM}{2n+1}-\frac{MdM}{4(2n+1)}-\frac{\alpha}{2n+1}M^{\frac{-2n-3}{2n+1}}dM=0$$

integrabilis redditur, ſi multiplicetur per

$$(yy+My+\frac{1}{4}M^2+\alpha M^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

Coroll. 1.

97. Si fuerit $-\frac{2n+3}{2n+1}=1$, ſeu $n=-1$; aequatio differentialis eſt homogenea, et ſi $-\frac{2n+3}{2n+1}=0$ ſeu $n=-\frac{3}{2}$, primi gradus. Vtroque autem caſu nulla eſt difficultas, cum aequatio facile tractari poſſit.

Coroll. 2.

98. Magis ergo abſtruſi erunt caſus, quibus exponens $-\frac{2n-1}{2n+1}$ neque eſt o, neque 1. Sit ergo $-\frac{2n-1}{2n+1}=m$, vnde fit $2n=-\frac{m-1}{m+1}$ et aequatio differentialis
$$ydy+\tfrac{1}{2}(m+3)ydM+\tfrac{1}{2}(m+1)MdM+\tfrac{1}{2}\alpha(m+1)M^{m}dM=0$$
integrabilis reddetur per multiplicatorem
$$(yy+My+\tfrac{1}{2}MM+\alpha M^{m+1})^{\frac{-m-1}{2(m+1)}}$$

Coroll. 3.

99. Quod ſi iam pro M functiones quaecunque ipſius x ſubſtituantur, aequationes tam complicatae formari poterunt, quas quomodo aliis methodis tractari oporteat, vix liquet, cum tamen hac methodo earum reſolutio ſit in promtu.

Scholion.

100. Si quis haec veſtigia vlterius proſequi voluerit, dubium eſt nullum, quin haec methodus mox multo maiora ſit acceptura incrementa, quibus vniuerſa Analyſis non mediocriter promoueatur. Specimina etiam hic euoluta ita ſint comparata, vt viam ad inueſtigationes profundiores parare videantur, praecipue ſi inſuper alia aequationum differentialium genera ſimili modo pertractentur. Verum haec, quae hactenus protuli, ſufficere videntur, animis Geometrarum ad ampliorem huius methodi enucleationem incitandis, quem ſcopum mihi equidem potiſſimum propoſueram.

SOLVTIO PROBLEMATIS
DE INVESTIGATIONE TRIVM NVMERORVM, QVORVM TAM SVMMA, QVAM PRODVCTVM, NEC NON SVMMA PRODVCTORVM EX BINIS, SINT NVMERI QVADRATI.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Etſi problemata huius generis, quae Diophantea appellari ſolent, parum vtilitatis afferre videntur: tamen certum eſt, Analyſin Mathematicam, atque adeo etiam eam partem, quae circa infinita verſatur, ex methodo problemata Diophantea ſoluendi, maxima incrementa cepiſſe. Non ſolum autem huiusmodi problemata, ſi ſint difficiliora, fines Analyſeos plurimum amplificauerunt: ſed etiam vim ingenii mirifice acuere ſolent, vt etiam in aliis problematibus, quomodo ſolutionem inſtitui oporteat, facilius perſpicere valeat. Quam ob rem huius generis problemata, praecipue ſi modus ſoluendi magis fuerit reconditus, minime contemnenda eſſe arbitror. Dum enim ſingularia artificia ad eorum ſolutionem requiruntur, ab iisdem quoque egregia ſubſidia ad vniuerſam Analyſin vberius excolendam expectare licebit.

2. Ad hoc autem genus potiſſimum referendum videtur problema propoſitum, quandoquidem id diu

et

et multum per varia Methodi Diophanteae artificia fruſtra tractaui, vt fere etiam de eius ſolutione penitus deſperauerim. Tandem vero, quaſi inopinato, ſolutionem ſum conſecutus, quae eo magis notatu digna videbatur, quod minimi numeri, quos quidem adhuc ſatisfacientes elicere potui, ſunt ita praegrandes, vt mirum non ſit, ſolutionem tantis difficultatibus fuiſſe inuolutam. Quare cum methodo ſingulari ad iſtam ſolutionem pertigerim, eius ampliorem explicationem vſu non eſſe carituram arbitror, cum ſimili fortaſſe modo aliae quaeſtiones multo adhuc difficiliores ſuperari queant.

3. Quaeruntur ergo tres numeri, quibus tres ſequentes conditiones conueniant:

I. Vt eorum ſumma ſit numerus quadratus.

II. Vt ſumma productorum ex binis ſit numerus quadratus.

III. Vt productum omnium trium ſit numerus quadratus.

Quod problema etiam hoc modo enunciari poteſt, vt quaeratur aequatio cubica $z^3 - pzz + qz - r = 0$, omnes ſuas radices habens rationales, cuius ſinguli coefficientes p, q et r ſint numeri quadrati. Poſſet adhuc adiici haec conditio, vt iſti numeri ſint integri, verum per ſe eſt perſpicuum, quomodo inuentis ternis numeris fractis ſatisfacientibus, ex iis facile integri, qui etiam ſatisfaciant, formari queant. Quicunque enim terni numeri ſatisfacere fuerint inuenti, iidem per numerum quadratum quemcunque multiplicati aeque ſatisfacient, quo pacto fractiones facillime tollentur.

4. Sint igitur nx, ny, nz tres huiusmodi numeri quaeſiti, ac ſatisfieri oportebit his conditionibus:

I. Vt ſit $n(x+y+z)=$ Quadrato

II Vt ſit $nn(xy+xz+yz)$ ſeu $xy+xz+yz=$ Quadrato

III. Vt ſit n^3xyz ſeu $nxyz=$ Quadrato.

At primae et tertiae conditioni ſatisfiet, ſi reddatur

$$xyz(x+y+z)=\text{Quadrato}.$$

Ponatur ergo:

$$xyz(x+y+z)=vv(x+y+z)^2$$

vnde per $x+y+z$ diuidendo erit

$$xyz=vv(x+y+z),\ \text{hincque}\ z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}.$$

Cum igitur hinc fiat $xyz=\frac{vvxy(x+y)}{xy-vv}$, vt $nxyz$ prodeat, quadratum capi debet,

$$n=m^2xy(x+y)(xy-vv)$$

Hisque valoribus pro z et n aſſumtis, ſatisfactum erit primae et tertiae conditioni.

5. Hinc itaque noſtri tres numeri erunt

primus $nx=mmxxy(x+y)(xy-vv)$

ſecundus $ny=mmxyy(x+y)(xy-vv)$

tertius $nz=mmvvxy(x+y)^2$

vbi per numerum arbitrarium m fractiones, ſi quae forte occurrent, tolli poterunt. Verum contemplemur iam ſecundam conditionem, quae ob $z=\frac{vv(x+y)}{xy-vv}$ requirit, vt ſit:

$$xy+\frac{vv(x+y)^2}{xy-vv}=\text{Quadrato}.$$

Pona-

Ponamus in hunc finem:

$xy - vv = uu$; vt ſit $y = \frac{vv+uu}{x}$ et $z = \frac{vv(x+y)^2}{uu}$

erit $xy = vv + uu$ et $x + y = \frac{xx+vv+uu}{x}$

efficiendumque eſt, vt ſit

$$vv + uu + \frac{vv(xx+vv+u^2)^2}{uuxx} = \text{Quadrato.}$$

6 Ponatur $x = tv$; vt ſit $y = \frac{vv+uu}{tv}$, eſſeque debet

$$vv + uu + \frac{(vv(tt+1)+uu)^2}{ttuu} = \text{Quadrato},$$

ſeu multiplicando per $ttuu$

$ttuuvv + ttu^4 + v^4(tt+1)^2 + 2uuvv(tt+1) + u^4 = \text{Quadrato}$,

ſiue $v^4(tt+1)^2 + uuvv(3tt+2) + u^4(tt+1) = \text{Quadrato.}$

Statuatur huius quadrati radix $= vv(tt+1) + suu$, erit

$vv(3tt+2) + uu(tt+1) = 2svv(tt+1) + ssuu$;

vnde elicitur

$$\frac{vv}{uu} = \frac{tt+1-ss}{2s(tt+1)-3tt-2} = \text{Quadrato.}$$

Sit porro $s = t - r$, et habebitur:

$$\frac{vv}{uu} = \frac{2rt-rr+1}{2t^3-(2r+3)tt+2t-2(r+1)}$$

Multiplicetur numerator et denominator per $2rt - rr + 1$, vt fiat

$$\frac{vv}{uu} = \frac{(2rt-rr+1)^2}{4rt^4-2(3rr+3r-1)t^3+(2r^3+3rr+2r-3)tt-2(3r-1)(r+1)t+2(r-1)(r+1)^2}$$

7. Tota ergo quaeſtio huc eſt perducta, vt huius fractionis denominator reddatur quadratum: poſito enim

$$4rt^4 - 2(3rr+3r-1)t^3 + (2r^3+3rr+2r-3)tt$$
$$-2(3r-1)(r+1)t + 2(r-1\,(r+1)^2 = QQ$$

 erit

erit definitis hinc t et r

$$\frac{v}{u} = \frac{2rt - rr + 1}{Q}, \text{ tum vero } x = tv \text{ et } y = \frac{vv + uu}{tv}$$

vnde numeri quaeſiti definientur. Ante autem, quam ad iſtam aequationem pertigimus, ſolutionem iam limitauimus poſitione $xy - vv = uu$, quae reſtrictio probe eſt notanda, quoniam nullum eſt dubium, quin eiusmodi extent ſolutiones, in quibus $xy - vv$ non ſit numerus quadratus, easque propterea hinc non reperiemus. Verum hanc limitationem ideo facere ſum coactus, vt ad iſtam formulam quadrato aequandam peruenire licuerit, quippe quae ita eſt comparata, vt per cognita artificia reſolui poſſit. Sicque tota ſolutionis vis in reductionibus §. praeced. eſt ſita.

8. Pluribus autem caſibus haec formula et quidem infinitis modis quadratum effici poteſt, quorum praecipui, et qui ſtatim ſe offerunt ſunt: 1°). Si coefficiens ipſius t^4, ſcilicet $4r$, ſeu r, fuerit numerus quadratus. 2°) Si terminus vltimus $2(r-1)(r+1)^2$ ſeu $2(r-1)$ fuerit numerus quadratus: vtroque enim caſu per regulas cognitas valores idonei pro t elici, tum vero porro ex quolibet alii noui inueniri poſſunt. Sin autem ſimul et r et $2(r-1)$ fuerint quadrata, vna operatione plures valores idoneos pro t eruere licet, neque vero hic, vt plerumque fieri ſolet, ſolutio ſimplicior ſe offert; etſi enim ſi $2(r-1) =$ quadrato, ſatisfacit valor $t = 0$, tamen inde prodit $x = 0$ et $y = \infty$, qui valores pro natura quaeſtionis plane ſunt incongrui. Excluduntur enim ſolutiones, quibus vnus trium numerorum quaeſitorum euaneſceret, quia tum

quaeſtio

quaeſtio eſſet facillima et circa duos numeros verſaretur, quorum tam ſumma, quam productum, eſſet quadratum.

Caſus 1. quo ponitur $r = 1$.

9. Hic caſus ſimpliciſſimus videtur, quia vltimus terminus noſtrae formae euaneſcit, primusque ſit quadratus. Habemus ergo

$$4t^4 - 10t^3 + 4tt - 8t = QQ \text{ et } \frac{v}{u} = \frac{2t}{Q}.$$

Ad hanc aequationem ſoluendam ſtatuamus $Q = 2tt - \frac{5}{2}t$ eritque

$$4tt - 8t = \frac{25}{4}tt;\ \frac{9}{4}t = -8;\ \text{et } t = -\frac{32}{9}.$$

At hinc fiet $\frac{v}{u} = \frac{4}{4t-5} = \frac{-36}{173}$, vnde habebimus

$$v = -36;\ u = 173;\ t = \frac{-32}{9} \text{ et } x = tv = 128$$

indeque porro $y = \frac{36^2 + 173^2}{128} = \frac{31225}{128} = \frac{25\cdot 1249}{128}$.

Erit ergo $x + y = \frac{47609}{128}$ et $w = \frac{36^2\cdot 47609}{173^2\cdot 128}$

ac tres numeri quaeſiti erunt, ob $xy - vv = uw$,

$$\text{Primus} = \frac{128^2\cdot 25\cdot 1249\cdot 47609\cdot 173^2}{128\cdot 128}\,mm$$

$$\text{Secundus} = \frac{128\cdot 25^2\cdot 1249^2\cdot 47609\cdot 173^4}{173^2\cdot 128^3}\,mm$$

$$\text{Tertius} = \frac{36^2\cdot 128\cdot 25\cdot 1249\cdot 47609^2}{128\cdot 128^2}\,mm.$$

10. Ad fractiones tollendas ponamus $m = \frac{128}{5}$, eruntque terni noſtri numeri

$$\left.\begin{aligned} \text{Primus} &= 128^2\cdot 173^2\cdot 1249\cdot 47609 = 128^2\cdot 173^2 \\ \text{Secundus} &= 5^2\cdot 173^2\cdot 1249^2\cdot 47609 = 5^2\cdot 173^2\cdot 1249 \\ \text{Tertius} &= 36^2\cdot 1249\cdot 47609^2 = 36^2\cdot 47609 \end{aligned}\right\} \text{in } 1249\cdot 47609$$

quibus numeris euolutis erit.

Primus $= 490356736 . 59463641$

Secundus $= 934533025 . 59463641$

Tertius $= 61701264 . 59463641$

quorum productum manifeſto eſt quadratum a quippe

$5^2 . 36^2 . 128^2 . 173^4 . 1249^4 . 47609^4$.

Summa autem reperitur

$25 . 59463641^2$

et ſumma productorum ex binis:

$173^2 . 59463641^2 . 18248924559376$

cuius radix quadrata eſt $173 . 59463641 . 4271876$

11. Pro eadem aequatione reſoluenda poni poteſt $Q = 2tt - \frac{5}{2}t - \frac{9}{16}$, vt tres primores termini tollantur, ac prodibit

$-8t = + \frac{45}{16}t + \frac{81}{256}$, ſeu $0 = 173t + \frac{81}{16}$, ergo $t = \frac{-81}{16 . 173}$.

Hinc $Q = \frac{81^2}{128 . 173^2} + \frac{405}{32 . 173} - \frac{9}{16} = - \frac{9 . 207563}{128 . 173^2}$

et $\frac{v}{u} = \pm \frac{144 . 173}{207563}$. Sumi enim poteſt valor ipſius Q tam negatiue quam poſitiue. Statuatur ergo

$v = -144 . 173$; $u = 207563$; erit $x = 9 . 81 = 729$ et $y = \frac{vv + ux}{729}$; vnde iam manifeſtum eſt, ad tam enormes perueniri numeros, vt ſolutio praecedens prae hac multo ſimplicior ſit aeſtimanda. Superfluum autem foret, huiusmodi ſolutiones nimis complicatas vlterius euoluere, quia in huius generis quaeſtionibus ſolutione ſimpliciſſima plerumque contenti eſſe ſolemus.

Caſus

Caſus 2. quo ponitur $r = \frac{3}{2}$.

12. *Hac poſitione* vltimus formulae noſtrae terminus fit quadratum, eritque $\frac{v}{u} = \frac{12t - 5}{4Q}$, exiſtente

$$QQ = 6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 + \tfrac{27}{2}tt - \tfrac{35}{2}t + \tfrac{25}{4}.$$

Iam, ad tres terminos vltimos tollendos, ſtatuatur

$$Q = \tfrac{5}{2} - \tfrac{7}{2}t + \tfrac{1}{4}tt, \text{ eritque}$$

$$6t^4 - \tfrac{41}{2}t^3 = \tfrac{1}{16}t^4 - \tfrac{7}{4}t^3 \text{ et } t = \tfrac{60}{19}$$

hincque $Q = \frac{4375}{722}$ et $\frac{v}{u} = \frac{19}{14}$, vnde $v = 19$ et $u = 14$.
Nunc igitur erit $x = tv = 60$; et $y = \frac{vv + uu}{x} = \frac{557}{60}$
ideoque $x + y = \frac{4157}{60}$ et tres numeri quaeſiti:

$$\text{Primus} = \frac{60^2 \cdot 557 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60} mm = 14^2 . 60^2 . 557 . 4157$$

$$\text{Secundus} = \frac{60 \cdot 557^2 \cdot 4157 \cdot 196}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 14^2 . 557^2 . 4157$$

$$\text{Tertius} = \frac{361 \cdot 60 \cdot 557 \cdot 4157^2}{60 \cdot 60 \cdot 60} mm = 19^2 . 557 . 4157^2$$

poſito $m = 60$: hique numeri iam notabiliter ſunt minores quam ii, qui caſu primo ſunt inuenti.

13. Quoniam ergo hi numeri ob paruitatem attentione digni videntur, ii ita exhibeantur:

Primus $= 705600 . 2315449$
Secundus $= 109172 . 2315449$
Tertius $= 1500677 . 2315449$.

Quorum numerorum ſumma eſt $= 2315449^2$, et productum $= 14^4 . 19^2 . 60^2 . 557^4 . 4157^4$, ſicque vterque numerus quadratus.
At ſumma productorum ex binis erit

$$(14^2 . 60^2 . 14^2 . 557 + 14^2 . 60^2 . 19^2 . 4157 + 14^2 . 557 . 19^2 . 4157) 2315449^2$$

quae

quae reducitur ad hanc formam:

$$14^2\, 2315449^2 . 6631333489$$

cuius radix quadrata eſt

$$14 . 2315449 . 81433.$$

Sunt autem hi numeri circiter 15000 vicibus minores, quam primum inuenti.

Caſus 3. quo ponitur $r=3$.

14. Poſito $r=3$, fit $\frac{v}{u} = \frac{6t-8}{Q}$, et habebitur haec aequatio reſoluenda:

$$QQ = 12t^4 - 70t^3 + 84tt - 64t + 64.$$

Iam ad ternos vltimos terminos tollendos ſtatuatur

$$Q = 8 - 4t + \tfrac{27}{4}tt, \text{ eritque}$$

$$12t^4 - 70t^3 = \tfrac{289}{16}t^4 - 34t^3$$

vnde elicitur $t = -\frac{576}{97}$. et $Q = \pm \frac{8 \cdot 213601}{97 \cdot 97}$

Ergo $\frac{v}{u} = -\frac{97 \cdot 529}{213601} = -\frac{97 \cdot 23}{9287} = -\frac{23 \cdot 97}{87 \cdot 251}$.

ideoque $v = -23 \cdot 97$ et $u = 87 \cdot 251$: tum $x = tv = 23 \cdot 24^2$, et $y = \frac{91225780}{23 \cdot 24^2}$. Verum facile perſpicitur, hos numeros in immenſum excreſcere, vnde iis euoluendis ſuperſedemus. Contemplemur ergo adhuc vnum caſum, quo tam primus, quam vltimus terminus formulae QQ fiunt quadrati.

Caſus 4. quo ponitur $r=9$.

15. Poſito $r=9$, fit $\frac{v}{u} = \frac{18t-80}{Q}$, exiſtente

$$QQ = 36t^4 - 538t^3 + 1716tt - 520t + 1600$$

Tollamus terminos primum et duos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \tfrac{13}{2}t \pm 6tt, \text{ et habebimus}$$

$$-538t^3 + 1716tt = \mp 78t^3 \pm 480tt + \tfrac{169}{4}tt$$

vnde

vnde elicimus pro vtroque ſigno

ſuperiori $t = \frac{5 \cdot 191}{16 \cdot 23}$ } vtrinque autem prodeunt

inferiori $t = \frac{5 \cdot 1723}{32 \cdot 77}$ } numeri nimis magni.

Tollamus ergo tres terminos vltimos, ponendo

$$Q = 40 - \tfrac{18}{5} t + \tfrac{1389}{64} tt;$$

hinc autem numeri multo adhuc maiores reſultant. Poſſet porro pro binis terminis primis cum vltimo tollendis poni $Q = 6tt - \frac{169}{6} t \pm 40$, verum hinc multo minus ad numeros ſimpliciores perueniemus.

16. Ex his ſatis tuto concludi poſſe videtur, minimos numeros problemati ſatisfacientes eſſe eos, quos §. 13. elicuimus, qui ergo, ſi penitus per multiplicationem euoluantur, erunt:

Primus $= 16337808014400$.

Secundus $= 252782198228$.

Tertius $= 3474741058973$.

Sin autem in fractionibus numeri ſatisfacientes ſimpliciſſimi deſiderentur, ii indidem aſſignari poterunt, his per 2315449^2 diuidendis: ita vt hi numeri futuri ſint:

Primus $= \frac{705600}{2315449}$

Secundus $= \frac{196}{4157}$

Tertius $= \frac{861}{557}$.

quorum tam ſumma, quam ſumma productorum ex binis, et omnium trium productum, ſunt numeri quadrati.

THEOREMATA ARITHMETICA NOVA METHODO DEMONSTRATA.

Auctore

L. EVLERO.

Praeter varias computandi operationes, quae vulgo in Arithmetica tradi ſolent, huiusque diſciplinae quaſi partem practicam conſtituunt, eiusdem pars Theoretica, quae in indaganda numerorum natura verſatur, non minus iam olim tractari eſt coepta, quemadmodum ex *Euclide* et *Diophanto* intelligere licet, vbi inſignes numerorum proprietates erutae reperiuntur ac demonſtratae. Quo magis autem deinceps numerorum indolem et affectiones *Mathematici* ſunt ſcrutati, multo plures eorum proprietates obſeruauerunt, vnde pulcherrima Theoremata numerorum naturam illuſtrantia deriuauere, quae partim demonſtrationibus ſunt munita, partim etiam nunc iis indigent, ſiue quod eae ab auctoribus non ſint inuentae, ſiue temporum iniuria deperditae: ex quo genere plurima paſſim occurrunt huiusmodi Theoremata numerica, quorum demonſtrationes adhuc deſiderantur, etiamſi eorum veritatem in dubium vocare non liceat. Atque hic inſigne diſcrimen, quod inter Theoremata arithmetica et geometrica intercedit, non parum mirari debemus, quod vix vlla propoſitio geometrica proferri poſſit, quam non ſit in promtu, ſiue veram, ſiue falſam, oſtendere,

dum

dum contra multae circa numerorum naturam notae ſunt propoſitiones, quarum veritatem nobis agnoſcere, neutiquam vero demonſtrare liceat. Magna huiuſmodi Theorematum copia a *Fermatio* relicta habetur, quorum demonſtrationes maximam partem ſe inueniſſe affirmauit, quas cum eius ſcriptis interiiſſe in eximium huius ſcientiae detrimentum non parum eſt dolendum. Quot autem talium Theorematum demonſtrationes vel ſunt cognitae, vel reſtitutae, in iis certe multo maior vis ingenii elucet, quam vix in vllo alio demonſtrationum genere deprehendimus; vnde in hoc negotio non tam vtilitas, qua ſcientia numerorum illuſtratur, eſt aeſtimanda, quam maxima ſubtilitas, qua huiuſmodi demonſtrationes prae aliis diſtinguuntur. Atque ob hanc cauſam, cum iam ſaepius, quam plerisque aequum videri queat, in hoc genere laborauerim, operam mihi equidem non perdidiſſe videor, neque etiam nunc theoremata, quae hic propono, vtilitate caritura confido. Notatu imprimis dignum viſum eſt Theorema illud *Fermatii*, quo omnes numeros in hac formula $a^{p-1}-1$ contentos, ſemper diuiſibiles eſſe per numerum p, ſiquidem is fuerit primus, neque tamen a per eum diuiſionem admittat, affirmauit, cuius Theorematis iam geminam dedi demonſtrationem. Nunc autem idem in latiori ſenſu contemplor, atque in genere, ſi diuiſor non ſit numerus primus, ſed quicunque N, inueſtigo, cuiusmodi exponentem poteſtati cuicunque tribui oporteat, vt expreſſio a^n-1 ſemper ſit diuiſibilis per numerum N, dummodo numerus a cum eo nullum habeat diuiſorem communem. Inueni au-

tem hoc ſemper vſu venire, quoties exponens n aequalis fuerit multitudini numerorum ipſo N minorum, qui ſint ad N primi. Ad hoc ergo demonſtrandum, ante omnia huiusmodi theorematibus eſt opus, ex quibus, propoſito numero quocunque N, cognoſci poſſit, quot inter numeros ipſo minores futuri ſint ad eum primi, ſeu qui nullum cum eo habeant communem diuiſorem; quae theoremata iam ipſa, multo ampliorem vſum habere, atque ad alias magis abſconditas numerorum proprietates aditum parere, videntur. Iis autem praemiſſis, demonſtratio veritatis propoſitae ita eſt comparata, vt maiore attentione non indigna videatur.

Theorema 1.

1. Si per numerum quemcunque n termini progreſſionis arithmeticae cuiuscunque, cuius differentia ſit numerus ad n primus, diuidantur, inter reſidua occurrent omnes numeri diuiſore n minores.

Demonſtratio.

Sit progreſſionis arithmeticae terminus primus $= a$, et differentia $= d$, quae ſit ad n numerus primus, ſeu quae cum numero n nullum praeter vnitatem habeat diuiſorem communem, ita vt progreſſio arithmetica futura ſit:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \text{ etc.}$$

ac dico: ſi ſinguli termini per numerum n diuidantur, inter reſidua omnes numeros ipſo n minores occurrere.

Ad

Ad hoc demonſtrandum ſufficiet huius progreſſionis tantum n terminos conſideraſſe, qui ſunt:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \ldots\ a+(n-1)d.$$

Quodſi ergo iſti termini ſinguli per n diuidantur; omnia reſidua inter ſe diuerſa eſſe oportet. Si enim duo termini, veluti $a+\mu d$ et $a+\nu d$, exiſtentibus μ et ν numeris ipſo n minoribus, per n diuiſi paria praeberent reſidua, eorum differentia $(\nu-\mu)d$ vtique per n eſſet diuiſibilis. Cum autem numeri d et n nullum habeant diuiſorem communem, neceſſe eſſet, vt $\nu-\mu$ diuiſionem per n admitteret; id quod eſſet abſurdum, ob $\nu-\mu < n$. Quare cum omnia illa reſidua ſint diverſa, eorumque numerus, vtpote terminorum numero aequalis, ſit $= n$, in iis omnes plane numeri ipſo n minores occurrent, ſcilicet:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots\ldots (n-1)$$

ſiquidem differentia progreſſionis d ſit numerus ad diuiſorem propoſitum n primus. Q. E. D.

Coroll. 1.

2. Inter terminos ergo progreſſionis arithmeticae cuiuscunque, quorum numerus eſt n, dummodo differentia eius ad n ſit numerus primus, certe reperitur vnus, qui per n eſt diuiſibilis: tum vero etiam aderit vnus, qui per n diuiſus datum reſiduum r relinquit.

Coroll. 2.

3. Si ergo numerus d ad n fuerit primus, ſemper numerus huius formae $a+\nu d$ exhiberi poteſt, exiſtente

exiſtente a numero quocunque et ν minore quam n, qui per numerum n ſit diuiſibilis, atque etiam ſub iisdem conditionibus ſemper talis dabitur numerus $a+\nu b$, qui per n diuiſus datum relinquat reſiduum r.

Coroll. 3.

4. Datis igitur numeris a et d, quorum hic d ad n ſit primus, ſemper inuenire licet numeros μ et ν, vt aequationi huic: $a+\nu d=\mu n$, vel etiam huic: $a+\nu d=\mu n+r$ ſatisfiat, quicunque numerus minor quam n pro r aſſumatur.

Scholion.

5. Quod de progreſſionis arithmeticae terminorum numero n demonſtrauimus, id de tota progreſſione in infinitum continuata valet: termini enim, qui poſt illos n terminos ſequuntur, eadem ordine reproducunt reſidua, ſi per n diuidantur. Ita terminorum poſt $a+(n-1)d$ ſequentium, qui ſunt $a+nd$, $a+(n+1)d$; $a+(n+2)d$ etc. per n diuiſorum reſidua, conueniunt cum reſiduis ex terminis initialibus a, $a+d$, $a+2d$, etc. natis. Atque ſi tota ſeries in infinitas periodos diſtribuatur, cuique n terminos tribuendo, hoc modo:

$$a, a+b \ldots a+(n-1)b \,|\, a+nb \ldots a+(2n-1)b \,|\, a+2nb \ldots a+(3n-1)b \,|$$

termini cuiuslibet periodi eadem praebebunt reſidua, eodemque ordine diſpoſita; omnium enim periodorum termini cum primi, tum ſecundi, et tertii etc. conſtanter paria dabunt reſidua. Quare ſi rationem reſi-

duorum

aliorum cognoſcere velimus, ſufficit vnicam periodum examinaſſe.

Theorema 2.

6. In progreſſione arithmetica, cuius terminorum numerus eſt $= n$, totidem termini erunt ad numerum n primi, quot inter numeros ipſo n minores dantur ad n primi, dummodo differentia progreſſionis fuerit ad n numerus primus.

Demonſtratio.

Sit enim a terminus primus, et d differentia progreſſionis, quae ſit ad n numerus primus, ideoque ipſa progreſſio n continens terminos:

$$a;\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots\ldots\ a+(n-1)d.$$

Quoniam igitur, ſi hi termini per numerum n diuidantur, inter reſidua occurrunt omnes plane numeri ipſo n minores; ponamus ex termino quocunque $a+vd$ reſultare reſiduum r, ac manifeſtum eſt, ſi r fuerit numerus ad n primus, illum quoque terminum $a+vd$ ad n fore primum, ſin autem r cum n habeat quempiam diuiſorem communem, idem quoque erit diuiſor communis numerorum n et $a+vd$. Quare quot inter numeros ipſo n minores fuerint numeri ad n primi, totidem quoque inter terminos progreſſionis arithmeticae propoſitae habebuntur numeri ad n primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

7. Si n fuerit numerus primus, quia omnes numeri ipſo minores ad ipſum quoque ſunt primi,

quorum

quorum numerus ergo eſt aequalis $= n-1$; in illa etiam progreſſione arithmetica omnes termini praeter vnum erunt ad n primi, quippe vnus per n eſt diuiſibilis.

Coroll. 2.

8. Sin autem n fuerit numerus compoſitus, inter numeros ipſo minores dabuntur quipiam, qui cum eo diuiſorem habeant communem; totidemque vero etiam reperientur in progreſſione arithmetica, quibus iidem communes diuiſores cum n conueniant.

Coroll. 3.

9. Ita ſi ſit $n = 6$, quia inter numeros ſenario minores ſunt duo ad 6 primi, ſcilicet 1 et 5; in omni progreſſione arithmetica 6 terminorum:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d$$

duo tantum erunt ad 6 primi, dummodo differentia d ſit ad 6 numerus primus. Ita ſi capiatur $a = 4$; $d = 5$, horum ſex numerorum 4, 9, 14, 19, 24, 29, duo, ſcilicet 19 et 29, ad 6 ſunt primi, vnus 24 per 6 diuiſibilis, reliqui vero 4, 9, 14 ad 6 compoſiti perinde ac 2, 3, 4.

Scholion.

10. Haec Theoremata in doctrina et contemplatione naturae numerorum inſignem habent vſum, hic autem ea ſolum adhibere viſum eſt ad hanc quaeſtionem enodandam: *Propoſito numero quocunque* n, *quot inter numeros ipſo minores futuri ſint ad eundem numerum*

rum n primi? Statim quidem patet ſi n ſit numerus primus, omnes numeros ipſo minores ſimul ad eum fore primos, eorumque idcirco numerum eſſe $= n - 1$. Verum ſi n ſit numerus compoſitus, multitudo numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſt minor, quanta autem ſit quouis caſu, non tam facile aſſignari poteſt. Ita, ſi ſit $n = 12$, inter numeros minores tantum quatuor reperiuntur ad 12 primi, ſcilicet 1, 5, 7, 11: et ſi ſit $n = 60$, numeri minores ad eum primi ſunt:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59

quorum numerus eſt 16: vnde reliqui 43 omnes cum 60 diuiſores habent communes. Moneri hic conuenit, vnitatem ad omnes plane numeros eſſe numerum primum, etiamſi omnium ſit diuiſor; id quod ex definitione eſt euidens, qua numeri dicuntur eſſe inter ſe primi, qui praeter vnitatem alium nullum agnoſcunt diuiſorem.

Theorema 3.

11. Si n ſit poteſtas quaecunque numeri primi p, ſeu $n = p^m$, inter numeros ipſo minores tot erunt ad eum primi, quot vnitates continentur in $p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$.

Demonſtratio.

Multitudo omnium numerorum poteſtate $n = p^m$ minorum eſt $p^m - 1$, inter hos autem reperiuntur quidam, qui ad n non ſunt primi, omnia ſcilicet ipſius p multipla, minora quam n, nullique alii praeterea: ex quo ſequentes numeri ad n non erunt primi:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p \ldots\ldots p^m - p$$

quorum numerus eſt $p^{m-1}-1$; quo ablato a numero omnium ipſo $n=p^m$ minorum, relinquitur multitudo eorum, qui ad p^m ſunt primi, quorum numerus itaque eſt $=p^m-p^{m-1}=p^{m-1}(p-1)$. Q. E. D.

Coroll. 1.

12. Hinc igitur primo ſequitur, id quod per ſe eſt manifeſtum, ſi ſit $n=p$ exiſtente p numero primo, numerum omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſſe $=p-1$, ſiquidem omnes numeri ipſo minores ſimul ſunt ad eum primi.

Coroll. 2.

13. At ſi ſit $n=p^2$, inter numeros ipſo minores, multitudo eorum, qui ad eum ſunt primi, eſt $=pp-p=p(p-1)$; reliqui, quorum numerus eſt $p-1$, ad $n=p^2$ erunt compoſiti, ſeu per p diuiſibiles.

Coroll. 3.

14. Propoſita autem numeri primi poteſtate quacunque $n=p^m$, inter numeros ipſo minores, quorum multitudo eſt $=p^m-1$, reperiuntur $p^{m-1}-1$, qui ſunt per p diuiſibiles, ideoque ad p^m non primi: reliqui vero omnes, quorum numerus eſt $=p^m-p^{m-1}=p^{m-1}(p-1)$ ad p^m ſunt primi.

Scholion.

15. Si ergo numerus propoſitus n fuerit poteſtas cuiuspiam numeri primi, ope huius regulae aſſignare pote-

poterimus, quot inter omnes numeros ipſo minores futuri ſint ad eum primi. Quando autem numerus n, ex duobus pluribusue numeris primis fuerit conflatus, hinc nondum iſta quaeſtio confici poteſt: praecedentibus autem Theorematibus adhibendis iſtam quaeſtionem latius patentem reſoluere poterimus.

Theorema 4.

16. Si numerus n ſit productum duorum numerorum primorum p et q, ſeu $n = pq$, multitudo omnium numerorum ipſo minorum ad eumque primorum eſt $= (p-1)(q-1)$.

Demonſtratio.

Cum numerus omnium numerorum ipſo $n = pq$ minorum ſit $pq-1$, hinc primum ii debent excludi, qui per p ſunt diuiſibiles, deinde vero etiam ii, qui per q, hisque deletis relinquetur multitudo quaeſita. Notentur ergo ab vnitate vsque ad pq numeri, qui ſunt ad p primi, hoc modo:

1,	2,	3,	4,	- -	$p-1$
$p+1$,	$p+2$,	$p+3$,	$p+4$	- -	$2p-1$
$2p+1$,	$2p+2$,	$2p+3$,	$2p+4$	- -	$3p-1$
$3p+1$,	$3p+2$,	$3p+3$,	$3p+4$	- -	$4p-1$
:	:	:	:		:
:	:	:	:		:
:	:	:	:		:
$(q-1)p+1$;	$(q-1)p+2$,	$(q-1)p+3$,	$(q-1)p+4$	- -	$pq-1$

atque iam ex his ii tantum eligi debent, qui ſimul

 quoque

quoque ad q ſunt primi. Conſiderentur ergo ſeries verticales, quarum numerus eſt $p-1$; quaelibet autem continet q terminos in arithmetica progreſſione creſcentens, differentia exiſtente p, quae eſt ad q numerus primus. In qualibet ergo ſerie verticali omnes termini praeter vnum ad q erunt primi (per §. 7.); vnde vnaquaeque ſeries verticalis continet $q-1$ numeros ad q primos Quare cum numerus ſerierum verticalium ſit $p-1$, in omnibus continentur ſimul $(p-1)(q-1)$ numeri ad q primi, iidemque igitut etiam ad productum pq erunt primi; conſequenter inter omnes numeros ipſo pq minores reperientur $(p-1)(q-1)$ numeri ad pq primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

17. Cum multitudo omnium numerorum ipſo producto pq minorum ſit $pq-1$, inter eos ſemper ſunt $(p-1)(q-1)=pq-p-q+1$ primi ad pq, reliqui vero, quorum numerus eſt $p+q-2$, ad eum ſunt compoſiti, ſeu cum eo communem habent diuiſorem vel p, vel q.

Coroll. 2.

18. Hoc etiam inde patet, quod inter numeros ipſo producto pq minores ſint $q-1$ numeri per p diviſibiles, ſcilicet:

$$p,\ 2p,\ 3p,\ 4p\ \ldots\ldots\ (q-1)p$$

deinde inter eosdem ſunt $p-1$ numeri per q diuiſibiles, nempe:

$$q,\ 2q,\ 3q,\ 4q\ \ldots\ldots\ (p-1)q$$

qui cum ab illis omnes ſint diuerſi, omnino habentur

$(q-1)$

$(q-1)+(p-1)=p+q-2$ numeri, qui ad pq non ſunt primi.

Coroll. 3.

19. Si ergo quaeratur, quot ab 1 vsque ad 15 ſint numeri ad 15 primi? ob $p=3$ et $q=5$, regula docet eorum numerum eſſe $2 \cdot 4 = 8$, quippe qui ſunt 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Simili modo ab 1 ad 35 ob $p=5$ et $q=7$, multitudo numerorum ad 35 primorum eſt $4 \cdot 6 = 24$, hique numeri ſunt: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34.

Scholion.

20. Quoniam hic quaeſtio eſt de numeris, qui ad quempiam numerum ſint primi, eoque minores, eos commode partes ad iſtum numerum primas appellare licebit. Ita ſi numerus propoſitus fuerit primus $=p$, numerus partium ad eum primarum eſt $=p-1$: ſi numerus propoſitus ſit poteſtas quaecunque numeri primi $=p^n$, numerus partium ad eum primarum erit $=p^n-p^{n-1}=p^{n-1}(p-1)$: at ſi numerus propoſitus ſit productum duorum numerorum minorum diſparium $=pq$, numerus partium ad eum primarum eſt $=(p-1)(q-1)$, hocque modo ambages in loquendo contrahemus. Simili modo demonſtrare poſſemus, ſi numerus propoſitus ſit productum ex tribus numeris primis diſparibus $=pqr$, numerum partium ad eum primarum fore $=(p-1)(q-1)(r-1)$: hocque adeo ad productum plurium extendere liceret. Verum ſequens propoſitio omnes hos caſus in ſe complectetur.

Theorema 5.

21. Si ſint A et B numeri inter ſe primi, et numerus partium ad A primarum ſit $=a$, numerus vero partium ad B primarum ſit $=b$; tum numerus partium ad productum AB primarum erit $=ab$.

Demonſtratio.

Sint $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \omega$ numeri illi ipſo A minores ad eumque primi, ſeu partes ad A primae, quarum igitur partium numerus per hypotheſin eſt $=a$. Totidem ergo erunt numeri ad A, itidem primi erunt ab A ad 2A, item a 2A ad 3A, et ita porro. Hoc modo exhiberi poterunt omnes numeri ad A primi ab vnitate vsque ad numerum propoſitum AB, quos ſequens ſchema exhibebit:

$1,$	$\alpha,$	$\beta,$	$\ldots\ldots$	ω
$A+1,$	$A+\alpha,$	$A+\beta$	$\ldots\ldots$	$A+\omega$
$2A+1,$	$2A+\alpha,$	$2A+\beta$	$\ldots\ldots$	$2A+\omega$
$3A+1,$	$3A+\alpha,$	$3A+\beta$	$\ldots\ldots$	$3A+\omega$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$(B-1)A+1,$	$(B-1)A+\alpha,$	$(B-1)A+\beta,$	$\ldots$	$(B-1)A+\omega.$

Hic ſingulae ſeries horizontales continent a terminos, numerusque omnium ſerierum horizontalium eſt $=B$; vnde omnes ſeries iunctim offerunt aB terminos, qui iam omnes ad A erunt primi. Inde ergo adhuc excludi debent ii, qui ad B non ſunt primi, vt hoc modo relinquantur, qui non ſolum ad A, ſed etiam ad B, ideoque ad ipſum productum AB, ſint primi, ſeu

ex

ex his ſeriebus ii tantum termini numerari debent, qui etiam ad B ſint primi. Hunc in finem conſideremus ſeries verticaliter; et cum numerus ſerierum verticalium ſit $=a$, quaelibet ſeries verticalis continebit B terminos in arithmetica progreſſione auctos, quorum differentia cum ſit $=$ A, ideoque numerus ad B primus, per Theor. II. quaelibet ſeries verticalis tot continebit terminos ad B primos, quot dantur partes ad numerum B primae; eorum ergo numerus eſt per hypotheſin $=b$. Cum igitur ſingulae ſeries verticales contineant b terminos ad B primos, qui propterea etiam erunt ad productum AB primi, numerus omnium terminorum ad AB primorum, hoc eſt partium ad hunc numerum AB primarum erit $=ab$. Q. E. D.

Coroll. 1.

22. Si inſuper tertius numerus C adiiciatur, qui ſit ad vtrumque praecedentium A et B, ſeu ad eorum productum AB primus, et numerus partium ad C primarum ſit $=c$; tum numerus partium ad productum ABC primarum erit $=abc$. Productum enim AB conſiderari poteſt tanquam vnus numerus, cuius partium ad eum primarum ſit $=ab$; et quia C ad AB eſt primus, Theorema hic habet locum.

Coroll. 2.

23. Cum igitur vnusquisque numerus N reſolui poſſit in factores inter ſe primos, qui ſinguli ſint vel ipſi numeri primi, vel poteſtates primorum, ope huius regulae multitudo partium ad numerum quemcunque N primarum aſſignari poterit.

Coroll. 3.

Coroll. 3.

24. Exiſtentibus ſcilicet p, q, r, s, etc. numeris primis, omnis numerus N in huiusmodi forma $N = p^{\lambda} q^{\mu}, r^{\nu}, s^{\xi}$ comprehendetur; vnde numerus partium ad N primarum erit:

$$p^{\lambda-1}(p-1).\ q^{\mu-1}(q-1).\ r^{\nu-1}(r-1).\ s^{\xi-1}(s-1).$$

Coroll. 4.

25. Pro formis igitur numerorum ſimplicioribus multitudo partium ad eos primarum ita ſe habebit:

numerus propoſitus	multitudo partium ad eum primarum
p	$p-1$
pp	$p(p-1)$
pq	$(p-1)(q-1)$
p^3	$pp(p-1)$
p^2q	$p(p-1)(q-1)$
pqr	$(p-1)(q-1)(r-1)$
p^4	$p^3(p-1)$
p^3q	$p^2(p-1)(q-1)$
p^2q^2	$p(p-1)q(q-1)$
p^2qr	$p(p-1)(q-1)(r-1)$
$pqrs$	$(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$
p^5	$p^4(p-1)$
p^4q	$p^3(p-1)(q-1)$
p^3q^2	$p^2(p-1)q(q-1)$
p^3qr	$p^2(p-1)(q-1)(r-1)$
p^2q^2r	$p(p-1)q(q-1)(r-1)$
p^2qrs	$p(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$
$pqrst$	$(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)(t-1)$

num. prop.	mult. part. ad eum prim.
2	1
3	2
4	2
5	4
6	2
7	6
8	4
9	6
10	4
11	10
12	4
13	12
14	6
15	8
16	8
17	16
18	6
19	18
20	8
21	12
22	10
23	22
24	8
25	20

Coroll.

Coroll. 5.

26. Hinc igitur propoſito numero quocunque multitudo partium ad eum primarum expedite definietur. Veluti, ſi proponatur 360, cum ſit $360 = 2^3 . 3^2 . 5$, erit multitudo partium ad 360 primarum $= 4 . 6 . 4 = 96$.

Scholion.

27. Haec circa multitudinem partium ad numerum quemuis primarum pro praeſenti inſtituto ſufficere poſſunt. Interim tamen circa ipſas partes ad quemuis numerum primas haec notaſſe iuuabit: ſi numerus propoſitus fuerit N, atque inter partes ad eum primas occurrat numerus α, ibidem quoque occurret numerus $N - \alpha$; quoniam, exiſtente α ad N primo, etiam $N - \alpha$ erit ad N primus. Hinc pro quouis numero partes tantum eius ſemiſſe minores inueniſſe ſufficiet, cum reliquae ſint earum complementa ad ipſum numerum N. Simili modo, ſi N ſit numerus par, inter partes ad N primas etiam occurret $\frac{1}{2}N - \alpha$, tum etiam $\frac{1}{2}N + \alpha$. Item ſi N ſit diuiſibilis per numerum quemcunque n, inter partes ad eum primas quoque occurrent hi numeri:

$$\tfrac{1}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{2}{n}N \pm \alpha;\ \tfrac{3}{n}N \pm \alpha \ldots \tfrac{(n-1)}{n}N \pm \alpha, \text{ et } N - \alpha$$

hincque multo facilius ipſae partes iſtae actu exhiberi poterunt.

Theorema 6.

28. Si numerus x fuerit primus ad N, tum omnes poteſtates ipſius x per N diuiſae relinquent reſidua, quae erunt ad numerum N prima.

Demonſtratio.

Cum enim x ſit numerus ad N primus, omnes eius poteſtates erunt quoque ad N primae, ideoque ſi per N diuidantur, reſidua etiam ad N erunt numeri primi. Q. E. D.

Coroll. 1.

29. Inter reſidua ergo poteſtatum ipſius x per N diuiſarum alii numeri non occurrunt, niſi qui ſint partes ad N primae; quarum numerus cum ſit pro indole numeri N determinatus, innumerabiles exiſtent poteſtates ipſius x, quae per N diuiſae aequalia relinquunt reſidua.

Coroll. 2.

30. Inter reſidua autem iſta ex diuiſione poteſtatum ipſius x per numerum N orta ſemper reperietur vnitas, propterea quod inter poteſtates ipſius x etiam referri debet $x^0 = 1$. Vtrum autem praeter vnitatem etiam omnes reliquae partes ad N primae inter reſidua occurrant, nec ne? mox videbimus.

Coroll. 3.

31. Si pro x capiatur vnitas, omnia reſidua erunt vnitates, quicunque numerus pro N fuerit aſſumtus. Deinde ſi ſumatur $x = N - 1$, qui numerus ad N etiam eſt primus, in reſiduis, ex diuiſione poteſtatum $(N-1)^0$, $(N-1)^1$, $(N-1)^2$, $(N-1)^3$, etc. ortis, nonniſi duo reperientur diuerſa, ſcilicet 1 et $N-1$, quae continuo ſe alternatim excipiunt.

Coroll. 4.

Coroll. 4.

32. Prout igitur numerus x ratione ad N fuerit comparatus, vtique fieri poteſt, vt inter reſidua omnium poteſtatum ipſius x non omnes partes ad diuiſorem N primae occurrant.

Coroll. 5.

33. Si ergo omnes partes ad numerum N primae ſint 1, a, b, c, d, e, ... quarum numerus ſit $= n$, inter reſidua memorata, vel omnes iſtae partes occurrent, vel quaedam tantum, inter quas autem ſemper vnitas reperietur.

Coroll. 6.

34. Quodſi non omnes illae partes in reſiduis ex diuiſione poteſtatum ipſius x per numerum N relictis occurrant, illae partes in duas claſſes diſtribuentur, quarum altera *continebit partes in reſiduis occurrentes*, altera vero partes in reſiduis non occurrentes.

Theorema 7.

Si ſeries poteſtatum x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 x^5, etc. per numerum N, qui ad x ſit primus, diuidatur, cousque reſidua prodibunt diuerſa, donec perueniatur ad poteſtatem, quae iterum vnitatem pro reſiduo praebeat.

Demonſtratio.

Quoniam ſerie poteſtatum 1, x, x^2, x^3, x^4, etc. in infinitum continuata, omnia reſidua diuerſa eſſe nequeunt, neceſſe eſt, vt tandem quodpiam ex praeceden-

tibus reſiduis redeat; ac dico: vnitatem eſſe id reſiduum, quod omnium primum ſit rediturum. Quod ſi quis neget, ſit x^{μ} ea poteſtas, cuius reſiduum primum in ſequentibus ex poteſtate $x^{\mu+\nu}$ redeat; cum igitur poteſtates x^{μ} et $x^{\mu+\nu}$ aequalia praebeant reſidua, earum differentia $x^{\mu+\nu}-x^{\mu}=x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ per numerum N erit diuiſibilis Verum producti $x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ factor prior ad N eſt numerus primus, ergo alter $x^{\nu}-1$ per N diuiſibilis ſit neceſſe eſt. Hinc autem poteſtas x^{ν} per N diuiſa reſiduum daret $=1$, ſicque vnitas inter ſequentia redua citius redibit, quam reſiduum poteſtatis x^{μ}, quippe quod per hypotheſin demum in poteſtate altiore $x^{\mu+\nu}$ recurrit. Ex quo euidens, nullum reſiduum iterum occurrere poſſe, niſi ante vnitas inter reſidua redierit. Q. E. D.

Coroll. 1.

36. Poſtquam diuiſio terminorum ſeriei 1, x, x^2, x^3, x^4, etc. per numerum N ad x primum ab initio dedit reſidua diuerſa, puta 1, α, β, γ etc. tandem iterum occurret primum reſiduum 1; quod ſi oriatur ex poteſtate x^{ν}, numerus praecedentium reſiduorum diuerſorum erit $=\nu$.

Coroll. 2.

37. Quando autem poteſtas x^{ν} reſiduum dat 1, idem quod primus terminus x^0, poteſtas ſequens $x^{\nu+1}$ idem dabit reſiduum quod x^1; et ſequentium quaecunque $x^{\nu+\mu}$ idem quod poteſtas x^{μ}. Cum enim diffe-

rentia

rentia $x^{\nu+\mu}-x^{\mu}=x^{\mu}(x^{\nu}-1)$ ſit diuiſibilis per N, neceſſe eſt, vt ambo termini $x^{\nu+\mu}$ et x^{μ} per N diuiſi idem praebeant reſiduum.

Coroll. 3.

38. Cum poſt poteſtatem x^{ν} eadem reſidua 1, α, β, γ etc. ordine recurrant, poteſtas $x^{2\nu}$, ſimilique modo poſt eam poteſtates $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$ etc. omnes per N diuiſae idem reſiduum 1 relinquent. Quin etiam omnes poteſtates x^{μ}, $x^{\mu+\nu}$, $x^{\mu+2\nu}$, $x^{\mu+3\nu}$, $x^{\mu+4\nu}$ etc. aequalia reſidua ſuppeditabunt.

Coroll. 4.

39. Si igitur x^{ν} fuerit infima poteſtas, quae poſt $x^{0}=1$ iterum vnitatem pro reſiduo praebeat, numerus diuerſorum reſiduorum erit ν. Cum ergo numerus partium ad numerum N primarum ſit $=n$, fieri certe nequit, vt ſit $\nu>n$: erit ergo vel $\nu=n$, vel $\nu<n$.

Coroll. 5.

40. Si ergo ſeries poteſtatum 1, x, x^{2}, x^{3}, etc. vsque ad x^{n} continuetur, inter eas certe vna ſaltem reperietur praeter primum terminum 1, quae per N diuiſa vnitatem relinquat. Plures fortaſſe huiusmodi poteſtates aliquando, ſed pauciores vna nunquam exiſtent.

Scholion.

41. Reſidua proprie ſemper ſunt numeri minores diuiſore N, ſed nihil impedit, quo minus numeros

etiam maiores tanquam reſidua ſpectemus, quae huiusmodi relinquuntur, ſi quotus nimis paruus accipiatur. Ita ſi in diuiſione cuiuspiam numeri per N relinquatur $N+\alpha$, hoc reſiduum aequiualens ipſi α cenſeri debet; hincque, ſi de reſiduis ſermo ſit, omnes hi numeri α, $N+\alpha$, $2N+\alpha$, $3N+\alpha$, etc. inſtar vnius reſidui α ſunt conſiderandi. Scilicet multipla quaecunque diuiſoris N ſiue adiecta, ſiue demta a quopiam reſiduo α, eius naturam non mutant, atque hoc modo etiam numeri negatiui commode inter reſidua referuntur; veluti $\alpha-N$ pro eodem reſiduo eſt habendum ac α; et reſiduum -1 aequiualet reſiduo $N-1$. Ex his conficitur, omnes numeros, qui per N diuiſi idem exhibeant reſiduum α, pro eodem reſiduo haberi poſſe, ex quo enim numero per diuiſionem quotum nimis paruum ſumendo oritur reſiduum vel $N+\alpha$, vel $2N+\alpha$, vel $3N+\alpha$ etc ex eodem, quotum plenum ſumendo, naſcitur reſiduum α; tum vero indidem, ſi quotus capiatur nimis magnus, obtinebuntur reſidua negatiua $\alpha-N$, vel $\alpha-2N$, vel $\alpha-3N$ etc. quae ergo etiam ab α non diſcrepare ſunt cenſenda.

Thorema 8.

42. Si dum termini progreſſionis 1, x, x^2, x^3, x^4, etc per numerum N ad x primum diuidantur, reſidua fuerint 1, a, b, c, etc. in iisdem quoque occurrent tam ſingulorum omnes poteſtates, quam producta quaecunque vel binorum, vel ternorum, vel quotlibet in ſe multiplicatorum.

Demon-

Demonſtratio.

Naſcantur reſidua a, b, c etc. ex poteſtatibus x^{α}, x^{β}, x^{γ} etc. ac numeros etiam maiores quam N in reſiduis admittendo, ex poteſtatibus $x^{2\alpha}$, $x^{3\alpha}$, $x^{4\alpha}$ etc. orientur reſidua a^2, a^3, a^4 etc. quae igitur etiam in ſerie reſiduorum 1, a, b, c etc. continebuntur. Tum vero poteſtates $x^{\alpha+\beta}$, $x^{\alpha+\gamma}$, $x^{\alpha+\beta+\gamma}$ etc. relinquent reſidua ab, ac, abc etc. quae ergo etiam in ſerie reſiduorum inueniri debebunt. Producta igitur, quomodocunque ex reſiduis 1, a, b, c etc. per multiplicationem formata, omnia in eadem ſerie reſiduorum occurrent, ſi quidem ſingula per ablationem diuiſoris N, quoties id fieri poteſt, ad minimam formam reducantur Q. E. D.

Coroll. 1.

43. Haec indoles reſiduorum eo clarius eluceret, ſi eorum loco ipſae illae poteſtates ipſius x, vnde ſunt orta, ſubſtituantur; tum enim manifeſto non ſolum omnes poteſtates harum poteſtatum, ſed etiam earum producta quaecunque, in reſiduis occurrunt.

Coroll. 2.

44. Neque tamen ideo numerus reſiduorum indeterminatus euadit; quemadmodum enim iam vidimus, ex innumeris poteſtatibus paria reſidua prouenire, ita, ſi omnia haec reſidua, ex mutua multiplicatione nata, ad formam minimam reducantur, ad multitudinem modicam reuocabuntur.

Coroll.

Coroll. 3.

45. Ita ſi minima poteſtas, quae per N diuiſa iterum vnitatem relinquit, fuerit x^{ν}, ita vt numerus reſiduorum 1, a, b, c, etc. ſit $=\nu$, tum in eodem numero omnia producta, ex multiplicatione numerorum a, b, c, etc. nata, continebuntur, ſi quidem ab iis diuiſor N toties, quoties fieri poteſt, auferatur.

Scholion.

46. Vnicum exemplum omnibus dubiis, quae forte circa hanc apparentem reſiduorum multitudinem naſci poſſunt, ſoluendis ſufficiet. Sit igitur $x=2$, et pro diuiſore ſumatur $N=15$, qui ſcilicet ad 2 ſit primus; iam ſingulae binarii poteſtates per 15 diuiſae, ſequentia relinquent reſidua

pot.	1;	2;	2^2;	2^3;	2^4;	2^5;	2^6;	2^7;	2^8;	2^9;	2^{10};	etc.
reſ.	1;	2;	4;	8;	1;	2;	4;	8;	1;	2;	4;	etc.

Poteſtas igitur, quae primum vnitatem reproducit, eſt 2^4, a qua reſidua continuo eodem ordine 1, 2, 4, 8 repetuntur, ita vt tantum quaterna reſidua diuerſa occurrant. Hic iam manifeſtum eſt, quomodocunque haec reſidua in ſe inuicem multiplicentur, nunquam numeros inde produci, qui non in eodem quaternione includantur; poſtquam ſcilicet ablatione diuiſoris 15 ad formam minimam fuerint reuocata. In hoc quoque exemplo inter reſidua non omnes partes ad 15 primae occurrunt, ſed inde excluduntur iſtae partes 7, 14, 13, 14, quae pariter ad 15 ſunt primae; vnde diſtributio

ſupra

ſupra facta inter partes ad diuiſorem primas, quae in reſiduis occurrunt, et quae non occurrunt, illuſtratur, ad quam potiſſimum in ſequentibus probe reſpiciatur.

Thorema 9.

47. In reſiduis ex diuiſione poteſtatum cuiuspiam numeri per diuiſorem ad eum primum relictis, vel omnes partes ad diuiſorem primae occurrunt, vel numerus partium non occurrentium aequalis erit, vel rationem tenebit multiplam ad numerum partium, quae reſidua conſtituunt.

Demonſtratio.

Sit ſeries poteſtatum 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 etc. et diuiſor N ad x primus, cuius partium ad ipſum primarum numerus ſit $= n$. Sit porro x^ν minima poteſtas, quae per N diuiſa iterum vnitatem relinquit, ita vt numerus omnium diuerſorum reſiduorum ſit $= \nu$, quae cum omnia ſint ad N numeri primi, eorum numerus erit vel $= n$, vel minor; priorique caſu inter reſidua vtique omnes partes ad N primae occurrent. Conſideremus igitur caſum, quo $\nu < n$, ſintque 1, a, b, c, d, etc. omnia reſidua ex diuiſione poteſtatum

$$1, x, x^2, x^3, x^4 \ldots \ldots x^{\nu-1}$$

per diuiſorem N relicta, quorum numerus cum ſit $= \nu$, non omnes partes ad N primae ibi occurrent. Sit igitur α huiusmodi pars in reſiduis non occurrens, ac demonſtrari poteſt, nullum quoque horum numerorum αa, αb, αc, αd etc. in reſiduis occurrere. Nam ſi

aa eſſet reſiduum poteſtati x^λ reſpondens, quia a eſt quoque reſiduum ex quapiam poteſtate, puta x^ζ, ortum, foret $x^\lambda = AN + aa$, et $x^\zeta = BN + a$, ideoque $x^\lambda - ax^\zeta = (A - aB)N$ per N diuiſibile. Cum autem x^ζ ad N ſit numerus primus, et $x^\lambda - ax^\zeta = (x^{\lambda-\zeta} - a)$, numerus $x^{\lambda-\zeta} - a$ eſſet per N diuiſibilis, ſicque poteſtas $x^{\lambda-\zeta}$ per N diuiſa relinqueret reſiduum a, contra hypotheſin. Cum igitur a, aa, ab, ac, etc. quorum numerus eſt $= \nu$, ſint numeri ad N primi, atque diviſione per N ad partes ad N primas reuocari poſſint, ſtatim atque vna pars a ad N prima in reſiduis non reperitur, ſimul quoque ν eiusmodi partes aſſignari poſſunt in reſiduis non occurrentes. Numerus ergo partium non occurrentium, niſi ſit nullus, ad minimum eſt $= \nu$, ac ſi praeterea fuerit pars ad N prima β in his non reſiduis non contenta, denuo habebuntur ν partes nouae in reſiduis non occurrentes; ſicque porro. Quare ſi non omnes partes ad diuiſorem N primae in reſiduis occurrant, numerus partium non occurrentium neceſſario eſt vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel $= 3\nu$, vel alii cuipiam multiplo ipſius ν, hoc eſt numeri diuerſorum reſiduorum. Q. E. D.

Coroll. 1.

48. Conſtituto ergo diſcrimine inter partes ad diuiſorem N primas eas quae ſunt reſidua, et eas quae non ſunt reſidua, ex demonſtratione patet, productum ex reſiduo et non reſiduo in claſſe non-reſiduorum ſemper contineri. Ita ſi a ſit reſiduum, α non-reſiduum, productum $a\alpha$ certe non erit reſiduum.

Coroll. 2.

49. Contra autem iam ſupra vidimus productum ex duobus pluribusue reſiduis in claſſe reſiduorum reperiri. Vnde ſequitur ex vno non-reſiduo et quotcunque reſiduis in claſſe non-reſiduorum occurrere debere.

Scholion.

50. Vis huius demonſtrationis iſto nititur fundamento, quod ſi inter reſidua occurrant partes 1, a, b, c, d, etc. ad diuiſiorem primae, atque α fuerit etiam pars ad diuiſiorem prima in his reſiduis non contenta, tum producta omnia αa, αb, αc, αd, etc. non ſolum in reſiduis non occurrere, quod quidem perfecte eſt demonſtratum, ſed etiam ea eſſe partes ad diuiſorem N primas, omnesque inter ſe diuerſas; ſeu ſi ea per N, actu diuidantur, relinqui reſidua diuerſa. Illud quidem per ſe eſt perſpicuum; cum enim tam α, quam a, b, c, d, etc. ſint numeri ad N primi, etiam eorum producta ad N prima ſint neceſſe eſt. Quod autem producta αa, αb, αc, αc, etc. ſint omnia ad N relata inter ſe diuerſa, intelligitur, quod ſi verbi gratia duo αa et αb per N diuiſa paria darent reſidua, eorum differentia $\alpha b - \alpha a = \alpha(b-a)$ per N eſſet diuiſibilis, ideoque et $b-a$; id quod hypotheſi, quod a et b ſint diverſae partes ad N primae, repugnat.

Theorema 10.

51. Exponens minimae poteſtatis x^{ν}, quae per numerum N ad x primum diuiſa vnitatem relinquit,

vel eſt aequalis numero partium ad N primarum, vel huius numeri ſemiſſis, aliaue eius pars aliquota.

Demonſtratio.

Sit n numerus partium ad N primarum, quarum cum ν conſtituant reſidua, erit numerus non-reſiduorum $= n - \nu$. Vidimus autem hunc numerum eſſe vel $= 0$, vel $= \nu$, vel $= 2\nu$, vel alii cuipiam multiplo exponentis ν. Sit ergo $n - \nu = (m - 1)\nu$, ita vt m denotet vel vnitatem, vel alium quemuis numerum integrum, atque hinc obtinebimus $n = m\nu$ et $\nu = \frac{n}{m}$: vnde patet exponentem minimae poteſtatis ipſius x, quae per N diuiſa vnitatem relinquit, eſſe vel $= n$, ſi $m = 1$, vel $= \frac{n}{2}$, ſi $m = 2$, vel in genere eſſe partem quampiam aliquotam numeri n, qui exprimit multitudinem partium ad diuiſorem N primarum. Q. E. D.

Coroll. 1.

52. Si x^ν fuerit minima poteſtas, quae per numerum N ad x primum diuiſa vnitatem relinquit, ſequentes poteſtates idem reſiduum relinquentes ſunt $x^{2\nu}$, $x^{3\nu}$, $x^{4\nu}$, $x^{5\nu}$, etc. neque praeterea vllae aliae dantur, quae per N diuiſae vnitatem relinquant.

Coroll. 2.

53. Exponens ergo huius poteſtatis minimae ſemper cum numero partium ad diuiſorem N primarum ita connectitur, vt ſit vel illi ipſi, vel cuipiam eius parti aliquotae, aequalis.

Scholion.

Scholion.

54. Quo haec ratio clarius perſpiciatur, iuuabit nonnullos caſus ſimpliciores perpendiſſe. Sit igitur $x=2$, et pro N ſumamus ſucceſſiue numeros impares, vtpote ad $x=2$ primos, atque exhibeamus minimam poteſtatem binarii, quae per quemque numerum imparem diviſa vnitatem relinquat.

Diuiſor N	num. part. ad eum pr. n	min. pot. 2^ν quae per N diuiſ. vnitatem relinquit.		
3	2	2^2	ergo	$\nu=n$
5	4	2^4	——	$\nu=n$
7	6	2^3	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
9	6	2^6	——	$\nu=n$
11	10	2^{10}	——	$\nu=n$
13	12	2^{12}	——	$\nu=n$
15	8	2^4	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
17	16	2^8	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
19	18	2^{18}	——	$\nu=n$
21	12	2^6	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
23	22	2^{11}	——	$\nu=\frac{1}{2}n$
25	20	2^{20}	——	$\nu=n$
27	18	2^{18}	——	$\nu=n$
29	28	2^{28}	——	$\nu=n$
31	30	2^5	——	$\nu=\frac{1}{6}n$

 Theore-

Theorema 11.

55. Si ſuerit N ad x numerus primus, et n numerus partium ad N primarum, tum poteſtas x^n vnitate minuta ſemper per numerum N erit diuiſibilis.

Demonſtratio.

Sit enim x^ν minima poteſtas, quae per N diuiſa vnitatem relinquit, eritque ν vel aequalis ipſi numero n, vel parti eius cuipiam aliquotae $\frac{n}{m}$. Cum igitur $x^\nu - 1$ per N ſit diuiſibilis, quia forma $x^{\nu m} - 1$ factorem habet $x^\nu - 1$, etiam iſta forma $x^{\nu m} - 1$, ſeu $x^n - 1$, per N erit diuiſibilis. Q. E. D.

Coroll. 1.

56. Si ergo diuiſor N ſit numerus primus p, neque x per p ſit diuiſibilis, tum ſemper numerus $x^{p-1} - 1$ per numerum primum p erit diuiſibilis, vti quidem dudum demonſtraui.

Coroll. 2.

57. Si praeterea p, q, r, etc., ſint numeri primi, x neque vllum eorum implicet, ex hoc theoremate ſequitur,

has formas	fore diuiſibiles per
$x^{p-1} - 1$	p
$x^{p(p-1)} - 1$	pp
$x^{(p-1)(q-1)} - 1$	pq
$x^{pp(p-1)} - 1$	p^3
$x^{p(p-1)(q-1)} - 1$	ppq
$x^{(p-1)(q-1)(r-1)} - 1$	pqr.

Coroll.

Coroll. 3.

58. Si x et y ſint primi ad diuiſorem N, cuius partium ad eum primarum numerus ſit $= n$, quia tam $x^n - 1$, quam $y^n - 1$, eſt diuiſibilis per N, erit etiam $x^n - y^n$ ſemper diuiſibilis per numerum N, quod eſt Theorema generalius.

Coroll. 4.

59. Propoſito ergo numero quocunque N, cuius partium ad ipſum primarum numerus ſit $= n$, quicunque numerus ad N primus pro x capiatur, formula $x^n - 1$ ſemper erit per numerum N diuiſibilis.

Coroll. 5.

60. Saepe numero vero etiam euenire poteſt, vt huiusmodi formula ſimplicior, veluti $x^{\frac{1}{2}n} - 1$ vel $x^{\frac{1}{3}n} - 1$, vel $x^{\frac{1}{4}n} - 1$ etc. ſit per numerum N diuiſibilis, quae circumſtantia pendet a certa indole numeri x.

Scholion.

61. En ergo nouam demonſtrationem Theorematis Fermatiani, quod ſi fuerit p numerus primus, omnes numeri in hac forma $a^{p-1} - 1$ contenti ſint per p diuiſibiles, dummodo numerus a non ſit per p diuiſibilis. Duas autem iam dudum huius theorematis dederam demonſtrationes; ſed ea quam hic exhibui, iis praeſtare videtur, quod non ſolum ad numeros pri-

mos

mos adſtringitur. Quicunque enim numerus N pro diviſore accipiatur, dummodo a ad eum ſit primus, hic numerus $a^n - 1$ ſemper per N erit diuiſibilis, ſiquidem n denotet numerum partium ad N primarum, quae propoſitio multo latius patet, quam Fermatiana. Ex quo eo magis vtilitas Theorematum primorum elucet, quibus numerum partium ad quemque numerum primarum definiui, quae ſine hac applicatione nimis ſterilia videri potuiſſent.

SVPPLEMENTVM QVORVNDAM THEOREMATVM ARITHMETICORVM QVAE IN NONNVLLIS DEMONSTRATIONIBVS SVPPONVNTVR.

Auctore
L. EVLERO.

Cum nuper demonſtrauiſſem, non dari duos cubos, quorum ſumma ſit cubus, ſine ſufficiente probatione aſſumſeram, omnes numeros in hac forma contentos $mm+mn+nn$, quae forma facile ad hanc reducitur: $pp+3qq$, nunquam alios admittere diuiſores, niſi qui ipſi in eadem forma contineantur. Atque hinc concluſi, ſi forma $mm+mn+nn$ fuerit cubus, aliaue poteſtas, eius radicem quoque numerum eiusdem formae eſſe futuram; cui fundamento etiam tota demonſtratio modo memorata innititur. Cum deinceps methodum nouam et maxime generalem expoſuiſſem, tres cubos inueniendi, quorum ſumma ſit cubus, quae ſimul omnibus adhuc vſitatis facilitate longe praeſtabat, non ſolum eandem indolem numerorum, in forma $mm+mn+nn$, ſeu $pp+3qq$, contentorum, tanquam certam aſſumſi, ſed etiam in euolutione ſolutionis ſuppoſui, huius generis numeros alios diuiſores primos, praeter ternarium, non implicare, niſi qui eſſent formae $6x+1$. Quin etiam viciſſim affirmare licet, omnes numeros primos iſtius formae $6x+1$, cuiusmodi ſunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc. ita eſſe comparatos, vt in forma $pp+3qq$ contineantur: veluti

$7=2^2+3.1^2$; $13=1^2+3.2^2$; $19=4^2+3.1^2$; $31=2^2+3.3^2$; etc.

 Quae

Quae Theoremata, etſi iam a Fermatio fuerant prolata, nusquam tamen adhuc demonſtrata reperiuntur: ex quo operae pretium me facturum putaui, ſi has aſſertiones rigidis demonſtrationibus confirmarem, quo ſimul ſupra memoratae demonſtrationes ad ſummum certitudinis gradum eueherentur.

His proprietatibus innituntur ratiocinia, quibus ſum deductus, ad tres cubos, quorum ſumma itidem eſt cubus, hinc autem omiſſis ratiociniis ſolutio conſueto modo adornari poterit, idoneis formis pro radicibus cuborum aſſumendis. Quarum ratio etſi non perſpiciatur, tamen in hoc Analyſeos genere problemata plerumque per huiusmodi formulas feliciter excogitatas reſolui ſolent, in quas ſaepe numero, vel caſu, vel poſt plurima tentamina, incidimus.

Ita ſi tres cubi inueniri debeant, quorum ſumma ſit cubus, poſitis eorum radicibus x, y, et z, ſtatuatur

$$x^3+y^3+z^3=v^3.$$

Tum vero iſtorum cuborum radicibus ſequentes formae tribuantur:

$$x=(m-n)p+qq; \quad z=pp-(m+n)q$$
$$y=(m+n)p-qq; \quad v=pp+(m-n)q$$

et quoniam loco quaternarum quantitatum x, y, z et v, quaternae nouae m, n, p et q in calculum introducuntur, his poſitionibus problema non reſtringi eſt cenſendum. Cum igitur vi problematis eſſe oporteat

$$x^3+y^3=v^3-z^3, \text{ ſiue}$$
$$(x+y)(xx-xy+yy)=(v-z)(vv+vz+zz)$$

per aſſumtas formas habebitur:

$x+y$

$x+y=2mp; xx-xy+yy=(mm+3nn)pp-6npqq+3q^4$
$v-z=2mq; vv+vz+zz=3p^4-6nppq+(mm+3nn)qq$
hisque valoribus ſubſtitutis obtinebitur, diuiſione vtrinque per $2m$ facta:

$$(mm+3nn)p^3-6nppqq+3pq^4=3p^4q-6nppqq+(mm+3nn)q^3$$

vbi cum termini medii ſe vtrinque deſtruant, fiet

$$(mm+3nn)(p^3-q^3)=3p^4q-3pq^4=3pq(p^3-q^3)$$

Hic igitur commodo vſu venit, vt haec aequatio per p^3-q^3 diuidi queat, in quo ipſo ſumma vtilitas noſtrarum poſitionum conſiſtit; nanciſcimur enim hanc aequationem

$$mm+3nn=3pq$$

vnde aſſumtis numeris m et n cum altero reliquorum p vel q pro lubitu alter ſponte et quidem rationaliter determinatur, quod eximium commodum non locum haberet, niſi poſtrema aequatio diuiſionem per p^3-q^3 admiſiſſet. Niſi ergo fractiones euitare velimus, habebimus ſtatim

$$q=\frac{mm+3nn}{3p}.$$

Verum etſi fractiones facile erui poſſunt, dum aeque multipla quaecunque radicum x, y, z et v pariter ſatisfaciunt, tamen ad expreſſiones ſimpliciores pertingemus, ſi numeros m et n ſtatim ita aſſumamus, vt $mm+3nn$ primo diuiſibile euadat per 3, tum vero inſuper duos contineat factores, quorum alter pro p, alter pro q accipi queat.

Primo igitur ſtatuatur $m=3k$, vt fiat

$$pq=nn+3kk$$

et quia, vt mox demonſtrabo, numeri formae $nn+3kk$

alios non admittunt diuiſores, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae, ponamus:

$$nn+3kk=(aa+3bb)(cc+3dd)$$

vt ſit:

$$p=aa+3bb \text{ et } q=cc+3dd$$

eritque

vel $n=ac+3bd$; $k=bc-ad$; $m=3bc-3ad$

vel $n=ac-3bd$; $k=bc+ad$; $m=3bc+3ad$

Hanc pluralitatem valorum per ambiguitatem ſignorum ita exhibere poterimus, vt ſit

$$m=\pm 3(bc\pm ad):\ n=\pm(ac\mp 3bd)$$

ideoque diuerſi valores pro m et n, ſumtis pro a, b, c, d, numeris quibuscunque, erunt

I. $m+n=3(bc+ad)+(ac-3bd)$; $m-n=3(bc+ad)-(ac-3bd)$

II. $m+n=3(bc+ad)-(ac+3bd)$; $m-n=3(bc+ad)+(ac-3bd)$

III. $m+n=3(bc-ad)+(ac+3bd)$; $m-n=3(bc-ad)-(ac+3bd)$

IV. $m+n=3(bc-ad)-(ac+3bd)$; $m-n=3(bc-ad)+(ac+3bd)$

Hinc autem ſequuntur ſolutiones, quas iam dudum fuſius expoſui, quare ad propoſitum reuertor, ſequentes propoſitiones demonſtraturus.

Propoſitio I.

1. Si numeri a et b non ſint numeri inter ſe primi, tum numerus $aa+3bb$ non erit primus, ſed diuiſibilis erit per quadratum maximi communis diuiſoris numerorum a et b.

Demon-

Demonſtratio.

Sit enim m maximus communis diuiſor numerorum a et b, ita vt ſit $a = mc$ et $b = md$, exiſtentibus iam c et d numeris inter ſe primis, quia alioquin non eſſet maximus communis diuiſor. Ac numerus $aa + 3bb$ induet hanc formam: $mm(cc + 3dd)$, quae propterea certo diuiſorem habet mm.

Coroll. 1.

2. Niſi ergo numeri a et b ſint primi inter ſe, numerus ex iis formatus $aa + 3bb$ primus eſſe nequit. Neque vero hinc viciſſim concludere licet, numerum $aa + 3bb$ ſemper eſſe primum, quoties numeri a et b fuerint primi inter ſe.

Coroll. 2.

3. Primo autem patet, numerum $aa + 3bb$ diviſibilem eſſe per ternarium, dum numerus a fuerit multiplum ternarii, etiamſi caeterum a et b fuerint numeri primi inter ſe. Neque vero vnquam forma $aa + 3bb$ per 9 altiorem ve ternarii poteſtatem eſt diuiſibilis, niſi ambo numeri a et b communem diuiſorem habeant 3.

Coroll. 3.

4. Deinde etiam patet, formam $aa + 3bb$ numerum parem eſſe non poſſe, niſi ambo numeri a et b vel ſint pares, vel impares. Vtroque autem caſu numerus $aa + 3bb$ non ſolum per 2, ſed etiam per 4 erit diuiſibilis.

Coroll. 4.

5. Non ergo datur numerus formae $aa + 3bb$, qui ſit impariter par, ſed ſtatim atque admittit diuiſorem 2, ſimul erit diuiſibilis per 4. Vnde quoties huiusmodi numeri fuerint pares, quaternarium, tanquam eorum factorem ſimplicem, conſiderare licet, etiamſi alias quaternarius, vtpote binarii quadratum, non inter numeros primos referatur.

Coroll. 5.

6. Si ergo numerus formae $aa + 3bb$ ſit primus, non ſolum certo conſtat, ambos numeros a et b eſſe primos inter ſe, ſed etiam vtrumque non eſſe imparem. Neceſſe igitur eſt, vt alter ſit par, alter vero impar.

Propoſitio II.

7. Si numerus formae $aa + 3bb$ per ternarium eſt diuiſibilis, tunc etiam quotus eſt numerus formae eiusdem.

Demonſtratio.

Si numerus $aa + 3bb$ per 3 eſt diuiſibilis, neceſſe eſt, vt radix prioris quadrati a ſit multiplum ternarii. Ponamus ergo $a = 3c$, et numerus propoſitus erit $9cc + 3bb$, qui per 3 diuiſus dat quotum $3cc + bb$, qui vtique eſt numerus eiusdem formae $aa + 3bb$.

Scholion.

8. Notari hic conuenit ipſum quoque ternarium eſſe numerum formae $aa + 3bb$, quippe qui prodit, ſi $a = 0$ et $b = 1$. Conſideramus autem has duas formas $aa + 3bb$ et $mm + mn + nn$ tanquam aequiualentes, quoniam

quoniam poſterior in priorem tranſit, ponendo $m=a+b$, et $n=b-a$; vnde quicquid de altera demonſtramus, etiam de altera valet. Poſterior autem, caſu $m=1$ et $n=1$, manifeſto dat 3. Videtur quidem forma $mm+mn+nn$, ſi numerorum m et n alter fuerit par, alter impar, ad priorem reduci non poſſe, quia tum in integris eſſe nequit $m=a+b$, et $n=b-a$; verum dantur adhuc aliae reductiones, ſcilicet $a=\frac{1}{2}m+n$, et $b=m$, ſiue $a=m+\frac{1}{2}n$, et $b=n$, quarum ope, ſi numerorum m et n alter fuerit par, alter impar, forma $mm+mn+nn$ ad $aa+3bb$ reducitur.

Propoſitio III.

9. Si numerus formae $aa+3bb$ per quaternarium eſt diuibilis, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae $aa+3bb$.

Demonſtratio.

Diuiſio formae $aa+3bb$ per 4 ſuccedit, ſi vel vterque numerorum a et b fuerit par, vel impar. Priori caſu ponatur $a=2c$, et $b=2d$, fietque $aa+3bb$ $=4cc+12dd$, vnde, diuiſione per 4 inſtituta, prodit quotus $cc+3dd$.

Sin autem vterque numerus a et b fuerit impar, tum eorum, vel ſumma, vel differentia, certo erit diuiſibilis per 4. Namque, cum tam $a+b$, quam $a-b$, ſit numerus par, eorumque ſumma ſit $2a$, hoc eſt numerus impariter par, neceſſe eſt, vt alter eorum ſit impariter par, alter vero pariter par. Erit ergo, vel

$a+b$

$a+b=4c$, vel $a-b=4c$, ideoque $a=4c\pm b$: quo valore ſubſtituto fiet

$$aa+3bb=16cc\pm 8bc+4bb$$

vnde, diuiſione per 4 inſtituta, prodit quotus

$$4cc\pm 2bc+bb=(b\pm c)^2+3cc.$$

Coroll. 1.

10. Hic pariter notaſſe iuuabit, ipſum quaternarium etiam eſſe numerum formae $aa+3bb$, inde reſultantem, poſitis $a=1$, et $b=1$. At ex forma $mm+mn+nn$ quaternarius naſcitur, ſi ponatur $n=0$, et $m=2$.

Coroll. 2.

11. Cum igitur viderimus, dari numeros formae $aa+3bb$, qui tam per 3, quam per 4, ſint diuiſibiles: nunc demonſtrauimus, quotos ex vtraque diuiſione reſultantes etiam eſſe numeros eiusdem formae $aa+3bb$.

Coroll. 3.

12. Quodſi autem ambo numeri a et b fuerint impares, tum quotus, ex diuiſione numeri $aa+3bb$ per 4 naſcens, erit numerus impar. Vidimus enim, quotum eſſe $4cc\pm 2bc+bb$, qui, ob b numerum imparem, certo eſt impar.

Scholion.

13. Quod hactenus de diuiſione numerorum formae $aa+3bb$ per 3 et 4 demonſtrauimus, idem demonſtrabimus de diuiſione per numerum quemcunque alium

alium primum formae $aa+3bb$; quotum ſcilicet inde oriundum pariter fore numerum eiusdem formae. Hunc in finem, vt breuitati conſulamus, denotabunt litterae P, Q, R, S etc. numeros primos formae $aa+3bb$, inter quos tamen etiam quaternarium referemus, etiamſi non ſit primus, propterea quod binarius ab hac forma eſt excludendus.

Propoſitio IV.

14. Si numerus formae $aa+3bb$ eſt diuiſibilis per numerum primum $P=pp+3qq$, tum quotus eſt etiam numerus eiusdem formae.

Demonſtratio.

Si $aa+3bb$ eſt diuiſibilis per $pp+3qq$, tum etiam $aapp+3bbpp$ per eundem eſt diuiſibilis, itemque $aapp+3aaqq$; quare etiam horum numerorum differentia $3aaqq-3bbpp$, ideoque et $aaqq-bbpp=(aq+bp)(aq-bp)$. Cum igitur $3pp+3qq$ ſit numerus primus, neceſſe eſt, vt alteruter iſtorum factorum, ſcilicet vel $aq+bp$, vel $aq-bp$, ſit per $pp+3qq$ diuiſibilis. Ponatur ergo pro vtroque caſu $aq\pm bp=m(pp+3qq)$; hincque fiet

$$a=\frac{m(pp+3qq)}{q}\pm\frac{bp}{q}=3mq+\frac{p}{q}(mp\pm b).$$

Verum quia a eſt numerus integer, et p et q numeri inter ſe primi, neceſſe eſt, vt $mp\pm b$ diuiſionem per q admittat. Ponatur ergo $mp\mp b=\mp nq$, eritque

$$b=mp\pm nq \quad \text{et} \quad a=3mq\mp np$$

Cum igitur numeri a et b neceſſario hoc modo exprimantur,

mantur, ſiquidem numerus $aa + 3bb$ per $pp + 3qq$ fuerit diuiſibilis, hinc obtinebimus

$$aa + 3bb = 3mmpp + 9mmqq + 3nnqq + nnpp$$
$$= (pp + 3qq)(nn + 3mm)$$

vnde patet, hunc numerum, per numerum primum $P = pp + 3qq$ diuiſum, pro quoto dare $nn + 3mm$, hoc eſt numerum formae $aa + 3bb$.

Coroll. 1.

15. Quoties ergo numerus formae $aa + 3bb$ diuiſorem primum habet $P = pp + 3qq$, quotus eſt numerus formae $nn + 3mm$. Vel, quod eodem redit, ſi numerus $aa + 3bb$ conſtet duobus factoribus, quorum alter ſit primus $P = pp + 3qq$, tum etiam alter factor ſiue ſit numerus primus, ſiue compoſitus, erit numerus formae $nn + 3mm$.

Coroll. 2.

16. Si igitur numerus $aa + 3bb$ duobus conſtaret factoribus, quorum alter non in forma $nn + 3mm$ contineretur, tum alter certe non erit primus formae $pp + 3qq$.

Coroll. 3.

17. Ex demonſtratione patet, quomodo innumerabiles numeri $aa + 3bb$ exhiberi queant, qui omnes ſint diuiſibiles per $pp + 3qq$; eiusmodi nempe numeri obtinentur capiendo

$$a = 3mq \pm np \quad \text{et} \quad b = mp \pm nq$$

neque

neque hic amplius opus eſt, conditionem adieciſſe, vt $pp+3qq$ ſit numerus primus; quoniam his valoribus aſſumtis in genere fit $aa+3bb=(pp+3qq)(nn+3mm)$.

Coroll. 4.

18. Hinc igitur viciſſim intelligitur, ſi duo pluresue numeri quicunque formae $aa+3bb$ in ſe inuicem multiplicentur, productum ſemper fore numerum eiusdem formae. Quod enim de producto duorum valet, facile ad productum quotcunque talium numerorum extenditur.

Scholion.

19. Etiamſi autem verum ſit, productum ex duobus numeris formae $aa+3bb$ itidem eſſe numerum eiusdem formae, tamen hinc per legitimam conſequentiam nondum inferre licet, ſi numerus formae $aa+3bb$ diuiſorem habeat quemcunque $pp+3qq$, tum etiam quotum eiusdem formae eſſe futurum: tametſi enim et hoc verum ſit, tamen peculiari indiget demonſtratione mox exponenda. Eiusmodi autem concluſionem illicitam eſſe, vel ex hoc exemplo patebit: cum productum ex duobus numeris paribus ſit numerus par, ſi quis inde concludere vellet, numerum parem per parem diuiſum quotum etiam parem eſſe praebiturum, is certe falleretur. Demonſtrationem ergo huius veritatis a diuiſore primo formae $pp+3qq$ ſum exorſus, quae conditio catenus demonſtrationem afficit, quod absque ea perperam concluderetur, cum pro-

ductum $(aq+bp)(aq-bp)$ ſit diuiſibile, alterutrum factorem diuiſibilem eſſe debere per $pp+3qq$. Deinde vero etiam ex eo, quod p et q ſint numeri inter ſe primi, deriuauimus producti $p(mp\pm b)$, quod per q eſt diuiſibile, factorem $mp\pm b$ per q diuiſibilem eſſe debere; quae poſterior conditio cum priore neceſſario eſt connexa.

Propoſitio V.

20. Si numerus $aa+3bb$ fuerit diuiſibilis per productum ex duobus pluribusue numeris primis formae $pp+3qq$, tum etiam quotus erit numerus eiusdem formae, puta $nn+3mm$.

Demonſtratio.

Sint enim P, Q, R, etc. numeri primi formae $pp+3qq$, numerusque $aa+3bb$ diuiſibilis per productum P Q R. Sit M quotus inde reſultans, ita vt ſit $aa+3bb=\text{MPQR}$. Cum igitur ſit $\frac{aa+3bb}{\text{P}}=\text{MQR}$, erit per prop. praec. MQR numerus eiusdem formae. Ponatur itaque $\text{MQR}=cc+3dd$, erit $\frac{cc+3dd}{\text{Q}}=\text{MR}$; ideoque, ob eandem rationem, hic quotus MR numerus eiusdem formae ſtatuatur, itaque $\text{MR}=ee+3ff$, et cum ſit $\frac{ee+3ff}{\text{R}}=\text{M}$, erit pariter M numerus formae $nn+3mm$.

Coroll. 1.

21. Si ergo numerus $aa+3bb$ fuerit productum ex numeris quotcunque primis P, Q, R, S etc.

formae

formae $pp+3qq$, et praeterea numero M, ita vt ſit $aa+3bb=MPQRS$, certo affirmare poterimus, hunc numerum M eſſe eiusdem formae ſeu $M=nn+3mm$.

Coroll. 2.

22. Quodſi igitur numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem A, qui non ſit numerus formae $nn+3mm$, tum alter factor neque erit numerus primus formae $pp+3qq$, neque productum ex duobus pluribusue huiusmodi numeris primis.

Coroll. 3.

23. Eodem ergo caſu ſi ponamus $aa+3bb=AB$, et A non fuerit numerus formae $nn+3mm$; tum B vnum ſaltem factorem primum complectetur, qui non erit huius formae. Nam ſi B eſt numerus primus, non erit formae $pp+3qq$, ſin autem non eſt primus, quia non ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ conſtabit, vnum ad minimum factorem continebit, qui non ſit eiusdem formae.

Coroll. 4.

24. At ſi exiſtente $aa+3bb=AB$, factor A non fuerit numerus formae $nn+3mm$, tum vel ipſe erit numerus primus, in hac forma non contentus, vel ſaltem factorem implicabit primum, in hac forma non contentum; ſi enim A ex meris numeris primis formae $pp+3qq$ eſſet conflatus, ipſe foret numerus eiusdem formae.

Coroll. 5.

25. Hinc ſequitur, ſi numerus $aa+3bb$ vnum habeat factorem primum in forma $pp+3qq$ non contentum, tum eum inſuper certo adhuc alium factorem inuoluere, qui aeque non in hac forma $pp+3qq$ contineatur.

Coroll. 6.

26. Ita iam ante vidimus, ſi numerus $aa+3bb$ ſit par, ſeu factorem habeat 2, qui numerus non eſt formae $pp+3qq$, tum eum inſuper eundem factorem 2 complecti, ſeu non ſolum per 2, ſed etiam per 4, eſſe diuiſibilem.

Scholion.

27. Exhiberi quidem poſſunt numeri formae $aa+3bb$, qui per numerum quemcunque N ſint diviſibiles, etiamſi N non ſit numerus formae $pp+3qq$; dum ſcilicet pro a et b multipla quaecunque huius numeri N accipiuntur: ita poſito $a=mN$, et $b=nN$, numerus $aa+3bb=NN(mm+3nn)$, non ſolum per N, ſed adeo per eius quadratum NN, ſit diuiſibilis; hocque ergo caſu vtique duo adſunt factores N et N, quorum neuter in forma $pp+3qq$ continetur, vti § 25. oſtendimus. Verum ſi a et b ſint numeri inter ſe primi, hic caſus locum habere nequit, ex quo merito dubitamus, num numerus inde formatus $aa+3bb$ praeter binarium vllum admittat diuiſorem, qui non ſit formae $pp+3qq$? De binario quidem hoc negari nequit, cum quoties a et b fuerint numeri impares ambo, diuiſio per 2 ſuccedat, at vero tum inſuper bina-

rius

rius ineſt, qui cum illo coniunctus praebet factorem 4, quaſi ſimplicem ſpectandum. Diligentius igitur examinandum reſtat, vtrum, dum a et b ſunt primi inter ſe, numerus $aa+3bb$ habeat vllum diuiſorem primum, qui non in forma $pp+3qq$ contineatur, nec ne? quod quidem eſſe negandum mox rigide ſum demonſtraturus; in quo negotio autem probe eſt cauendum, ne caſus binarii, quem excipi oportet, in demonſtratione quicquam turbet.

Propoſitio VI.

28. Si daretur numerus primus A, in forma $pp+3qq$ non contentus, qui eſſet diuiſor cuiuspiam numeri $aa+3bb$, numeris a et b exiſtentibus inter ſe primis, tum exhiberi poſſet alius numerus primus praeter binarium, minor B, in forma $pp+3qq$ pariter non contentus, qui etiam futurus eſſet diuiſor cuiuspiam numeri formae $aa+3bb$, in quo numeri a et b itidem forent inter ſe primi.

Demonſtratio.

Quia a et b ſunt numeri primi inter ſe, et $aa+3bb$ per A diuiſibilis ponitur, erunt ii quoque primi ad A. Si illi numeri eſſent maiores, quam A, ſtatui poſſet $a=mA\pm c$, et $b=nA\pm d$, vt numeri c et d, qui pariter tum inter ſe, quam ad A, futuri eſſent primi, forent ſemiſſi ipſius A minores, ſcilicet $c<\frac{1}{2}A$ et $d<\frac{1}{2}A$, quia A, vt pote primus, eſt impar, caſum enim quo $A=2$ hinc excipimus. Prodiret autem hac poſitione

$$aa+3bb=mmAA\pm 2mAc+cc+3nnAA\pm 6nAd+3dd$$

hincque

hincque obtineretur numerus $cc+3dd$ minor, quam AA, qui eſſet per A diuiſibilis, et quotus foret minor, quam A. Cum igitur A ſit per hypotheſin numerus in forma $pp+3qq$ non contentus, vel ipſe quotus, ſi fuerit primus, non erit numerus formae $pp+3qq$, vel, ſi ſit compoſitus, factorem habebit primum in hac forma non contentum. Sit B vel ipſe quotus vel iſte eius factor, eritque certe $B < A$, ex quo daretur numerus primus B minor, quam A, in forma $pp+3qq$ non contentus, qui eſſet diuiſor numeri $cc+3dd$, exiſtentibus numeris c et d inter ſe primis.

Dico autem hunc numerum primum B a binario fore diuerſum. Vel enim quotus $\frac{cc+3dd}{A}$ foret impar, vel par: et caſu priori binarius in eo non contineretur, ſicque numerus B non eſſet 2. Caſu autem poſteriori quotus binarium quidem, atque adeo quaternarium inuolueret; vnde cum 4 ſit numerus formae $pp+3qq$, neceſſe eſſet, vt ille quotus alium inſuper factorem primum in forma $pp+3qq$ non contentum implicaret. Vel ſi $cc+3dd$ eſſet per 4 diuiſibilis, quod eueniret, ſi vterque numerus c et d eſſet impar, eius quadrans $\frac{1}{4}(cc+3dd)$ ad formam $ee+3ff$ reduci poſſet, quae cum per A etiam nunc foret diuiſibilis, multo magis quotus $\frac{ee+3ff}{A}$ implicaret factorem primum imparem in forma $pp+3qq$ non contentum.

Propoſitio VII.

29. Omnes numeri huius formae $aa+3bb$, ſiquidem a et b ſint numeri primi inter ſe, praeter binarium nullos admittunt diuiſores primos, niſi qui ipſi in forma $pp+3qq$ contineantur. Demon-

Demonſtratio.

Si enim numerus quispiam formae $aa + 3bb$ haberet factorem primum quamtumuis magnum A, qui in forma $pp + 3qq$ non contineretur, ex eo inueniri poſſet alius numerus primus B, minor quam A, nec in forma $pp + 3qq$ contentus, qui pariter eſſet diuiſor cuiuspiam numeri formae $aa + 3bb$, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis; atque ex hoc numero B ſimili modo alii C, D, E continuo minores eiusdem indolis inueniri poſſent, haecque diminutio nunquam terminaretur, neque etiam vnquam ad binarium perueniretur. Cum igitur exhibitio numerorum integrorum continuo minorum inuoluat contradictionem: ſequitur, praeter binarium nullum dari numerum primum in forma $pp + 3qq$ non contentum, per quem vllus numerus formae $aa + 3bb$ diuidi queat, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis.

Coroll. 1.

30. Omnes ergo diuiſores primi, qui conueniunt numeris formae $aa + 3bb$, ſiquidem a et b ſint numeri inter ſe primi, ipſi in eadem forma $pp + 3qq$ continentur; dummodo hinc binarius excludatur.

Coroll. 2.

31. Si igitur numeri primi in duas claſſes diſtribuantur, quarum prior contineat eos, qui ſunt formae $pp + 3qq$; poſterior vero eos, qui ad hanc formam

reduci nequeunt: omnes numeri huius poſterioris claſſis ex ſerie diuiſorum numerorum formae $aa+3bb$ excluduntur.

Coroll. 3.

32. Niſi ergo numerus $aa+3bb$, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis, ipſe ſit primus, erit is productum ex meris numeris primis formae $pp+3qq$; dummodo quaternarius etiam inter hos numeros referatur.

Scholion.

33. Quod productum ex duobus pluribusue numeris formae $pp+3qq$ iterum in forma $aa+3bb$ contineatur, ſupra oſtendimus; indeque ergo patebat, ſi P, Q, R, S, etc. denotent numeros primos in forma $pp+3qq$ contentos, productum ex quotcunque huiusmodi numeris P, Q, R, S, etc. ſemper ad formam $aa+3bb$ reuocari poſſe. Nunc autem huius propoſitionis inuerſam demonſtrauimus, qua patet, numeros formae $aa+3bb$ nullos alios factores admittere, niſi qui ipſi ſint numeri formae $pp+3qq$. Hic quidem aſſumſimus, numeros a et b eſſe primos inter ſe: ſin autem non eſſent primi, ſed maximum haberent diviſorem communem m, vt ſit $a=mc$, et $b=md$, tum numerus $aa+3bb=mm(cc+3dd)$ primum habebit factorem quadratum mm, cuius radix poteſt eſſe numerus quicunque, praeterea vero alios non involuet

voluet factores primos, niſi qui ipſi ſint formae $pp+3qq$.

Propoſitio VIII.

34. Omnis numerus primus formae $pp+3qq$, ſi per 6 diuidatur, relinquit vnitatem, ſeu in forma numerorum $6n+1$ continetur; excepto ternario, qui etiam in forma $pp+3qq$ continetur.

Demonſtratio.

Cum $pp+3qq$ ſit numerus primus, quadratum pp per ternarium non eſt diuiſibile, ſed per 3 diuiſum relinquit 1; quia ergo $3qq$ diuiſionem per 3 admittit, ſumma $pp+3qq$ per 3 diuiſa reſiduum dabit $=1$; eritque propterea numerus formae $3m+1$. Cum autem $pp+3qq$ ſimul ſit numerus impar per hypotheſin, neceſſe eſt, vt m ſit numerus par; vnde, poſito $m=2n$, formula $6n+1$ omnes complectetur numeros primos in forma $pp+3qq$ contentos; excepto ſcilicet ternario ipſo, cuius ſingularis eſt ratio.

Coroll. 1.

35. Quia omnes numeri primi, exceptis 2 et 3, vel in hac formula $6n+1$, vel in hac $6n-2$, continentur, euidens eſt, nullos numeros primos poſterioris formae $6n-1$, in forma $pp+3qq$ contineri.

Coroll. 2.

36. Hinc omnes numeri primi formae $6n-1$ qui ſunt:

5, 11, 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, etc.
ex diuiſoribus numerorum formae $aa+3bb$ ſunt excludendi, ſeu nullus numerus huius formae $aa+3bb$, dum quidem ſint a et b numeri primi inter ſe, exhiberi poteſt, qui per vllum numerum primum formae $6n-1$ ſit diuiſibilis.

Scholion.

37. Vtrum autem omnes numeri primi alterius formae $6n+1$, qui ſunt:

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97 etc.
ſint diuiſores numerorum formae $aa+3bb$; ſeu, quod eodem redit, an omnes in forma $pp+3qq$ contineantur? ex allatis nondum affirmare licet. Inde enim tantum conſtat, omnes numeros primos formae $pp+3qq$ ſimul in forma $6n+1$ contineri, et propoſitio inuerſa peculiari indiget demonſtratione; quae ita concinnari debet, vt, propoſito numero primo formae $6n+1$ quocunque, oſtendatur, ſemper quempiam numerum formae $aa+3bb$, in quo a et b ſint numeri primi inter ſe, exhiberi poſſe, qui per illum numerum $6n+1$ ſit diuiſibilis: in quo negotio loco formae $aa+3bb$ etiam haec $ff\pm fg+gg$ illi aequiualens accipi poteſt. Si enim numerum f et g alteruter, puta g, fuerit par, erit

$$ff\pm fg+gg=(f\pm\tfrac{1}{2}g)^2+3(\tfrac{1}{2}g)^2$$

ſin

ſin autem vterque ſit impar, erit tam $f+g$, quam $f-g$, numerus par, et

$$ff \pm fg + gg = \frac{(f \mp g)^2}{2} + 3\frac{(f \pm g)^2}{2}.$$

Quodſi ergo exhiberi queat numerus $ff \pm fg + gg$ per numerum primum $6n+1$ diuiſibilis, ita vt f et g ſint primi inter ſe, ſimul conſtabit, numerum $6n+1$ eſſe numerum in forma $pp+3qq$ contentum; id quod in ſequente propoſitione demonſtrabimus.

Propoſitio. IX.

38. Omnis numerus primus formae $6n+1$ ſimul in hac forma $pp+3qq$ continetur.

Demonſtratio.

Iam dudum demonſtraui, ſi $6n+1$ fuerit numerus primus, per eum diuiſibiles eſſe omnes numeros in hac forma $a^{6n}-b^{6n}$ contentos, dummodo neuter numerorum a et b ſeorſim per $6n+1$ ſit diuiſibilis. Cum igitur in factores reſoluendo ſit

$$a^{6n}-b^{6n} = (a^{2n}-b^{2n})(a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n})$$

alteruter horum factorum per $6n+1$ ſit diuiſibilis neceſſe eſt. Quodſi ergo dentur caſus, quibus factor $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $6n+1$, vt tamen, neque a, neque b, per eum ſit diuiſibilis, iis caſibus certe alter factor $a^{4n}+a^{2n}b^{2n}+b^{4n}$, hoc eſt numerus formae $ff+fg+gg$, per $6n+1$ erit diuiſibilis, ideoque numerus primus $6n+1$ foret in forma $pp+3qq$ contentus. Demonſtrari igitur debet, dari caſus, quibus

 forma

forma $a^{2n}-b^{2n}$ non ſit diuiſibilis per $6n+1$. Ad hoc efficiendum ſumo $b=1$, et oſtendam, fieri non poſſe, vt omnes iſti numeri:

$2^{2n}-1$; $3^{2n}-1$; $4^{2n}-1$; $5^{2n}-1$; ...... $(6n)^{2n}-1$;

ſint per $6n+1$ diuiſibiles, vbi quidem pro a omnes numeros ipſo $6n+1$ minores, ideoque primos ad eum, aſſumi pono. Nam ſi omnes hi numeri per $6n+1$ eſſent diuiſibiles, eorum etiam differentiae, cum primae, tum ſecundae, et ſequentes omnes, per $6n+1$ eſſent diuiſibiles, ideoque etiam differentiae ordinis $2n$, quae ſunt omnes conſtantes, et hoc modo exprimuntur:

$$2^{2n}-\frac{2n}{1}\cdot 3^{2n}+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}4^{2n}-\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}5^{2n}\ldots\ldots(2+2n)^{2n}$$

vbi, cum ſit $2n+2<6n$, nullae poteſtates numerorum per $6n+1$ diuiſibilium ingrediuntur. Aliunde autem conſtat, differentiam ordinis $2n$ eſſe $=1.2.3.4\ldots\ldots 2n$, quae, cum certe non ſit per $6n+1$ diuiſibilis, manifeſto indicat, reperiri adeo inter hos numeros:

$2^{2n}-1$; $3^{2n}-1$; $4^{2n}-1$; ...... $(2+2n)^{2n}-1$

vnum, vel etiam plures, qui non ſint per $6n+1$ diuiſibiles. Dum autem vnicus detur huiusmodi numerus $a^{2n}-1$ per $6n+1$ non diuiſibilis, per eum erit diuiſibilis $a^{4n}+a^{2n}+1$, hoc eſt numerus formae $ff+fg+gg$, in quo neque f, neque g, ſit per $6n+1$ diuiſibilis. Conſequenter numerus primus $6n+1$ eſt formae $pp+3qq$.

Scholion.

39. Omnia ergo, quae cum in demonſtratione Theorematis, non dari duos cubos, quorum ſumma ſit cubus,

cubus, tum in ſolutione problematis de inueniendis tribus cubis, quorum ſumma ſit cubus, aſſumſeram, iam plane rigide ſunt demonſtrata. Aſſumſeram autem primo, numeros formae $aa+3bb$, ſeu $ff\pm fg+gg$, nullos admittere diuiſores primos, niſi qui ipſi ſint eiusdem formae, deinde omnes numeros primos iſtius formae ſimul in formula $6n+1$ contineri, ac viciſſim omnes numeros primos in formula $6n+1$ contentos, ſimul eſſe numeros formae $pp+3qq$. Quare nunc, tam illa demonſtratio, quam ſolutio, pro perfectis ſunt habendae. Interim tamen fateri cogor, in hac de natura numerorum Theoria plurima etiamnum deſiderari, atque *Fermatii* demonſtrationes deperditas ſine dubio multo profundiores ſpeculationes in ſe eſſe complexas. Eo enim modo, quo vſus ſum ad demonſtrandum, ſummam duorum cuborum nunquam poſſe eſſe cubum, non perſpicio, quomodo demonſtratio ad poteſtates altiores extendi poſſit; cum tamen *Fermatius* demonſtrationem habuerit, neque ſummam a^n+b^n, neque differentiam a^n-b^n, nunquam eſſe poteſtatem ſimilis exponentis c^n, quando exponens n fuerit binario maior. Demonſtrandum ergo eſſet, hanc aequationem $a^n\pm b^n=c^n$ in rationalibus nunquam locum habere poſſe, ſtatim atque exponens n binarium ſuperet, niſi vnus numerorum a, b, c euaneſcat. Deinde etſi demonſtraui, numeros primos omnes formae $6n+1$ eſſe in formula $pp+3qq$ contentos, tamen ſimili modo demonſtrare non licet, numeros primos formae $8n+3$ ſemper in forma $pp+2qq$ contineri, quod tamen aeque eſt certum, et a *Fermatio* demonſtratum.

ſtratum. Succeſſit mihi quidem demonſtratio, quod numeri primi formae $4n+1$ ſint omnes duorum quadratorum ſummae, ſimiliique modo demonſtrare poſſum, omnes numeros primos formae $8n+1$ ſimul in forma $pp+2qq$ contineri: verum plurima eiusdem generis theoremata proferri poſſunt aeque vera, veluti quod omnes numeri primi vel huius formae $20n+1$, vel $20n+9$, ſimul in formula $pp+5qq$ contineantur, et huiusmodi plura alia, quae tamen nondum video, quomodo demonſtrari queant. Ex quo Theoria numerorum nobis adhuc maximam partem abſcondita eſt cenſenda.

CON-

CONSIDERATIO FORMVLARVM, QVARVM INTEGRATIO PER ARCVS SECTIONVM CONICARVM ABSOLVI POTEST.

Auctore

L. EVLERO.

Lemmata.

I. $$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$$

poſito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

II. $$\int\frac{zzdz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}} = \frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$$

$$= \frac{1}{k}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$$

poſito $x=\sqrt{(f+gzz)}$ et $y=\sqrt{(h+kzz)}$

III. $$\int\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}}$$

$$= \frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$$

poſito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

IV. $$\int\frac{dz\sqrt{(h+kzz)}}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}$$

$$= \frac{1}{f}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$$

$$\text{poſito } x = \frac{1}{\surd(f+gzz)} \text{ et } y = \frac{z}{\surd(f+gzz)}$$

$$\text{V. } \int \frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\surd(h+kzz)} = \frac{1}{f}\int dx \surd \frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \surd \frac{k-gyy}{fyy-h}$$

$$\text{poſito } x = \frac{z}{\surd(f+gzz)} \text{ et } y = \surd \frac{h+kzz}{f+gzz}$$

$$\text{VI. } \int \frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\surd(f+gzz)} = \frac{1}{h}\int dx \surd \frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \surd \frac{g-kyy}{hyy-f}$$

$$\text{poſito } x = \frac{z}{\surd(h+kzz)} \text{ et } y = \surd \frac{f+gzz}{h+kzz}$$

$$\text{VII. } \int \frac{zz\,dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\surd(h+kzz)} = -\frac{1}{g}\int dx \surd \frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}$$

$$= \frac{1}{fk-gh}\int dy \surd \frac{fyy-h}{k-gyy}$$

$$\text{poſito } x = \frac{1}{\surd(f+gzz)} \text{ et } y = \surd \frac{h+kzz}{f+gzz}$$

$$\text{VIII. } \int \frac{zz\,dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\surd(f+gzz)} = -\frac{1}{k}\int dx \surd \frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}$$

$$= \frac{1}{gh-fk}\int dy \surd \frac{hyy-f}{g-kyy}$$

$$\text{poſito } x = \frac{1}{\surd(h+kzz)} \text{ et } y = \surd \frac{f+gzz}{h+kzz}$$

Theore-

Theoremata.

I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{fk-gh+gxx}{xx-h}}$

poſito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

II. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\int dx\sqrt{\frac{hxx-f}{g-kxx}}$

poſito $x=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

III. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+\frac{gh-fk}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$

poſito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$

IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{fk-gh}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$

poſito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

V. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{k}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}$

poſito $x=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}}$

poſito $x=\sqrt{(f+gzz)}$

VII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{gh-fk}{hk}\int dx\sqrt{\frac{xx-h}{fk-gh+gxx}}$

poſito $x=\sqrt{(h+kzz)}$

VIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}+P+Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

et $Q = \frac{-f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{kyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque $Q = \frac{f(gh-fk)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

posito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

X. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

posito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

posito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{ghk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}$

$\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{z}{(f+gzz}}$

atque $Q = \frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}} = \frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x = \sqrt{\frac{1}{(f+gzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

vbi $P = \frac{f(gh-fk)}{gk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}} = \frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Theorema Singulare.

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{-gxz}{\sqrt{p}} - \int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, vbi p denotat conſtantem arbitrariam, poſita inter x et z hac relatione:

$gkxxzz - pxx - pzz - 2xz\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + fh = 0$ ſiue

$$x = \frac{-z\sqrt{(p+fk)(p+gh)} + \sqrt{p(f+gzz)(h+kzz)}}{p-gkzz}$$

Hypotheſis.

Haec ſcribendi formula $\Pi x\,[a]$ denotet ſectionis conicae, cuius ſemiparameter $=1$, et ſemiaxis transverſus $=a$, arcum a vertice ſumtum, cui in axe transverſo conueniat abſciſſa $=x$.

Corollarium.

Si a ſit quantitas poſitiua, hoc modo deſignatur arcus ellipſis; ſin negatiua, arcus hyperbolae. Si modo x fuerit quantitas poſitiua et minor quam $2a$.

Integrationes formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$ in 12 caſus diſtributae.

Caſus I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$:

Integrale eſt immediate:

$$C - \frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gh}\right]$$

vel etiam per Theor. I.

$$C + \frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{fk}\left(1 - \frac{\sqrt{(h-kzz)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gh}{fk}\right]$$

Caſus II. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, exiſtente $fk > gh$

Integrale eſt immediate:

$$C - \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1 - z\sqrt{\frac{k}{h}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

Caſus III. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, exiſtente $fk<gb$

Integrale eſt immediate:

$$C+\frac{gb-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

Caſus IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, exiſtente $fk<gb$

Integrale eſt per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk)}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

Caſus V. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}+\frac{fk+gb}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk+bg}\right]$$

Caſus VI. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, exiſtente $fk>gb$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-k+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{g(-b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. II.

$$C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}} + \frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

Caſus VII. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, exiſtente $fk<gh$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C + \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}} - \frac{(gh-fk)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

Caſus VIII. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, exiſtente $fk<gh$

Integrale eſt per Theor. II.

$$C + z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}} - \frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. V.

$$C - \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{-f+gzz}} + \frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{z\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{h(-f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

Caſus IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, exiſtente $fk>gh$

Integrale eſt per Theor. X.

$$C - \frac{(fk-gh)z}{gh}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} - \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{(h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

$$+ \frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XIII.

$$C - \frac{(fk-gh)z}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + \frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gk}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$

$$+ \frac{f}{\sqrt{(fh-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Caſus X.

Caſus X. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}}$, exiſtente $fk > gb$

Integrale eſt per Theor. IX.

$$C + \frac{fkz}{gb}\sqrt{\frac{f-gzz}{-b+kzz}} + \frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gb)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right]$$
$$-\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\,\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{z\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{f(-b+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

vel etiam per Theor. XI.

$$C - \frac{fz}{b}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f-gzz}} + \frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\frac{fk}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk-gb)}}\right)\left[\frac{fk}{gb}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\,\Pi\frac{fk-gb}{gb}\left(\frac{\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gb}{gb}\right]$$

Caſus XI. $\int dz \sqrt{\frac{f+gzz}{-b+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. XI.

$$C - \frac{fz}{b}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\,\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gb)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

vel etiam per Theor. XII.

$$C + \frac{gz}{k}\sqrt{\frac{-b+kzz}{f+gzz}} + \frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\,\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

Caſus XII. $\int dz \sqrt{\frac{f-gzz}{b+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. XIII.

$$C - \frac{(fk+gb)}{bk}\sqrt{\frac{b+kzz}{f-gzz}} + \frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\,\Pi\frac{fk+gb}{gb}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gb}{gb}\right]$$
$$+\frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\,\Pi\frac{fk}{gb}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb}\right]$$

Omnes ergo caſus formulae $\int dz \sqrt{\frac{\alpha+\beta zz}{\gamma+\delta zz}}$, quomodocunque litterae α, β, γ, δ fuerint comparatae, per arcus ſectionum conicarum integrari poſſunt.

Non ſolum igitur formulae initio commemoratae integrationem per arcus ſectionum conicarum admittunt, ſed etiam innumerabiles aliae, quae per ſubſtitutionem ad formam $\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ ſe reduci patiuntur, cuiusmodi ſunt

$$1^\circ.\ \int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}=-\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{bxx+k}}=-\frac{1}{b}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gb}{yy-k}}$$

poſito $x=\frac{1}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{z}$

$$2^\circ.\ \int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=-\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{bxx+fk-gb}}=\frac{1}{b}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gb}}$$

poſito $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{z}$

$$3^\circ.\ \int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\frac{k}{fk+gb}\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}-\frac{g}{fk-gb}\int dz\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$$

cuius formulae reductio etiam ita inſtituitur:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\frac{f}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-b}}+\frac{g}{fk-gb}\int dx\sqrt{\frac{fxx-b}{k-gxx}}$$

poſito $x=\sqrt{\frac{b+kzz}{f+gzz}}$

vel etiam ſic:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(b+kzz)}}=\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{b+(fk-gb)xx}}=\int dy\sqrt{\frac{1-fyy}{k+(gb-fk)yy}}$$

poſito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$

Ponamus $zz=v$ atque obtinebimus ſequentes formulas, quae pariter per arcus ſectionum conicarum conſtrui poterunt:

$$1^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{\sqrt{v(b+kv)}}\ ;\quad 2^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{v\sqrt{v(b+kv)}}$$

$$3^\circ.\ \int\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(f+gv)(b+kv)}}\ ;\quad 4^\circ.\ \int\frac{dv}{\sqrt{v(f+gv)(b+kv)}}$$

5°

$$5°.\int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{(h+kv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}}\;;\quad 6°.\int\frac{dv}{v\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$$

$$7°.\int\frac{dv}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(h+kv)}}\;;\quad 8°.\int\frac{dv\sqrt{v}}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kv)}}$$

hae enim viciſſim, poſito $v=zz$, ad formas praecedentes reducuntur.

Hinc patet, iſtam formulam ſatis late patentem ad arcus ſectionum conicarum reduci poſſe

$$\int\frac{(A+Bu)du}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)(\varepsilon+\zeta u)}},$$

quae imprimis notari meretur. Ponatur enim $\alpha+\beta u=v$, vt ſit $u=\frac{v-\alpha}{\beta}$, haecque formula transmutabitur in hanc:

$$\int\frac{dv(A\beta-B\alpha+Bv)}{\beta\sqrt{v(\beta\gamma-\alpha\delta+\delta v)(\beta\varepsilon-\alpha\zeta+\zeta v)}},$$

quae ad binas formulas, ſub n°. 3 et 4 allatas, reuocatur. Quare, ſi $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ habeat tres factores reales, haec formula

$$\int\frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$$

modo expoſito integrari poterit: ſemper autem vnum factorem certe habet realem. Sin autem bini ſint imaginarii, formula $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ ita referri poteſt $y(pp+2npqy+qqyy)$, exiſtente $nn<1$, vt definiendum ſit integrale harum formularum:

$$\int\frac{Cdy}{\sqrt{y(pp+2npqy+qqyy)}}+\int\frac{Ddy\sqrt{y}}{\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}}$$

Ponatur $\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}=p+qyz$, fietque $y=\frac{2p(z-n)}{q(1-zz)}$, qua ſubſtitutione prior formula abit in $\frac{C\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ conſtruibilem: poſterior vero

 in

in hanc $\frac{2D\sqrt{2p}}{\sqrt{q}}\int\frac{dz\sqrt{(z-n)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$; cum vero ſit $\int\frac{dz\sqrt{(z-n)}}{(1-zz)^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{z\sqrt{(z-n)}}{\sqrt{(1-zz)}}-\frac{1}{2}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ etiam haec per ſuperiora conſtrui poteſt. Sicque in genere habetur conſtructio huius formulae $\int\frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$.

Problema 1.

Integrationem huius formulae $\int\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}}$ per arcus ſectionum conicarum perficere.

Solutio.

Quantitatem $a+bx+cxx+dx^3+ex^4$ ſemper in duos factores trinomiales reales reſoluere licet, qui ſint $(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$ et $(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)$, ita vt habeatur haec formula integranda: $\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)(\delta+2\varepsilon x+\zeta xx)}}$ Ponatur $\delta+2\varepsilon x+\zeta xx=(\alpha+2\beta x+\gamma xx)y$, vt formula propoſita fiat $\int\frac{dx}{(\alpha+2\beta x+\gamma xx)\sqrt{y}}$. At aequatio aſſumta per radicis extractionem praebet

$$\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy\sqrt{(pyy+qy+r)},$$

poſito $p=\beta\beta-\alpha\gamma$; $q=\alpha\zeta-2\beta\varepsilon+\gamma\delta$; et $r=\varepsilon\varepsilon-\beta\zeta$. Tum vero eadem differentiata dat:

$$dx(\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy)=\tfrac{1}{2}dy(\alpha+2\beta x+\gamma xx)$$

ſeu $$\frac{dx}{\alpha+2\beta x+\gamma xx}=\frac{\frac{1}{2}dy}{\varepsilon+\zeta x-\beta y-\gamma xy}$$

Quare

are ſi pro hoc poſtremo denominatore valorem irra-
alem modo inuentum ſubſtituamus, formula propo-
bit in hanc:

$$\int \frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{y(pyy+qy+r)}},$$

gratio per arcus ſectionum conicarum ſupra

naſcitur quaeſtio, quid tenendum ſit de hac

$$\frac{dx(A+Bx+Cxx)}{\sqrt{(a+bx+cyy+dx^3+ex^4)}}$$

ſt, non neceſſe eſſe, vt numeratori al-
ipſius x tribuantur; quam etiam Cel.
, ſe in genere ad rectificationem ſe-
ctionum conicarum perducere non poſſe. Conſiderat quidem in Vol. IV. Mem. Acad. R. Berol. pag. 254. caſum, quo A=o, C=o et a=o, ita vt formula ſit $\int \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(o+cx+dx^2+ex^3)}}$ conaturque oſtendere (pag. 257.) eius integrationem caſu $dd=4ce$ per arcus ſectionum conicarum abſolui poſſe: verum methodus, qua vtitur, negotium minime conficere videtur, vti rem accuratius perpendenti mox patebit. Transformationes autem, quas deinceps tradit, caſus nonnunquam hoc modo tractabiles ſuppeditant. Quocirca haec inueſtigatio, vti eſt difficillima, merito omni attentione digna eſt cenſenda: vnde etiam mea tentamina ſuper hac quaeſtione propoſuiſſe iuuabit.

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$

V. $\int\frac{dz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}}=\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}$

$=\frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{k-gyy}{fyy-h}}$

posito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VI. $\int\frac{dz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}=\frac{1}{h}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}}$

$=\frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

posito $x=\frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

VII. $\int\frac{zzdz}{(f+gzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(h+kzz)}}=-\frac{1}{g}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}$

$=\frac{1}{fk-gh}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

VIII. $\int\frac{zzdz}{(h+kzz)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(f+gzz)}}=-\frac{1}{k}\int dx\sqrt{\frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}}$

$=\frac{1}{gh-fk}\int dy\sqrt{\frac{hyy-f}{g-kyy}}$

posito $x=\frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

Theore-

Theoremata.

I. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = \frac{1}{k} \int dx \surd \frac{fk-gh+gxx}{xx-h}$

poſito $x = \surd (h+kzz)$

II. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = z \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} - \int dx \surd \frac{hxx-f}{g-kxx}$

poſito $x = \surd \frac{f+gzz}{h+kzz}$

III. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = z \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} + \frac{gh-fk}{k} \int dx \surd \frac{1-hxx}{g+(fk-gh)xx}$

poſito $x = \frac{1}{\surd (h+kzz)}$

IV. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = \frac{g}{k} z \surd \frac{h+kzz}{f+gzz} + \frac{fk-gh}{k} \int dx \surd \frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}$

poſito $x = \frac{z}{\surd (f+gzz)}$

V. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = \frac{g}{k} z \surd \frac{h+kzz}{f+gzz} + \frac{f}{k} \int dx \surd \frac{k-gxx}{fxx-h}$

poſito $x = \surd \frac{h+kzz}{f+gzz}$

VI. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = \frac{f}{h} \int dz \surd \frac{h+kzz}{f+gzz} + \frac{gh-fk}{gh} \int dx \surd \frac{xx-f}{gh-fk+kxx}$

poſito $x = \surd (f+gzz)$

VII. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = \frac{f}{h} \int dz \surd \frac{h+kzz}{f+gzz} + \frac{gh-fk}{hk} \int dx \surd \frac{xx-h}{fk-gh+gxx}$

poſito $x = \surd (h+kzz)$

VIII. $\int dz \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} = z \surd \frac{f+gzz}{h+kzz} + P + Q$

ubi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

et $Q = \frac{-f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{kyy-f}}$

poſito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + P + Q$

ubi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

poſito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque $Q = \frac{f(gh-fk)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-kxx}{f+(gh-fk)xx}} = \frac{f}{g}\int dy\sqrt{\frac{g-kyy}{hyy-f}}$

poſito $x = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz}}$ et $y = \sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$

X. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{gh-fk}{gh}z\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} + \frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P$

ubi $P = \frac{gh-fk}{gk}\int dx\sqrt{\frac{g+(fk-gh)xx}{1-hxx}} = \frac{fk-gh}{gh}\int dy\sqrt{\frac{f+(gh-fk)yy}{1-kyy}}$

poſito $x = \frac{1}{\sqrt{(h+kzz}}$ et $y = \frac{z}{\sqrt{(h+kzz)}}$

XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}} = \frac{f}{h}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}} + P + Q$

ubi $P = \frac{gh-fk}{gh}\int dx\sqrt{\frac{xx-f}{gh-fk+kxx}} = \frac{gh-fk}{hk}\int dy\sqrt{\frac{yy-h}{fk-gh+gyy}}$

poſito $x = \sqrt{(f+gzz)}$ et $y = \sqrt{(h+kzz)}$

atque

atque $Q=\frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}=\frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{g}{k}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+P+Q$

vbi $P=\frac{f(gh-fk)}{ghk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}=\frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{z}{(f+gzz)}}$

atque $Q=\frac{f(fk-gh)}{gh}\int dx\sqrt{\frac{1-fxx}{k+(gh-fk)xx}}=\frac{-f}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-h}{k-gyy}}$

poſito $x=\sqrt{\frac{1}{(f+gzz)}}$ et $y=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

XIII. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{gh-fk}{hk}z\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{h}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+P$

vbi $P=\frac{f(gh-fk)}{gk}\int dx\sqrt{\frac{k+(gh-fk)xx}{1-fxx}}=\frac{fk-gh}{hk}\int dy\sqrt{\frac{h+(fk-gh)yy}{1-gyy}}$

poſito $x=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Theorema Singulare.

$\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=\frac{-gxz}{\sqrt{p}}-\int dx\sqrt{\frac{f+gxx}{h+kxx}}$, vbi p denotat conſtantem arbitrariam, poſita inter x et z hac relatione:

$gkxxzz - pxx - pzz - 2xz\sqrt{(p+fk)(p+gb)} + fb = 0$ ſiue

$$x = \frac{-z\sqrt{(p+fk)(p+gb)} + \sqrt{p(f+gzz)(b+kzz)}}{p-gkzz}$$

Hypotheſis.

Haec ſcribendi formula $\Pi x\,[a]$ denotet ſectionis conicae, cuius ſemiparameter $=1$, et ſemiaxis transverſus $=a$, arcum a vertice ſumtum, cui in axe transverſo conueniat abſciſſa $=x$.

Corollarium.

Si a ſit quantitas poſitiua, hoc modo deſignatur arcus ellipſis; ſin negatiua, arcus hyperbolae. Si modo x fuerit quantitas poſitiua et minor quam $2a$.

Integrationes formulae $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$ in 12 caſus diſtributae.

Caſus I. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$:

Integrale eſt immediate:

$$C - \frac{(fk+gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gb}\left(1-z\sqrt{\frac{k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk+gb}\right]$$

vel etiam per Theor. I.

$$C + \frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{k}}\right)\left[\frac{fk+gb}{fk}\right]$$

Caſus II. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{b-kzz}}$, exiſtente $fk>gb$

Integrale eſt immediate:

$$C - \frac{(fk-gb)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gb}\left(1-z\sqrt{\frac{k}{b}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gb}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(fk-gb}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(b-kzz)}}{\sqrt{b}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

Caſus III. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, exiſtente $fk<gb$

Integrale eſt immediate:

$$C+\frac{gb-fk}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gb-fk}\left(z\sqrt{\frac{k}{b}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gb-fk}\right]$$

Caſus IV. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{b+kzz}}$, exiſtente $fk<gb$

Integrale eſt per Theor. I.

$$C+\frac{f}{\sqrt{(gb-fk}}\Pi\frac{gb-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(b+kzz)}}{\sqrt{b}}-1\right)\left[\frac{-gb+fk}{fk}\right]$$

Caſus V. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk+gb)}}\Pi\frac{fk+gb}{fk}$$
$$\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gb)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk+gb}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{b+kzz}}+\frac{fk+gb}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk+gb}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(b+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk+bg}\right]$$

Caſus VI. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{-b+kzz}}$, exiſtente $fk>gb$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-k+kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(fk-gb)}}\Pi\frac{fk-gb}{fk}\left(1-\frac{\sqrt{(fk-gb)}}{\sqrt{g(-b+kzz}}\right)\left[\frac{fk-gb}{fk}\right]$$

vel

vel etiam per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{-h+kzz}}+\frac{fk-gh}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{fk-gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(-f+gzz)}}{\sqrt{g(-h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{fk-gh}\right]$$

Caſus VII. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h-kzz}}$, exiſtente $fk<gh$

Integrale eſt per Theor. III.

$$C+\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{f-gzz}}-\frac{(gh-fk)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh-fk}\left(\frac{\sqrt{f(h-kzz)}}{\sqrt{h(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh-fk}\right]$$

Caſus VIII. $\int dz\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}$, exiſtente $fk<gh$

Integrale eſt per Theor. II.

$$C+z\sqrt{\frac{-f+gzz}{h-kzz}}-\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{g(h-kzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

vel etiam per Theor. V.

$$C-\frac{gz}{k}\sqrt{\frac{h-kzz}{-f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(gh-fk)}}\Pi\frac{gh-fk}{fk}\left(\frac{z\sqrt{(gh-fk)}}{\sqrt{h(-f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-gh+fk}{fk}\right]$$

Caſus IX. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}$, exiſtente $fk>gh$

Integrale eſt per Theor. X.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{gh}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{z\sqrt{k}}{\sqrt{(h+kzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{f}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk-gh)z}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gk}\left(1-\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fh-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{\sqrt{h}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Caſus X.

Caſus X. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}$, exiſtente $fk>gh$

Integrale eſt per Theor. IX.

$$C+\frac{fkz}{gh}\sqrt{\frac{f-gzz}{-h+kzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{k(f-gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$-\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{z\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{f(-h+kzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f-gzz}}+\frac{(fk-gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{h(f+gzz)}}{\sqrt{(fk-gh)}}\right)\left[\frac{fk}{gh}\right]$$
$$+\frac{f}{\sqrt{(fk-gh)}}\Pi\frac{fk-gh}{gh}\left(\frac{\sqrt{(fk-gh)}}{\sqrt{k(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk+gh}{gh}\right]$$

Caſus XI. $\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{-h+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. XI.

$$C-\frac{fz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{k(f+gzz)}}{\sqrt{(fk+gh)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

vel etiam per Theor. XII.

$$C+\frac{gz}{h}\sqrt{\frac{-h+kzz}{f+gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(fk+gh)}}{\sqrt{k(f+gzz)}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f+gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

Caſus XII. $\int dz\sqrt{\frac{f-gzz}{h+kzz}}$

Integrale eſt per Theor. XIII.

$$C-\frac{(fk+gh)}{hk}\sqrt{\frac{h+kzz}{f-gzz}}+\frac{f}{\sqrt{(fk+gh)}}\Pi\frac{fk+gh}{gh}\left(1-\frac{\sqrt{(f-gzz)}}{\sqrt{f}}\right)\left[\frac{fk+gh}{gh}\right]$$
$$+\frac{(fk+gh)}{k\sqrt{fk}}\Pi\frac{fk}{gh}\left(\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{(f-gzz)}}-1\right)\left[\frac{-fk}{gh}\right]$$

Omnes ergo caſus formulae $\int dz\sqrt{\frac{\alpha+\beta zz}{\gamma+\delta zz}}$, quomodocunque litterae α, β, γ, δ fuerint comparatae, per arcus ſectionum conicarum integrari poſſunt.

Non ſolum igitur formulae initio commemoratae integrationem per arcus ſectionum conicarum admittunt, ſed etiam innumerabiles aliae, quae per ſubſtitutionem ad formam $\int dx\sqrt{\frac{\alpha+\beta xx}{\gamma+\delta xx}}$ ſe reduci patiuntur, cuiusmodi ſunt

$$1^{\circ}.\ \int\frac{dz}{zz}\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}=-\int dx\sqrt{\frac{fxx+g}{hxx+k}}=-\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{fyy-fk+gh}{yy-k}}$$

poſito $x=\frac{1}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$

$$2^{\circ}.\ \int\frac{dz}{zz\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=-\frac{1}{f}\int dx\sqrt{\frac{xx-g}{hxx+fk-gh}}=\frac{1}{h}\int dy\sqrt{\frac{yy-k}{fyy-fk+gh}}$$

poſito $x=\frac{\sqrt{(f+gzz)}}{z}$ et $y=\frac{\sqrt{(h+kzz)}}{z}$

$$3^{\circ}.\ \int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\frac{k}{fk-gh}\int dz\sqrt{\frac{f+gzz}{h+kzz}}-\frac{g}{fk-gh}\int dz\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$$

cuius formulae reductio etiam ita inſtituitur:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\frac{f}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{k-gxx}{fxx-h}}+\frac{g}{fk-gh}\int dx\sqrt{\frac{fxx-h}{k-gxx}}$$

poſito $x=\sqrt{\frac{h+kzz}{f+gzz}}$

vel etiam ſic:

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(f+gzz)(h+kzz)}}=\int dx\sqrt{\frac{1-gxx}{h+(fk-gh)xx}}-\int dy\sqrt{\frac{1-fyy}{k+(gh-fk)yy}}$$

poſito $x=\frac{z}{\sqrt{(f+gzz)}}$ et $y=\frac{1}{\sqrt{(f+gzz)}}$.

Ponamus $zz=v$ atque obtinebimus ſequentes formulas, quae pariter per arcus ſectionum conicarum conſtrui poterunt:

$$1^{\circ}.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{\sqrt{v(h+kv)}};\quad 2^{\circ}.\ \int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{v\sqrt{v(h+kv)}}$$

$$3^{\circ}.\ \int\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{(f+gv)(h+kv)}};\quad 4^{\circ}.\ \int\frac{dv}{\sqrt{v(f+gv)(h+kv)}}$$

5°

$5^\circ.\int\frac{dv\sqrt{(f+gv)}}{(b+kv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}}$; $6^\circ.\int\frac{dv}{v\sqrt{v(f+gv)(b+kv)}}$

$7^\circ.\int\frac{dv}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v(b+kv)}}$; $8^\circ.\int\frac{dv\sqrt{v}}{(f+gv)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(b+kv)}}$

hae enim viciſſim, poſito $v=zz$, ad formas praecedentes reducuntur.

Hinc patet, iſtam formulam ſatis late patentem ad arcus ſectionum conicarum reduci poſſe

$$\int\frac{(A+Bu)du}{\sqrt{(\alpha+\beta u)(\gamma+\delta u)(\varepsilon+\zeta u)}},$$

quae imprimis notari meretur. Ponatur enim $\alpha+\beta u=v$, vt ſit $u=\frac{v-\alpha}{\beta}$, haecque formula transmutabitur in hanc:

$$\int\frac{dv(A\beta-B\alpha+Bv)}{\beta\sqrt{v(\beta\gamma-\alpha\delta+\delta v)(\beta\varepsilon-\alpha\zeta+\zeta v)}},$$

quae ad binas formulas, ſub n°. 3 et 4 allatas, reuocatur. Quare, ſi $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ habeat tres factores reales, haec formula

$$\int\frac{dx(A+Bx)}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3)}}$$

modo expoſito integrari poterit: ſemper autem vnum factorem certe habet realem. Sin autem bini ſint imaginarii, formula $\alpha+\beta x+\gamma xx+\delta x^3$ ita referri poteſt $y(pp+2npqy+qqyy)$, exiſtente $nn<1$, vt definiendum ſit integrale harum formularum:

$$\int\frac{-Cdy}{\sqrt{y(pp+2npqy+qqyy)}}+\int\frac{Ddy\sqrt{y}}{\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}}$$

Ponatur $\sqrt{(pp+2npqy+qqyy)}=p+qyz$, fietque $y=\frac{2p(z-n)}{q(1-zz)}$, qua ſubſtitutione prior formula abit in $\frac{C\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z-n)(1-z)(1+z)}}$ conſtruibilem: poſterior vero

 in

modo differentiale ex variatione ipſius u ortum colligamus, ob du conſtans conſequemur:

$$ddy = n(n-1)du^2 \int P dx (u+x)^{n-2}.$$

5. Cum igitur his integralibus modo praeſcripto ita ſumtis, vt ipſi x valor quidam determinatus tribuatur, ſicque ea in meras functiones ipſius u abeant, habeamus hos valores:

$$y = \int P dx (u+x)^n; \quad \frac{dy}{du} = n \int P dx (u+x)^{n-1}$$
$$\text{et } \frac{ddy}{du^2} = n(n-1) \int P dx (u+x)^{n-2}$$

neceſſe eſt, vt vi aequationis propoſitae ſit

$$A \int P dx (u+x)^n + n(B+Cu) \int P dx (u+x)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(D+Eu+Fuu) \int P dx (u+x)^{n-2} = 0$$

in quibus integralibus ſola x vt variabilis ſpectatur, u vero pro conſtante habetur. Haec autem aequatio tum ſolum locum habere debet, cum poſt ſingulas integrationes quantitati x valor ille determinatus ab u non pendens fuerit tributus.

6. In genere autem, antequam ipſi x iſte valor aſſignatur, iſta quantitas non euaneſcet, ſed potius cuipiam quantitati ex u et x compoſitae aequabitur, quae autem ita comparata eſſe debet, vt illo caſu, quo pro x valor ille determinatus ſcribatur, euaneſcat. Sit igitur $R(u+x)^{n-1}$ ea quantitas indefinita, cui ſuperior forma in genere aequetur, vbi R ſit eiusmodi functio ipſius x, quae tam pro eo valore ipſius x, quo integralia ſingula euaneſcentia redduntur, quam pro eo, qui ipſi poſt integrationes tribuitur, in nihilum abeat. Quos valores ex ipſa indole huius functiones R colligi

colligi conuenit, haecque etiam eſt cauſa, cur eos non ſtatim determinauerim.

7. Quamdiu ergo x adhuc eſt variabilis, et u vt conſtans ſpectatur, neceſſe eſt, vt expreſſio $R(u+x)^{n-1}$ aequetur huic formulae integrali:

$$\int P dx (u+x)^{n-2} \left(\begin{array}{lll} +Auu & +2Aux & +Axx \\ +nCuu & +nCux & +nBx \\ & +nBu & +n(n-1)D \\ +n(n-1)Fuu & +n(n-1)Eu & \end{array} \right)$$

cuius propterea differentiale aequari oportet huic:

$$(u+x)^{n-2} \left(\begin{array}{l} u\,dR + x\,dR \\ \quad + (n-1) R\,dx \end{array} \right)$$

Quia autem R ab u pendere non debet, conditiones ſatisfacientes his aequationibus continentur:

$$A + nC + n(n-1)F = 0$$

$$dR = (2A + nC) P x\,dx + n(B + (n-1)E) P\,dx$$

$$x\,dR + (n-1) R\,dx = APxx\,dx + nBPx\,dx + n(n-1) DP\,dx.$$

8. Si valor ipſius dR ex ſecunda in tertia ſubſtituatur, habebitur:

$$(n-1)R = -(A+nC)Pxx - n(n-1)EPx + n(n-1)DP$$

et quia ex prima eſt $-A - nC = n(n-1)F$, prodit

$$R = nP(Fxx - Ex + D).$$

Deinde ob $2A + nC = -2n(n-1)F - nC$, ſecunda induit hanc formam:

$$dR = nP\,dx(-(C + 2(n-1)F)x + B + (n-1)E)$$

quae per illam diuiſa dat:

$$\frac{dR}{R} = \frac{-(C + 2(n-1)F)x\,dx + (B + (n-1)E)\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

 vnde

vnde, cum R fuerit inuentum, erit

$$P\,dx = \frac{R\,dx}{n(Fxx - Ex + D)},$$

exponens autem n per primam aequationem definitur, vnde fit $n = \frac{P - C + \sqrt{((P-C)^2 - 4AF)}}{2F}$.

9. Hic plures caſus perpendendi occurrunt, ac primo quidem ratione exponentis n, ſi is prodierit imaginarius, puta $n = \mu + \nu\sqrt{-1}$, notandum eſt, eſſe $r^{\sqrt{-1}} = \text{coſ.}\, lr + \sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\, lr$, ideoque $r^n = r^\mu(\text{coſ.}\, \nu lr + \sqrt{-1}.\ \text{ſin.}\, \nu lr)$, vnde imaginarium exponentis ope ſinuum ad imaginaria ſimplicia reducitur, ex quibus deinceps eorum deſtructio mutua facilius perficietur. Deinde inueſtigatio functionis R huc redigitur, vt ſit

$$lR = -(n-1)l(Fxx - Ex + D) - \int \frac{Cx\,dx - B\,dx}{Fxx - Ex + D}$$

quae denuo ad hanc formam perducitur:

$$lR = -\left(n - 1 + \tfrac{C}{2F}\right)l(Fxx - Ex + D) + \left(B - \tfrac{CE}{2F}\right)\int \frac{dx}{Fxx - Ex + D}$$

Niſi ergo ſit $B - \frac{CE}{2F} = 0$, videndum eſt, an formulae integrandae denominator $Fxx - Ex + D$ habeat duos factores ſimplices reales et inaequales, an vero aequales? tum vero an in huiusmodi factores ſit irreſolubilis? praeterea caſus, quo $F = 0$ peculiarem euolutionem poſtulat, quos diuerſos caſus ſeorſim pertractabo.

I. Caſus quo $B = \frac{CE}{2F}$.

10. Aequatio ergo reſoluenda erit

$$Ay + \frac{C}{2F}(E + 2Fu)\frac{dy}{du} + (D + Eu + Fuu)\frac{ddy}{du^2} = 0$$

pro qua ſi ſumamus $y = \int P\,dx(u+x)^n$, habemus primo

$$n = \frac{P - C \pm \sqrt{((P-C)^2 - 4AF)}}{2F},$$ tum vero

$R =$

$$R = (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}, \text{ hincque}$$

$$P dx = \tfrac{1}{n} dx (D - Ex + Fxx)^{-n-\frac{C}{2F}}, \text{ ita vt ſit}$$

$$y = \tfrac{1}{n} \int \frac{dx (u+x)^n}{(D - Ex + Fxx)^{+n+\frac{C}{2F}}}$$

quod integrale eiusmodi terminis ipſius x comprehendi debet, quibus quantitas $(u+x)^{n-1} (D - Ex + Fxx)^{-n+1-\frac{C}{2F}}$ euaneſcat.

11. Quoties ergo formula $D - Ex + Fxx$ duos factores habet reales, ea duplici caſu euaneſcit, vnde bini integrationis termini conſtitui poſſunt; ad hoc autem neceſſe eſt, vt eius exponens $-n + 1 - \frac{C}{2F}$, qui ſit $= \frac{F \mp \surd((F-C)^2 - 4AF)}{2F}$, ſit poſitiuus, quia alioquin quantitas illa, cui formula propoſita aequalis ſtatuitur, non in nihilum abiret. Hoc igitur caſu conſtructio aequationis nullam habebit difficultatem, propterea quod ob ſignum ambiguum exponenti ſemper valor poſitiuus tribui poteſt. Sit enim exponens ille $= m$, et habebitur

$$4FFmm - 4FFm + 4AF + 2CF - CC = 0$$

quae aequatio ſi habet radices reales, ob terminum $-4FFm$ negatiuum, altera certe erit poſitiua. Quem caſum diligenter proſequamur.

12. Sit $D = aa$, $E = 0$ et $F = -1$, ita vt haec aequatio ſit reſoluenda:

$$Ay + \frac{Cu\,dy}{du} + (aa - uu)\frac{ddy}{du^2} = 0,$$

 eritque

eritque $n = \frac{1 + C \pm \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$, cuius valor ſemper eſt realis, niſi A ſit quantitas negatiua maior quam $\frac{1}{4}(1 + C)^2$: hinc erit

$$m = -n + 1 + \tfrac{1}{2}C = \frac{1 \mp \sqrt{(1 + 2C + CC + 4A)}}{2}$$

cuius valore poſitiuo ſumto, erit pro reſolutione noſtrae aequationis

$$y = \tfrac{1}{n}\int dx(u + x)^n (aa - xx)^{m-1}$$

quod integrale ita capiatur, vt poſito $x = a$ euaneſcat; tum vero ſtatuatur $x = -a$, et pro y prodibit functio ipſius u aequationi ſatisfaciens. Prout iam fuerit numerus realis, vel imaginarius, ſequentia exempla ſubiungamus.

13. *Exemplum* 1. Sit $C = 2$, et $A = -2$, vt propoſita ſit haec aequatio:

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = 0.$$

erit $n = 1$, et $m = 1$, vnde fit $y = \int dx(u + x)$ et ob

$$-2y + \frac{2udy}{du} + \frac{(aa - uu)ddy}{du^2} = aa - xx$$

integratio ipſius y ita abſolui debet, vt pro terminis integralis $aa - xx$ euaneſcat, hoc eſt ſi fuerit $x = a$ et $x = -a$. Fiet ergo $y = ux + \frac{1}{2}xx - au - \frac{1}{2}aa$, et poſito iam $x = -a$, erit $y = -2au$, qui valor aequationi vtique ſatisfacit, et generalius quidem $y = au$, ex quo porro integrale completum eruitur, ponendo $y = uz$, vnde fit

$$2aadudz + (aa - uu)uddz = 0, \text{ ſeu } \frac{ddz}{dz} + \frac{2aadu}{u(aa - uu)} = 0$$

vel $\frac{ddz}{dz} + \frac{2du}{u} + \frac{2udu}{aa - uu} = 0$; quae integrata dat

$$\frac{uudz}{aa - uu} = \beta du, \text{ porroque } z = \gamma - \beta u - \frac{\beta aa}{u}$$

conſequenter $y = \gamma u - \beta uu - \beta aa$.

ANNO-

ANNOTATIONES IN LOCVM QVENDAM CARTESII AD CIRCVLI QVADRATVRAM SPECTANTEM.

Auctore

L. EVLERO.

In excerptis ex Manuſcriptis *Carteſii* paucis quidem verbis refertur conſtructio quaedam geometrica promtiſſime ad circuli veram dimenſionem appropinquans, ſed quae ſiue *Carteſius* ipſe eam inuenerit, ſiue ab alio habuerit communicatam, acutiſſimum inuentoris ingenium, illo praeſertim tempore, luculenter declarat. Qui deinceps hoc idem argumentum pertractarunt, quantum equidem memini, nullam huius eximiae conſtructionis mentionem faciunt, vt periculum ſit, ne tandem penitus obliuione obruatur. Demonſtratio quidem, quae non adiuncta reperitur, haud difficulter ſuppletur; verum non ſolum elegantia conſtructionis vberiorem explicationem meretur, ſed etiam tam inſignes concluſiones inde deduci poſſunt, quae per ſe omni attentione dignae videntur. Pulcherrima autem haec conſtructio ipſis *Carteſii* verbis ita eſt propoſita:

„Ad quadrandum circulum nihil aptius inuenio, Tab. I.
„quam ſi dato quadrato *bf* adiungatur rectangulum *cg* Fig. 1.
„comprehenſum ſub lineis *ac* et *bc*, quod ſit aequale
„quartae parti quadrati *bf*: item rectangulum *db* fa-
„ctum ex lineis *da*, *dc*, aequale quartae parti praece-

„dentis; et eodem modo rectangulum ei, atque alia „infinita vsque ad x: et erit haec linea ax diameter „circuli, cuius circumferentia aequalis eſt circumferen„tiae quadrati bf.

Vis igitur huius conſtructionis in hoc conſiſtit, vt continua appoſitione iſtiusmodi rectangulorum cg, dh, ei, etc. quorum anguli ſuperiores dextri in diagonalem quadrati productam cadunt, tandem ad punctum x perueniatur, quo terminatur diameter circuli ax, cuius peripheria aequalis eſt perimetro quadrati bf, ſeu quadruplo rectae ab.

Cum horum rectangulorum quodque aequetur parti quartae praecedentis, iam ipſe *Carteſius* obſeruat, ſummam omnium horum rectangulorum aequalem fore parti tertiae quadrati bf; quod quidem manifeſtum eſt, cum huius ſeriei $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} +$ etc. in infinitum continuatae ſumma ſit $= \frac{1}{3}$.

Praeterea etiam *Carteſius* indicat rationem, cui haec conſtructio innititur; concipit ſcilicet polygona regularia 8, 16, 32, 64 etc. laterum, quorum perimetri ſint inter ſe aequales ſimulque perimetro quadrati bf. Iam cum ab ſit diameter circuli quadrato inſcripti, ita affirmat fore ac diametrum circuli octogono inſcripti, tum vero ad diametrum circuli 16gono, ae 32gono inſcripti, et ita porro. Vnde liquet ax fore diametrum circuli polygono infinitorum laterum regulari inſcripti, ideoque eius peripheriam aequari perimetro quadrati.

Quo facilius demonſtrationem huius conſtructionis adornem, obſeruo, quae hic de diametris circulorum dicuntur, etiam valere pro radiis, ita vt ab, ac, ad,

ae

ae etc. ſpectari poſſint tanquam radii circulorum, quibus ſi circumſcribantur polygona regularia 4, 8, 16, 32 etc. laterum, eorum perimetri futurae ſint inter ſe aequales.

Problema.

Dato circulo, cui polygonum regulare quodcunque ſit circumſcriptum, inuenire circulum alium, cui ſi polygonum regulare duplo plurium laterum circumſcribatur, perimeter huius polygoni aequalis ſit futura perimetro illius polygoni.

Solutio.

Sit ENM circulus datus et EP ſemilatus polygoni ipſi circumſcripti, centro exiſtente in C; CF autem ſit radius circuli quaeſiti, et FQ ſemilatus polygoni ipſi circumſcribendi. Neceſſe ergo eſt, vt ſit FQ ſemiſſis ipſius EP, et angulus FCQ ſemiſſis anguli ECP. Quare recta CQ angulum ECP, et recta QO ipſi CE parallela lineam EP biſecabit. Cum nunc Fig. 2.

ſit $EV : CE = FQ : CF$

et $EV : CE = EP : CE + CP$

erit $FQ : CF = EP : CE + CP$

ſed quia $FQ = \frac{1}{2}EP$, erit etiam $CF = \frac{1}{2}(CE + CP)$. Hinc auferatur CF, et habebitur $EF = \frac{1}{2}(CP - CE)$ ex quo erit rectangulum $CF . EF = \frac{1}{4}(CP^2 - CE^2) = \frac{1}{4}EP^2$ ideoque punctum F ita definiri debet, vt ſit rectangulum, ſub CF et EF comprehenſum, aequale parti quartae quadrati rectae EP, ſeu ipſi quadrato rectae FQ.

Coroll. 1

Coroll. 1.

Cum ſit $CF \cdot EF = FQ^2$ erit $CF : FQ = FQ : EF$, vnde ducta recta QE, fiet triangulum FQE ſimile triangulo FCQ, vel ECV, ideoque angulus FQE aequalis angulo ECV.

Coroll. 2.

Cum ſit $CE : EV = EO : EF$, punctum F etiam ita definiri poterit; ex O ducatur recta ad CV productam normalis, eaque baſi CE in F occurret.

Coroll. 3.

Si polygonum circulo ENM circumſcriptum ſit n laterum, erit angulus $ECP = \frac{\pi}{n}$, denotante π menſuram duorum angulorum rectorum; et angulus $FCQ = \frac{\pi}{2n}$. Hinc ſi radius $CE = r$, erit $EP = r \,\text{tang.} \frac{\pi}{n}$ et $FQ = \frac{1}{2} r \,\text{tang.} \frac{\pi}{n}$.

Coroll. 4.

Iam quia angulus $FQE = \frac{\pi}{2n}$ erit $EF = FQ \,\text{tang.} \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{2} r \,\text{tang.} \frac{\pi}{n} \,\text{tang.} \frac{\pi}{2n}$. Verum ſi vocemus $CF = s$, erit $FQ = s \,\text{tang.} \frac{\pi}{2n}$, vnde ob $FQ = \frac{1}{2} r \,\text{tang.} \frac{\pi}{n}$ fiet $s = \frac{1}{2} r \,\text{tang.} \frac{\pi}{n} \,\text{cot.} \frac{\pi}{2n}$.

Demonſtratio Conſtructionis Carteſianae.

Fig. 3. Sit iam CE radius circuli quadrato inſcripti, CF octogono inſcripti, CG polygono regulari 16 laterum, CH

CH polygono 32 laterum et ita porro. Sit porro EP ſemilatus quadrati, FQ ſemilatus octogoni, GR polygoni 16, HS polygoni 32 laterum, etc. et quia haec polygona eiusdem perimetri aſſumuntur, erit $FQ = \frac{1}{2}EP$; $GR = \frac{1}{2}FQ = \frac{1}{4}EP$; $HS = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{4}FQ = \frac{1}{8}EP$, etc. Iam ex problemate praemiſſo eſt $CF.\,EF = \frac{1}{4}EP^2 = FQ^2$; tum vero ex eodem ſimili modo

$$CG.\,FG = \tfrac{1}{4}FQ^2 = \tfrac{1}{4}CF.\,EF = GR^2$$

$$CH.\,GH = \tfrac{1}{4}GR^2 = \tfrac{1}{4}CG.\,FG = HS^2 \text{ etc.}$$

ſicque puncta F, G, H etc. eodem plane modo determinantur, vti habet conſtructio *Carteſiana*; et quia interualla EF, FG, GH etc. continuo fiunt minora, ſatis promte ad punctum vltimum x appropinquatur, eritque Cx radius circuli, cuius peripheria aequatur perimetro polygonorum praecedentium, ideoque rectae EP octies ſumtae. Q. E. D.

Coroll. 1.

Si ponatur $CE = a$, $CF = b$, $CG = c$, $CH = d$, etc. progreſſio harum quantitatum ita eſt comparata, vt ſit ob $EP = a$

$$b(b-a) = \tfrac{1}{4}aa;\quad c(c-b) = \tfrac{1}{4}b(b-a);\quad d(d-c) = \tfrac{1}{4}c(c-b) \text{ etc.}$$

ideoque

$$b = \frac{a+\sqrt{2aa}}{2};\quad c = \frac{b+\sqrt{(2bb-ab)}}{2};\quad d = \frac{c+\sqrt{(2cc-bc)}}{2} \text{ etc.}$$

et harum quantitatum infiniteſima eſt radius circuli cuius peripheria eſt $= 8a$.

Coroll. 2.

Cum ſit angulus ECP ſemirectus, ſeu $ECP = \frac{\pi}{4}$, erunt anguli $FCQ = \frac{\pi}{8}$; $GCR = \frac{\pi}{16}$; $HCS = \frac{\pi}{32}$, etc. Quare ob $EP = a$; $FQ = \frac{1}{2}a$; $GR = \frac{1}{4}a$; $HS = \frac{1}{8}a$ etc. erit per cotangentes

$CE = a\cot.\frac{\pi}{4}$; $CF = \frac{1}{2}a\cot.\frac{\pi}{8}$; $CG = \frac{1}{4}a\cot.\frac{\pi}{16}$; $CH = \frac{1}{8}a\cot.\frac{\pi}{32}$ etc.

Vnde denotante n numerum infinitum, ſit harum linearum vltima $= \frac{1}{n}a\cot.\frac{\pi}{4n}$.

Coroll. 3.

Sed $\cot.\frac{\pi}{4n} = 1 : \text{tang.}\frac{\pi}{4n}$; et quia angulus $\frac{\pi}{4n}$ eſt infinite paruus, erit $\text{tang.}\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4n}$, ideoque $\cot.\frac{\pi}{4n} = \frac{4n}{\pi}$. Quare linearum illarum vltima ſit $= \frac{4a}{\pi}$, quo radio ſi circulus deſcribatur, erit eius peripheria $= 2\pi.\frac{4a}{\pi} = 8a$.

Coroll. 4.

Deinde quia ex coroll. 4 praec. probl. eſt $EF = FQ\,\text{tang.}\,FCQ$, erit ob eandem rationem:

$FG = GR.\text{tang.}\,GCR$; $GH = HS.\text{tang.}\,HCS$ etc.

vnde haec interualla ſequenti modo exprimentur:

$EF = \frac{1}{2}a\,\text{tang.}\frac{\pi}{8}$; $FG = \frac{1}{4}a\,\text{tang.}\frac{\pi}{16}$; $GH = \frac{1}{8}a\,\text{tang.}\frac{\pi}{32}$ etc.

antecedens vero ad analogiam $CE = a\,\text{tang.}\frac{\pi}{4} = a$.

Coroll. 5.

His cum praecedentibus collatis nanciſcemur:

$CF = a(\text{tang.}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{tang.}\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}a\cot.\frac{\pi}{8}$

$CG = a(\text{tang.}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{tang.}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\text{tang.}\frac{\pi}{16}) = \frac{1}{4}a\cot.\frac{\pi}{16}$

$CH = a(\text{tang.}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\text{tang.}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\text{tang.}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\text{tang.}\frac{\pi}{32}) = \frac{1}{8}a\cot.\frac{\pi}{32}$

etc.

ſicque

ſicque omnium huiusmodi progreſſionum ſummae expedite aſſignari poſſunt.

Coroll. 6.

In infinitum ergo progrediendo obtinebimus ſummationem huius ſeriei:

$$\text{tang.}\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\,\text{tang.}\tfrac{\pi}{8}+\tfrac{1}{4}\,\text{tang.}\tfrac{\pi}{16}+\tfrac{1}{8}\,\text{tang.}\tfrac{\pi}{32}+\text{etc.}=\tfrac{4}{\pi}$$

quae ergo per quadraturam circuli determinatur. Hinc occaſionem arripio ſequens problema ſoluendi.

Problema.

Denotante Φ arcum quemcunque circuli cuius radius $=1$, inuenire ſummam huius ſeriei infinitae:

$$\text{tang.}\Phi+\tfrac{1}{2}\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi+\tfrac{1}{4}\text{tang.}\tfrac{1}{4}\Phi+\tfrac{1}{8}\text{tang}\,\tfrac{1}{8}\Phi+\tfrac{1}{16}\text{tang.}\tfrac{1}{16}\Phi\ \text{etc.}$$

Solutio.

Si in fig. 2. vti ſupra eſt conſtructa, ponatur angulus $ECP=\Phi$, erit $FCQ=\tfrac{1}{2}\Phi$: iam poſito $FQ=1$ erit $EP=2$, hincque $CE=2\,\text{cot.}\,\Phi$; $CF=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\Phi$ et $EF=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi$, ex quo habetur: Tab. I. Fig. 2.

$$2\,\text{cot.}\Phi=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\Phi-\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi \quad\text{et}\quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\Phi-2\,\text{cot.}\Phi$$

eodemque modo $\text{tang.}\Phi=\text{cot.}\Phi-2\,\text{cot.}\,2\Phi$. Collocentur hi valores tangentium per cotangentes expreſſi in ſerie propoſita

$$\begin{aligned}\text{tang.}\Phi&=\text{cot.}\Phi-2\,\text{cot.}\,2\Phi\\ \tfrac{1}{2}\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi&=\tfrac{1}{2}\text{cot}\,\tfrac{1}{2}\Phi-\text{cot.}\Phi\\ \tfrac{1}{4}\text{tang.}\tfrac{1}{4}\Phi&=\tfrac{1}{4}\text{cot}\tfrac{1}{4}\Phi-\tfrac{1}{2}\text{cot.}\tfrac{1}{2}\Phi\\ \tfrac{1}{8}\text{tang.}\tfrac{1}{8}\Phi&=\tfrac{1}{8}\text{cot.}\tfrac{1}{8}\Phi-\tfrac{1}{4}\text{cot.}\tfrac{1}{4}\Phi\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

et colligendo conſequemur:

$$\operatorname{tang}\Phi = \cot\Phi - 2\cot 2\Phi$$
$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi = \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\Phi - 2\cot 2\Phi$$
$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Phi = \tfrac{1}{4}\cot\tfrac{1}{4}\Phi - 2\cot 2\Phi$$
$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}\Phi = \tfrac{1}{8}\cot\tfrac{1}{8}\Phi - 2\cot 2\Phi$$
etc.

vnde in infinitum progrediendo, ſi n denotet numerum infinitum, quia $\operatorname{tang}\frac{1}{n}\Phi = \frac{\Phi}{n}$, hincque $\cot\frac{1}{n}\Phi = \frac{n}{\Phi}$, erit: $\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}\Phi = \frac{1}{\Phi}$, ideoque ſumma ſeriei propoſitae:

$$\operatorname{tang}\Phi + \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}\Phi + \tfrac{1}{8}\operatorname{tang}\tfrac{1}{8}\Phi + \text{etc.} = \tfrac{1}{\Phi} - 2\cot 2\Phi$$

Vnde ſi 2Φ eſt angulus rectus, ſeu $\Phi = \frac{\pi}{4}$, ob $\cot\frac{\pi}{2} = 0$ fit ſeriei ſumma $= \frac{1}{\Phi} = \frac{4}{\pi}$, qui eſt caſus ſupra tractatus.

Ex hac ſerie plures aliae deriuari poſſunt non minus notatu dignae.

I. Ex eius differentiatione adipiſcimur:

$$\frac{1}{\cos\Phi^2} + \frac{1}{4\cos\frac{1}{2}\Phi^2} + \frac{1}{4^2\cos\frac{1}{4}\Phi^2} + \frac{1}{4^3\cos\frac{1}{8}\Phi^2} + \frac{1}{4^4\cos\frac{1}{16}\Phi^2}$$
$$+ \text{et} = -\frac{1}{\Phi\Phi} + \frac{4}{\sin 2\Phi^2}$$

vel cum ſit $\frac{1}{\cos\Phi} = \sec\Phi$, erit quoque

$$(\sec\Phi)^2 + \tfrac{1}{4}(\sec\tfrac{1}{2}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^2}(\sec\tfrac{1}{4}\Phi)^2 + \tfrac{1}{4^3}(\sec\tfrac{1}{8}\Phi)^2 + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{\sin\Phi^2\cos\Phi^2} - \frac{1}{\Phi\Phi}$$

II. Deinde ob $\cos\Phi^2 = \frac{1+\cos 2\Phi}{2}$, et $\sin 2\Phi^2 = \frac{1-\cos 4\Phi}{2}$ erit vbique per 2 diuidendo:

$$\frac{1}{1+\cos 2\Phi} + \frac{1}{4(1+\cos\Phi)} + \frac{1}{4^2(1+\cos\frac{1}{2}\Phi)}$$
$$+ \frac{1}{4^3(1+\cos\frac{1}{4}\Phi)} + \text{etc.} = \frac{2}{1-\cos 4\Phi} - \frac{1}{2\Phi\Phi}$$

ſeu

ſeu pro Φ ſcribendo $\frac{1}{2}\Phi$

$$\frac{1}{1+\text{coſ.}\,\Phi}+\frac{1}{4(1+\text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi)}+\frac{1}{4^2(1+\text{coſ.}\,\frac{1}{4}\Phi)}+\frac{1}{4^3(1+\text{coſ.}\,\frac{1}{8}\Phi)}+\text{etc.}=\frac{2}{1-\text{coſ.}\,2\Phi}-\frac{2}{\Phi\Phi}.$$

III. Si ſeries inuenta per $d\Phi$ multiplicetur et integretur, ob $\int d\Phi\,\text{tang.}\,\Phi=\int\frac{d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}=-l\,\text{coſ.}\,\Phi$, et $\int 2\,d\Phi\,\text{cot.}\,2\Phi=l\,\text{ſin.}\,2\Phi$, habebitur

$$-l\,\text{coſ.}\,\Phi-l\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{2}\Phi-l\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{4}\Phi-l\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{8}\Phi-l\,\text{coſ.}\,\tfrac{1}{16}\Phi-\text{etc.}=l\Phi-l\,\text{ſin.}\,2\Phi+\text{Conſt.}$$

ad quam conſtantem definiendam ponamus $\Phi=0$, et quia $l\,\text{coſ.}\,0=l\,1=0$, ex priori parte habemus 0, ex poſteriori vero ob $\text{ſin.}\,2\Phi=2\Phi$, habemus $l\Phi-l\,2\Phi+\text{Conſt.}=-l\,2+\text{Conſt.}$ vnde $\text{Conſt.}=l\,2$. Hinc ad numeros progrediendo erit:

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\Phi\ \text{coſ.}\,\frac{1}{2}\Phi\ \text{coſ.}\,\frac{1}{4}\Phi\ \text{coſ.}\,\frac{1}{8}\Phi\ \text{coſ.}\,\frac{1}{16}\Phi\ \text{etc.}}=\frac{2\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$

IV. Cum ſit $\frac{1}{\text{coſ.}\,\Phi}=\text{ſec.}\,\Phi$, habebitur etiam hoc Theorema pro ſecantibus:

$$\text{ſec.}\,\Phi\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}\Phi\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}\Phi\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}\Phi\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}\Phi\ \text{etc.}=\frac{2\Phi}{\text{ſin.}\,2\Phi}$$

vnde ſi ratio diametri ad peripheriam ponatur $=1:\pi$ et q denotet angulum rectum, ſi ſtatuamus $2\Phi=q,=\frac{\pi}{2}$ erit:

$$\text{ſec.}\,\tfrac{1}{2}q\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{4}q\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{8}q\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{16}q\ \text{ſec.}\,\tfrac{1}{32}q\ \text{etc.}=\tfrac{\pi}{2}.$$

Problema.

Innenire ſeriem quantitatum: a, b, c, d, e, f, etc. cuius haec ſit proprietas, vt ſit:
$c(c-b)=\frac{1}{4}b(b-a)$; $d(d-c)=\frac{1}{4}c(-b)$; $e(e-d)=\frac{1}{4}d(d-c)$ etc. ſeu vt quantitates inde deriuatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ f(f-e),\ \text{etc.}$$

decreſcant ſecundum rationem quadruplam.

Solutio.

Cum ſit $\text{tang.}\frac{1}{2}\Phi=\cot.\frac{1}{2}\Phi-2\cot.\Phi$, ſi multiplicemus vtrinque per $\cot.\frac{1}{2}\Phi$, ob $\text{tang.}\frac{1}{2}\Phi\cot.\frac{1}{2}\Phi=1$ erit $\cot.\frac{1}{2}\Phi(\cot.\frac{1}{2}\Phi-2\cot.\Phi)=1$. Statuatur ergo $a=r\cot.\Phi$; $b=\frac{1}{2}r\cot.\frac{1}{2}\Phi$; $c=\frac{1}{4}r\cot.\frac{1}{4}\Phi$; $d=\frac{1}{8}r\cot.\frac{1}{8}\Phi$, etc. eritque

$$\frac{2b}{r}\left(\frac{2b}{r}-\frac{2a}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } b(b-a)=\frac{rr}{4}$$

$$\frac{4c}{r}\left(\frac{4c}{r}-\frac{4b}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } c(c-b)=\frac{rr}{16}$$

$$\frac{8d}{r}\left(\frac{8d}{r}-\frac{8c}{r}\right)=1 \quad \text{hinc } d(d-c)=\frac{rr}{64}$$

etc.

Quare haec ſeries
$a=r\cot\Phi$; $b=\frac{1}{2}r\cot.\frac{1}{2}\Phi$; $c=\frac{1}{4}r\cot.\frac{1}{4}\Phi$; $d=\frac{1}{8}r\cot.\frac{1}{8}\Phi$; etc.
hanc habet proprietatem, vt quantitates inde formatae

$$b(b-a);\ c(c-b);\ d(d-c);\ e(e-d);\ \text{etc.}$$

in ratione quadrupla decreſcant.

Coroll. 1.

Coroll. I.

Datis duobus terminis primis a et b reliqui c, d, e, f inde ſucceſſiue ita determinantur, vt ſit $c = \frac{b + \sqrt{(2bb - ab)}}{2}$; $d = \frac{c + \sqrt{(2cc - bc)}}{2}$; $e = \frac{d + \sqrt{(2dd - cd)}}{2}$ etc. ideoque binis terminis initialibus pro lubitu aſſumtis, tota ſeries ope harum formularum exhiberi poteſt.

Coroll. 2.

Datis autem terminis a et b, inde angulus Φ cum quantitate r ita definitur, vt ſit:

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{2\sqrt{(bb - ab)}}{a} \text{ et } r = 2\sqrt{(bb - ab)}$$

vnde inuento angulo Φ reliqui termini etiam ita exprimuntur, vt ſit:

$$c = \tfrac{1}{4} r \cot.\, \tfrac{1}{4}\Phi;\ d = \tfrac{1}{8} r \cot.\, \tfrac{1}{8}\Phi;\ e = \tfrac{1}{16} r \cot.\, \tfrac{1}{16}\Phi \text{ etc.}$$

Coroll. 3.

Hinc iſtius ſeriei termini infiniteſimi fient $= \frac{r}{\Phi}$, ad quem valorem termini ſeriei ſatis cito conuergunt. Quaeratur ſcilicet in circulo radii $= 1$, arcus cuius tangens $= \frac{2\sqrt{(bb - ab)}}{a}$, qui arcus ſit $= \Phi$, et ſeriei noſtrae termini infiniteſimi erunt $= \frac{2\sqrt{(bb - ab)}}{\Phi}$.

Scholion.

Caeterum hic monuiſſe iuuabit puncta P, Q, R, S, x ſita eſſe in curua quadratrice veterum, propterea quod applicatae EP, FQ, GR, HS eandem inter ſe rationem tenent, quam anguli ECP, FCQ, Tab. I. Fig. 3.

FCQ, GCR, HCS etc. Et quoniam x, vbi haec curua in baſin incidit, iam olim circuli quadraturam indicare eſt inuentum, vnde ei iſtud nomen eſt inditum, conſtructio Carteſii cum hac veterum quadratura egregie quidem conuenit; ſed multo commodius et accuratius puncta E, F, G, H etc. ſucceſſiue praebet, quam a continua biſectione angulorum expectari queat.

DEMON-

DEMONSTRATIO GENERALIS THEOREMATIS NEWTONIANI DE BINOMIO AD POTENTIAM INDEFINITAM ELEVANDO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1)

Notiſſimum, ac per vniuerſam analyſin vtiliſſimum theorema Newtonianum, cuius ope $(x+1)^m$ per ſeriem indefinitam potentiarum ipſius x exhibetur, inductione primum erutum, variis poſtea demonſtrationibus a diuerſis auctoribus communitum eſt. Inuenerunt autem, qui exactius rem rimati ſunt, plerumque aliquid, quod in probationibus eiusmodi reprehenderent. Solet enim in analyſi hoc theorema ad quosuis caſus extendi, ac adhiberi, ſiue m ſit numerus integer, vel fractus; ſiue ſit poſitiuus, vel negatiuus; ſiue ſit rationalis, vel irrationalis, vel tranſcendens; immo, ſiue habeat valorem realem, aut imaginarium. Requirere ergo videtur ea, qua praecellunt diſciplinae mathematicae, exactitudo, vt et huius theorematis eiusmodi condatur demonſtratio, quae ad omnes modo dictos valores ipſius m ſe aequaliter extendat, nec ad vnum horum caſuum ſolum pertineat.

2) Pleraeque autem, quae hactenus prolatae ſunt, huius theorematis demonſtrationes, ſi ſecundum hanc

 normam

normam examinentur, non ſatis generales deprehendi ſolent. Non enim ordinario, niſi pro eo caſu, vbi m eſt numerus integer poſitiuus, valent, nec ſalua veritate ad caeteros extendi poſſunt. Optarunt hac de cauſa iam diu Mathematici, vt vniuerſalis, neque ad vllum valorem ſpecialem ipſius m reſtricta, proſtaret demonſtratio. Contigit mihi nuperrime, eruere probationem, perfectionibus, quae requirebantur, donatam, quam cum Ill. Academia ſcientiarum hic communicare conſtitui.

3) Cum explicari debeat $(x+1)^m$ per ſeriem, ſupponamus:

$$(x+1)^m = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} \ldots$$

vbi A, B, C, D -- potentiarum ipſius x coefficientes indicant. Arbitrarie quidem hic aſſumo, fore hanc formam ſeriei, quae hic quaeritur, aſt nihil inde metuendum eſt. Si enim impoſſibile foret, vt $(x+1)^m$ per ſeriem eius formae, qualem habet expoſita, explicetur, ratiocinia, quibus ſolutionem tentabo, ipſa, hanc impoſſibilitatem detegent. Totum enim negotium huc redit, vt coefficientium valores eruamus, quos ſi imaginarios inuenimus, formam hanc impoſſibilem, ſin minus, poſſibilem ipſam eſſe, rite concludimus.

4) Patet autem hic ſtatim, coefficientium valores ab m pendere, ſeu A B C --- fore functiones ipſius m. Non enim fieri poteſt, vt coefficientes maneant iidem, ſi m varietur; ſequeretur enim inde hoc abſurdum, eſſe $(x+1)^m . x = (x+1)^{m+1}$. Sunt itaque coefficientes iſti, pro dato quidem valore ipſius m conſtantes, aſt non ita pro diuerſis. Sic v. g. ſi loco

m ſuc-

m ſucceſſiue ponantur $m-1$, $m-2$, $m-3$ - - - coeffi. cientes A, B, C, D - - - diuerſos quoque induere debent valores. In poſterum valores iſtos, hac ratione indicabo, vt

$$\begin{array}{llll} m & \text{reſpondeat } A^m, & B^m, & C^m \text{ - - - - -} \\ m-1 & \text{- - - - } A^{m-1}, & B^{m-1}, & C^{m-1} \text{ - -} \\ m-2 & \text{- - - - } A^{m-2}, & B^{m-2}, & C^{m-2} \text{ - -} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ r & \text{- - - - } A^r, & B^r, & C^r \text{ - - - - - -} \end{array}$$

vnde probe notandum, niſi aliud monuerim, expreſſiones huiusmodi A^r, B^r, C^r - - hic mihi non denotare, vt alias ſolent, potentias iſtas harum literarum, A, B, C, neque r hic eſſe exponentem potentiae, ſed indicem, ex quo, ad quemnam ipſius m valorem quoduis A, B, C, pertineat, determinatur.

5) Suppoſitis his, cum ſit per hypotheſin $(x+1)^m = A^m x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} + D^m x^{m-3}$ - - - erit $(2(x+1))^m = 2^m A^m x^m + 2^m B^m x^{m-1} + 2^m C^m x^{m-2} + 2^m D^m x^{m-3}$ - - - . Eſt vero quoque, $(2(x+1))^m = ((2x+1)+1)^m$, vnde neceſſe eſt, vt ſit $(2(x+1))^m = A^m(2x+1)^m + B^m(2x+1)^{m-1} + C^m(2x+1)^{m-2} + D^m(2x+1)^{m-3}$. - - -

6) Euoluamus ſeorſim, potentias $(2x+1)^m$, $(2x+1)^{m-1}$, $(2x+1)^{m-2}$ - - - in ſeries, ac erit

$$\begin{array}{ll} (2x+1)^m & = 2^m A^m x^m + 2^{m-1} B^m x^{m-1} + 2^{m-2} C^m x^{m-2} + 2^{m-3} D^m x^{m-3} \text{ - -} \\ (2x+1)^{m-1} & = \text{ - - - } + 2^{m-1} A^{m-1} x^{m-1} + 2^{m-2} B^{m-1} x^{m-2} + 2^{m-3} C^{m-1} x^{m-3} \text{ - -} \\ (2x+1)^{m-2} & = \text{ - - - - - - - - - } + 2^{m-2} A^{m-2} x^{m-2} + 2^{m-3} B^{m-2} x^{m-3} \text{ - -} \\ (2x+1)^{m-3} & = \text{ - - - - - - - - - - - } + 2^{m-3} A^{m-3} x^{m-3} \text{ - -} \end{array}$$

 Quodſi

Quodſi hos valores in formulam ſupra repertam ſubſtituamus, erit

$$\begin{array}{llll}(2x+2)^m = 2^m A^m A^m x^m + 2^{m-1} A^m B^m x^{m-1} & + 2^{m-2} A^m C^m x^{m-2} & + 2^{m-3} A^m D^m x^{m-3} & \ldots \\ + 2^{m-1} B^m A^{m-1} & + 2^{m-2} B^m B^{m-1} & + 2^{m-3} B^m C^{m-1} & \ldots \\ & + 2^{m-2} C^m A^{m-2} & + 2^{m-3} C^m B^{m-2} & \ldots \\ & & + 2^{m-3} D^m A^{m-3} & \ldots \end{array}$$

Obtinuimus itaque 2 diuerſos valores pro $(2x+2)^m$, quos comparando, ſequentes oriuntur aequationes: $2^m A^m = 2^m A^m A^m$, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1})$, $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} + C^m A^{m-2})$, $2^m D^m = 2^{m-3}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-3})$. - -

7) Reducta prima harum aequationum pro inueniendo A^m, erit $A^m = 1$. Indicium hoc eſt, A generatim non pendere ab *m*, ſed eſſe quantitatem conſtantem. Cum enim *m* indeterminatum aſſumtum ſit, ac ipſi reſpondens valor A repertus ſit $= 1$, patet, vtcunque variato *m*, A valorem $= 1$ conſtanter retinere, vt proinde $A^m = A^{m-1} = A^{m-2} \ldots = 1$. Secunda aequatio, $2^m B^m = 2^{m-1}(A^m B^m + B^m A^{m-1}) = 2^{m-1}(2B^m) = 2^m B^m$, identica eſt, vnde ex ipſa nihil concludi poteſt. B itaque hac ratione determinari nequit, ſed eius valor peculiari ratiocinio inueſtigandus erit.

8) Seponamus tantiſper hanc diſquiſitionem, ac ad caeteras aequationes progrediamur, et quomodo caeteri coefficientes pendeant a B inueſtigemus. Ex tertia aequatione eſt $2^m C^m = 2^{m-2}(A^m C^m + B^m B^{m-1} C^m A^{m-2})$, qua reducta, adhibendo ſupra repertum valorem ipſius A, erit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1.\,2}$. Antequam nunc ad quartam aequationem tranſeamus, antecedenter notandum erit,

cum

cum ſit $C^m = \frac{B^m B^{m-1}}{1.2}$, fore $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.2}$.
$C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.2}$. - - - Eſt enim C^{m-1} aequale C quod prodit, ſi loco m ſubſtituatur $m-1$, facta autem hac ſubſtitutione, vtique fieri debet $C^{m-1} = \frac{B^{m-1} B^{m-2}}{1.2}$; ac ita porro. Idem etiam in caeteris coefficientibus, ſi ſimiles occurrant caſus, ſemper tenendum erit. Si iam reducamus aequationem $2^m D^m = 2^{m-1}(A^m D^m + B^m C^{m-1} + C^m B^{m-2} + D^m A^{m-3})$ erit $6 D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.2.} + \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.2}$, ſiue $D^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2}}{1.2.3}$.
Simili modo, operationem vlterius continuando, reperitur $E^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3}}{1.2.3.4}$, $F^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} B^{m-3} B^{m-4}}{1.2.3.4.5}$
Vnde colligimus fore generatim, ſi ſit T coefficiens termini $r$ti ab initio, non connumerato termino primo, $T^m = \frac{B^m B^{m-1} B^{m-2} \ldots B^{m-r+1}}{1.2.3 \ldots r}$.

9) Abſolutum ſic erit negotium, modo valor ipſius B, quem methodo, quam hactenus ſecuti ſumus, non obtinuimus, eruatur. Viam parabunt huic inueſtigationi ſequentia: Sumatur m recipere valores r, s, et $r+s$, ac erit $(x+1)^{r+s} = (x+1)^r \cdot (x+1)^s$. Eſt autem $(x+1)^r = x^r + B^r x^{r-1} \ldots$, ac $(x+1)^s = x^s + B^s x^{s-1}$ - - - - - - - - - - - - hinc $(x+1)^r \cdot (x+1)^s = x^{r+s} + B^r x^{r+s-1}$ - - - - $+ B^s x^{r+s-1}$ - - - -

 qua-

quapropter, cum ſit quoque $(x+1)^{r+s} = x^{r+s} = x^{r+s} + b^{r+s} x^{r+s-1} - - - -$, erit $B^{r+s} = B^r + B^s$.

10. Cum igitur ſit generatim $B^{r+s} = B^r + B^s$, erit quoque $B^{r+s} - B^r = B^s$. Si itaque *m* increſcat quantitate quacunque *s*, erit incrementum, quod inde capit B^m, perpetuo conſtans, qualecunque fuerit *m*. Denotat nempe $B^{r+s} - B^r$ incrementum, quod capit B, ſi *r* augeatur quantitate *s*; hoc vero cum ſit $= B^s$, patet hoc incrementum ſolum ab *s*, nullatenus vero ab *r*, pendere, quapropter idem ſemper reperiri debet, quamdiu *s* manet idem, vtcunque varietur *r*. Viciſſim autem hinc facile patet, ſi *m* decreſcat quantitate *s*, fore decrementum, quod inde patitur B^m, itidem conſtans, ac aequale B^s.

11) Ponendo itaque ſucceſſiue $m = - - - - - - - 3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s - - - -$ erunt B reſpondentia $- - - - -3B^s, -2B^s, -B^s, 0, +B^s, +2B^s, +3B^s - - - - -$, vnde patet, ſi *m* ſumantur in progreſſione arithmetica, progrediente ſecundum denominatorem *s*, fore B reſpondentia, itidem in eiusmodi progreſſione, habente denominatorem B. Quoduis itaque B erit ad reſpondens ſuum *m* in ratione conſtante. Sit *s* infinite paruum, et progreſſio $- - - - - -3s, -2s, -s, 0, +s, +2s, +3s - - -$ vtrimque in infinitum continuata, tranſeundo per continuum, comprehendet omnes valores reales ipſius *m*, quapropter generatim affirmari poteſt, ſi *m* fuerit numerus realis quicunque, fore B^m ad *m* in ratione data.

12) Ex-

12) Exhiberi itaque poteſt generatim B^m per λm, poſito λ numero conſtanti, vnde nunc res eo reducta eſt, vt ad problematis ſolutionem plenariam, vlterius nil niſi determinatio ipſius λ requiratur. Sufficit autem, cum ſit conſtans, vt pro vnico caſu determinetur. Fieri hoc poteſt minimo negotio ſequenti ratione: Cum pro caſu $m = 1$, ſeries $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2} \ldots = x + B^1 + \frac{C^1}{x} \ldots$ abire debeat in $(x+1)$, erit $B^1 = 1$. Quapropter, cum ſit $B^m = \lambda m$, fiet pro hoc caſu $\lambda = 1$. Conſtat itaque generatim, pro quouis numero reali eſſe $B^m = m$.

13) Notamus hic ſpeciatim, quoniam in ſequentibus aliquis huius propoſitionis erit vſus: eſſe quoque pro caſu $m = 0$, $\lambda = 1$. Patet hoc ſufficienter ex eo, quod o ſit aliquis valorum realium, quos m recipere poteſt. Quodſi vero adhuc quis dubitet de veritate huius aſſerti, facile conuinci de ea re poterit. Cum nempe s ac B^s dari queant, quae tam parum differunt ab o ac B^0, quantum ipſe volueris, dabuntur s ac B^s, quorum ratio a ratione o ad B^0 recedit, minus omni quanto dabili. Aſt ratio haec s ad B^s perpetuo manet $= 1 : 1$, quantumuis parua ſint. Ratio itaque o ad B^0 ab ratione 1 ad 1 differt minus omni quanto dabili, vnde huic aequalis non eſſe non poteſt. Patet igitur, B eſſe functionem ipſius m talem, vt non ſolum m ac B^m euaneſcant ſimul, ſed euaneſcant etiam cum ratione aequalitatis.

14) Quanquam ratiocinium, quo hic vſus ſum, rem pro valoribus realibus ipſius m prorſus extra dubium

bium ponat, adplicari tamen ad valores imaginarios non poteſt, vt incautius agens ſupponere quis poſſet. Quanquam enim progreſſio $-2s$, $-s$, $o+s+2s$, caſu quo s eſt infinite paruum, tranſeat per continuum, tamen non comprehendit niſi valores reales, neque, vtcunque continuetur, per ipſam tranſitus ad vllam quantitatem imaginariam patet. Immo ne exhiberi quidem poteſt progreſſio arithmetica, tranſiens per continuum, quae omnes valores imaginarios in ſe complecteretur Sic v. g. ponendo s infinite paruum, progreſſio - - - - - $-2s\sqrt{-1}$, $-s\sqrt{-1}$, 0, $+s\sqrt{-1}$, $+2s\sqrt{-1}$ - - - -, comprehendet equidem omnes valores impoſſibiles formae $A\sqrt{-1}$, nullos vero formae $B+A\sqrt{-1}$, ac ſimiliter haec progreſſio - - - - - - - $-2(as+s\sqrt{-1})$, $-(as+s\sqrt{-1})$, 0, $+(as+s\sqrt{-1})$, $+2(as+s\sqrt{-1})$ - - -, praeter imaginarios formae $\alpha A+A\sqrt{-1}$, nullos formae $\beta A+A\sqrt{-1}$, continebit.

15) Quanquam autem omnes quantitates imaginarias comprehendere in vnica, etiam per continuum tranſeunte, progreſſione non liceat, exhiberi tamen ſemper poteſt eiusmodi progreſſio, datam quamuis imaginariam in ſe comprehendens. Sit enim numerus imaginarius propoſitus $=I$, et capiatur eius pars quaedam aliquota, infinite parua, $\frac{I}{i}$, intellecto i numero infinite magno; ac progreſſio - - - - - $-\frac{2I}{i}$, $-\frac{I}{i}$, 0, $+\frac{I}{i}$, $+\frac{2I}{i}$ - - - proprietate adducta donata erit. Quodſi iam ſupponamus m recipere ſucceſſiue hos valores, erunt B reſpondentia - - - $-2B^{\frac{I}{i}}$, $-B^{\frac{I}{i}}$, 0, $+B^{\frac{I}{i}}$, $+2B^{\frac{I}{i}}$ -, vnde

vnde et pro hac progreſſione erunt B ſemper ad reſpondentia m in ratione data. Quodſi igitur rurſum ponatur $B^m = \lambda m$, erit λ conſtans. Quoniam vero haec lex quadrare quoque debet in B^o, (quippe quod eſt terminus huius ſeriei, vnde ratiocinia quibus n. 13. vſus ſum, etiam hic adplicari poſſunt) erit o ad B^o in ratione λ ad 1. Supra vero oſtenſum eſt (n. 13.) eſſe hanc rationem o ad B^o, rationem aequalitatis; quapropter erit quoque λ ad 1 in ratione aequalitatis, ſeu $\lambda = 1$.

16) Conſtat igitur iam generatim eſſe $B^m = m$, ſiue m ſit numerus realis, ſiue imaginarius quicunque. Quodſi autem hunc valorem, in ſupra repertos valores pro C^m, D^m, E^m - - - ſubſtituamus, erit $(x+1)^m$ $= x^m + m x^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} x^{m-3}$ - - - quod eſt ipſum theorema a *Newtono* propoſitum.

17) Quanquam vero hactenus a me propoſita demonſtratio fini ſuo abunde ſatisfaciat, deſiderabunt tamen adhuc, qui demonſtrationum rigorem amant, vt ab inductionis, cui ex parte innititur, labe, immunis reddatur. Quo hoc obtineri queat, ſumamus theorema *Newtonianum* verum eſſe repertum, pro coefficientibus r primorum terminorum ſeriei $x^m + B^m x^{m-1} + C^m x^{m-2}$ - - ac dico, probari tunc ſemper poſſe, quod termini proxime ſequentis $(r+1)$ti coefficiens, etiam ſub eadem lege comprehendatur. Facile autem patet, cum pro coefficientibus primorum ſeriei terminorum lex iſta ſupra vera deprehenſa ſit; ſi propoſitionem modo propoſitam hypotheticam rite probauerim, vlterius tunc

de vniuerſali *Newtonianae* legis veritate dubitari non poſſe. Tentemus igitur ipſius demonſtrationem, vt vero ad hanc via aperiatur, quasdam, de potentiarum integrarum poſitiuarum ipſius $(x+1)$ natura, praemittamus conſiderationes.

18) Quoniam, ſi m fuerit integer poſitiuus, potentia $(x+1)^m$ per actualem multiplicationem euolui ſemper poteſt, ſupponatur haec facta, ac facile concipitur, $(x+1)^m$ hac ratione actu euolutum, aſſumere ſemper formam ſequentem,

$$x^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \cdots + Lx^2 + Nx + 1.$$

vnde ſequitur, numerum terminorum, ex quibus potentia quaeuis integra poſitiua conſtat, ſemper eſſe finitum, ac aequalem $m+1$, vltimum vero terminum ſemper eſſe aequalem vnitati. Tam facile haec ex repetitae multiplicationis natura concipiuntur, vt demonſtrationem addere omnino non opus ſit.

19) Si igitur de legis *Newtonianae* veritate nondum vniuerſaliter, ſed pro primis ſolum r terminis, conſtet, potentia $(x+1)^r$, equidem per legem hanc, non niſi vsque ad terminum $r$tum euolui poteſt, aſt cum ipſa ſic euoluta non niſi vnicus terminus deficiat, compleri tamen ſemper poteſt; addendo nempe vnitatem, cui quippe ſemper terminus vltimus aequalis eſſe debet.

20) Si igitur probatum habeamus theorema *Newtonianum* pro primis r terminis, ponendo $x=1$, erit $(1+1)^r = 2^r = 1 + \frac{r}{1} + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \cdots + \frac{r}{1} + 1.$

21) Sup-

21) Supponendo iam legis *Newtonianae* veritatem pro primis r terminis, proponatur inueniendus coefficiens termini proxime ſequentis $(r+1)$ ti. Ponamus hunc coefficientem $= T$, coefficientes vero terminorum ipſum proxime antecedentium S, R, Q - - -, et ex argumentationis ratione, qua ſupra vſus ſum, manifeſtum eſt, pro inueniendo T ſequentem reperiri debere aequationem; $2^m T^m = 2^{m-r}(A^m T^m + B^m S^{m-1} + C^m R^{m-2} \ldots + R^m C^{m-r+2} + S^m B^{m-r+1} + T^m A^{m-r})$ ſiue $(2^r - 2) T^m = (B^m S^{m-1} + C^m R^{m-2} \ldots + R^m C^{m-r+2} + S^m B^{m-r+1})$.

22) Quodſi haec facta, $B^m S^{m-1}$, $C^m R^{m-2}$ - - - quorum omnium ſummae aequatur $(2^r - 2) T^m$, exactius conſiderentur, patet formari ea, hac ratione, vt ſi vnus factorum ſit coefficiens pertinens ad terminum αtum a primo, alter tunc pertineat ad αtum a termino $(r+1)$ to, poſteriorque hic habeat ſemper indicem $m-\alpha$, prior autem indicem m. Si itaque prior horum factorum dicatur M, poſterior N, erit ſub conditione legis *Newtonianae*, valentis vſque ad terminum $r$tum,

$$M^m = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots m-\alpha+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha}$$

$$N^m = \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \ldots m-r+\alpha+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r-\alpha}$$

$$N^{m-\alpha} = \frac{m-\alpha \cdot m-\alpha-1 \ldots m-r+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r-\alpha}$$

hinc $M^m N^{m-\alpha} = \frac{m \cdot m-1 \ldots m-r+1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \alpha) \times (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r-\alpha)}$.

23) Patet igitur omnia iſta facta, $B^m S^{m-1}$, $C^m R^{m-2}$ - - - - habere numeratorem eundem, quippe

 qui

qui ab α non pendet. Vocemus hunc numeratorem breuitatis cauſa L. Si itaque tribuantur α ſucceſſiue omnes valores integri ab 1 vsque ad $r-1$, reperietur

$$(2^r-2)T^m = L\left(\frac{1}{1.2.3 \cdots r-1} + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 \cdots r-2)} + \frac{1}{(1.2.3)(1.2.3 \cdots r-3)} \cdots + \frac{1}{(1.2)(1.2.3 \cdots r-2)} + \frac{1}{1.2.3 \cdots r-1}\right).$$

Dicatur haec ſeries fractionum k, ac ducta ipſa in $1.\ 2.\ 3 \cdots r$ erit

$$k(1.\ 2.\ 3 \cdots r) = \frac{r}{1} + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} \cdots + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r}{1}.$$

Cum vero $\frac{r}{1} + \frac{r.r-1}{1.2} \cdots + \frac{r.r-1}{1.2} + \frac{r}{1}$, per §. 20, $=$ ſit 2^r-2, erit $k = \frac{2^r-2}{1.2.3 \cdots r}$, hinc (2^r-2)

$$T^m = \frac{(2^r-2)L}{1.\ 2.\ 3 \cdots r} \text{ ſiue } T^m = \frac{m.m-1.m-2 \cdots m-r+1}{1.2.3 \cdots r},$$

quae formula, cum ea, quam theorema *Newtonianum* ſuppeditat, plane coincidit.

24) Cum itaque theorema *Newtonianum* verum ſit pro coefficiente termini ſecundi, idem verum quoque erit pro termino tertio, hinc pro quarto, quinto, ſexto, ac quocunque eorum, qui hos ſequuntur, in infinitum.

DE

DE FVNCTIONVM ALGEBRAICARVM INTEGRARVM FACTORIBVS TRINOMIALIBVS REALIBVS COMMENTATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1).

Functionem algebraicam integram quamcunque, formae $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} - - - -$, in factores ſimplices huiusmodi, $x + \alpha$, $x + \beta$, $x + \gamma$, etc. numero m reſolubilem eſſe, conſtat ex elementis, vnde cognitum quoque eſt, dari functiones algebraicas integras eiusmodi, quae in meros factores ſimplices reales reſolui nequeunt, ſed inter quorum factores, imaginarii admittendi ſunt, quorum autem numerum ſemper parem eſſe debere, demonſtratum habetur.

2) Cum $x + \alpha$, $x + \beta$ - - -, ſupponantur eſſe factores functionis $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ - - -, quam in poſterum per ⊙ indicabimus, combinando, prouti libuerit, binos quoscunque ipſorum, v. g. $x + \alpha$, et $x + \gamma$, etiam productum illorum, ſiue $x^2 + \alpha x + \alpha\gamma$, $+\gamma$ erit factor functionis ⊙. Factores eiusmodi compoſitos, ex binis ſimplicibus conflatos, quoniam ex tribus conſtant terminis, *trinomiales* vocare mos eſt, vnde functio quaeuis algebraica integra, in meros factores trino-

trinomiales, numero $\frac{m}{2}$, ſi *m* fuerit par, in $\frac{m-1}{2}$ vero trinomiales, atque vnum ſimplicem, reſolui poterit, ſi *m* fuerit impar.

3) Pronunciant ſcriptores analytici, functionis cuiuſuis algebraicae integrae, talem ſemper poſſibilem eſſe reſolutionem in factores trinomiales, vt, ſi *m* ſit par, meri factores trinomiales reales, atque ſi *m* ſit impar, meri prodeant factores trinomiales reales, cum vnico factore ſimplici, itidem reali. Occurrit ipſum hoc theorema apud Ill. *Eulerum*, in Introductione ad analyſin infinitorum. Tentauit quoque demonſtrationem ipſius, Vir ſummus, atque pro functionibus quidem, quae non niſi duos continent factores imaginarios, ex ipſis elementis de rei veritate facile conſtat, pro iis vero functionibus, quae quatuor eiusmodi continent factores, admodum ingenioſam ſuppeditauit Vir Illuſtris demonſtrationem. Non extenditur autem demonſtratio iſta vltra huncce caſum, neque ad poteſtates altiores applicari poteſt, quapropter et ipſe Ill. inuentor, non ſummo rigore hoc demonſtratum eſſe, fatetur. Cum itaque ſe mihi demonſtratio directa, ſatis concinna, atque vniuerſalis, minimum quoad functiones algebraicas, obtulerit, operae pretium iudicaui, de ipſa ad Illuſtriſſimam Academiam deferre.

4) Cum factores trinomiales ſpectari queant, quaſi ortum traxerint ex combinatione binorum atque binorum factorum ſimplicium, theorematis veritas, pro functionibus, quae omnes factores ſimplices habent reales, nulla laborat difficultate. Quomodocunque enim com-

combinentur bini atque bini factores ſimplices, per ſe tamen patet, factores trinomiales, qui ſunt producta eorum, fore reales, modo ſimplices omnes ſint reales. Tota itaque quaeſtio non ſpectat niſi eius generis functiones, inter quorum factores ſimplices imaginarii occurrunt. Cum porro numerus factorum imaginariorum ſemper ſit par, conſequens eſt, ſi m fuerit impar, functionem ☉, vnum minimum admittere factorem realem. Sit iſte $x+\zeta$, atque ſi ponatur ☉ diuidi per ipſum, prodibit functio gradus $m-1$, hinc parium dimenſionum, quam vocemus ☾. Cum itaque ſit ☉ $=$ ☾ $\times(x+\zeta)$, ſufficit pro hoc caſu, monſtraſſe, functionem ☾ in meros factores trinomiales reales, reſolubilem eſſe. Cum autem ☾ ſit functio dimenſionum parium, non requiritur, niſi vt theorema noſtrum demonſtretur pro functionibus parium dimenſionum, neque opus eſt, vt ad functiones impares ſpeciatim reſpiciatur.

5) Occurrant ergo inter functionis ☉, quam in poſterum parium eſſe dimenſionum ſemper ſupponimus, factores imaginarii quidam, numero $2n$, atque demonſtratum erit theorema noſtrum, modo probare queamus, ſi $x+\delta$ ſit factor imaginarius functionis ☉, dari inter caeteros factores imaginarios ſemper aliquem, qui in $x+\delta$ ductus, producit factorem trinomialem realem, ad quam itaque propoſitionem probandam, tota noſtra quaeſtio reducitur.

6) Sit itaque functionis ☉ factor imaginarius, $x+m+n\sqrt{-1}$, ad quam formam reduci poſſe

omnes

omnes eiusmodi factores imaginarios, conſtat, ſitque $x+v+z\sqrt{-1}$ factor, qui in priorem ductus producere ſupponitur factum reale. Cum ergo ſit factorum iſtorum productum

$$=x^2\begin{array}{l}+m\\+n\sqrt{-1}\\+v\\+z\sqrt{-1}\end{array}\;x\begin{array}{l}+mv\\+nv\sqrt{-1}\\+mz\sqrt{-1}\\-nz\end{array}$$

patet, reale hoc eſſe non poſſe, niſi talia ſint z et v, vt coefficientes huius producti ſiant reales, id eſt, niſi quantitates imaginariae, quas coefficientes inuoluunt, ſe deſtruant.

7) Talia itaque eſſe debent v et z, vt ſit $n\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}=0$, atque $nv\sqrt{-1}+mz\sqrt{-1}$ pariter $=0$. Obtinemus autem has aequationes reducendo, $z=-n$, atque $v=+m$. Factor itaque imaginarius, qui cum $x+m+n\sqrt{-1}$ combinatus producit factum reale, alius non eſſe poterit, niſi iſte $x+m-n\sqrt{-1}$. Probandum itaque nobis incumbit, ſi fuerit $x+m+n\sqrt{-1}$ factor functionis $\odot$, neceſſe tum eſſe, vt quoque $x+m-n\sqrt{-1}$ huius functionis factor exiſtat.

8) Ponatur $m=\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi$, et $n\sqrt{-1}=\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1}$, atque erit $\alpha=\frac{m}{\text{coſ.}\,\Phi}=\frac{n}{\text{ſin.}\,\Phi}$, vnde ſit $\frac{m}{n}=\frac{\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}=\text{tang.}\,\Phi$, ſive formulam inuertendo $\Phi=\text{A tang.}\,\frac{m}{n}$, atque $\alpha=\frac{m}{\text{coſ. A tang.}\,\frac{m}{n}}$. Factor itaque $x+m+n\sqrt{-1}$, et ita exprimi poteſt, vt ſit $x+\alpha\,\text{coſ.}\,\Phi+\alpha\,\text{ſin.}\,\Phi\sqrt{-1}$ intelligendo ſub Φ arcum, cuius tangens eſt $=\frac{m}{n}$, poſito radio $=1$, ſub α vero quantitatem $\frac{m}{\text{coſ. A tang.}\,\frac{m}{n}}$.

9) Si

9) Si iam quantitas $x + \alpha \operatorname{coſ.} \Phi + \alpha \operatorname{ſin} \Phi \sqrt{-1}$, ſit factor functionis ⊙, ex elementis conſtat, ſi quantitas $-\alpha(\operatorname{coſ.}\Phi + \operatorname{ſin.}\Phi\sqrt{-1})$ ſubſtituatur in functione loco x, totam tum functionem euaneſcere debere. Subſtitutio autem iſta admodum facile perficitur. Cum nempe ſit $x = -\alpha\,(\operatorname{coſ}\Phi + \operatorname{ſin}\Phi\sqrt{-1})$, erit

$$x^2 = +\alpha^2(\operatorname{coſ.} 2\Phi + \operatorname{ſin.} 2\Phi\sqrt{-1})$$

$$x^3 = -\alpha^3(\operatorname{coſ.} 3\Phi + \operatorname{ſin.} 3\Phi\sqrt{-1}),$$ atque generatim

$$x^m = \pm\,\alpha^m(\operatorname{coſ.} m\Phi + \operatorname{ſin} m\Phi\sqrt{-1})$$

vti demonſtratum habetur apud Ill *Eulerum* in Introd. ad Anal. infin. Tom. I. pag. 98. Si iam ſubſtitutionem iſtam actu perficiamus, obtinebimus:

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha^m\operatorname{coſ.}m\Phi - a\alpha^{m-1}\operatorname{coſ.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\operatorname{coſ.}(m-2)\Phi \text{-------} \\ (+\alpha^m\operatorname{ſin}m\Phi - a\alpha^{m-1}\operatorname{ſin.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\operatorname{ſin}(m-2)\Phi \text{--})\times\sqrt{-1} \end{array}\right\} = 0$$

Ponatur $\alpha^m\operatorname{coſ.}m\Phi - a\alpha^{m-1}\operatorname{coſ}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\operatorname{coſ.}(m-2)\Phi \text{----} = P$

et $\alpha^m\operatorname{ſin.}m\Phi - a\alpha^{m-1}\operatorname{ſin.}(m-1)\Phi + b\alpha^{m-2}\operatorname{ſin.}(m-2)\Phi \text{-----} = Q$

ac erit $P + Q\sqrt{-1} = 0$.

10) Si $P + Q\sqrt{-1}$ ſit $= 0$, conſequens inde eſt, eſſe $P = 0$, atque $Q = 0$; niſi enim hoc eſſet, concludendum foret, eſſe $Q\sqrt{-1} = -P$, id eſt quantitatem imaginariam, reali, quod contradictorium eſſe, per ſe patet. Cum ergo ſit $P = 0$, et $Q = 0$, erit non ſolum $P + Q\sqrt{-1} = 0$, ſed etiam $P - Q\sqrt{-1} = 0$.

11) Vt iam determinare queamus, an factor ſimplex, $x + m - n\sqrt{-1}$, qui adhibendo denominationes §. 8. aſſumtas, tranſit in $x + \alpha\operatorname{coſ.}\Phi - \alpha\operatorname{ſin}\Phi\sqrt{-1}$, quique ſolus eſt, qui cum priori combinatus

productum reale efficere poteſt, ſit quoque factor functionis ⊙, ſubſtituatur quantitas $-\alpha(\cos.\phi - \sin.\phi\sqrt{-1})$, loco x, et diſpiciatur, an hic valor functionem ⊙ euaneſcere faciat. Quoniam autem

$$x^2 = +\alpha^2(\cos.2\phi - \sin.2\phi\sqrt{-1})$$
$$x^3 = -\alpha^3(\cos.3\phi - \sin.3\phi\sqrt{-1})$$

et generatim $x^m = \pm\alpha^m(\cos.m\phi - \sin.m\phi\sqrt{-1})$, functio ⊙ per ſubſtitutionem iſtam, tranſit in

$$\pm\alpha^m\cos.m\phi - a\alpha^{m-1}\cos.(m-1)\phi + b\alpha^{m-2}\cos.(m-2)\phi \dots$$
$$(-\alpha^m\sin.m\phi + a\alpha^{m-1}\sin.(m-1)\phi - b\alpha^{m-2}\sin.(m-2)\phi \dots)(\times\sqrt{-1})$$

vnde fit, ſi denominationes §. 10. aſſumtas, vſurpemus $P - Q\sqrt{-1}$, quae quantitas, ſi fuerit nulla, indicio hoc erit, quantitatem $x + \alpha\cos.\phi - \alpha\sin.\phi\sqrt{-1} = x + m - n\sqrt{-1}$, eſſe factorem functionis ⊙. Supra autem §. 10. probatum iam dedimus, fieri non poſſe, vt ſit $x + m + n\sqrt{-1}$ factor functionis ⊙, ſiue vt ſit $P + Q\sqrt{-1} = 0$, niſi fuerit quoque $P - Q\sqrt{-1} = 0$, ſiue $x + m - n\sqrt{-1}$ factor eiusdem functionis.

12) Perſpicuum hinc tandem eſt, $x + m + n\sqrt{-1}$, non poſſe eſſe factorem functionis ⊙, niſi $x + m - n\sqrt{-1}$ quoque ipſius factor exiſtat, atque factorem ipſa habeat trinomialem realem, huncce, $x^2 + 2mx + m^2 - n^2$. Negotium itaque nobis propoſitum, abſolutum iam eſt, aſt dubio tamen adhuc occurrere debemus, quod ſubnaſci poſſet, circa caſum, vbi functio ⊙ plures habet factores aequales, vbi nempe factor imaginarius, $x + m + n\sqrt{-1}$, bis aut ter, aut pluribus vicibus functionis

huius

huius factor exiſtit. Videri nempe poſſet, demonſtrationem a me prolatam, euincere quidem, ſi $x+m+n\sqrt{-1}$, ſit factor functionis ☉, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$, inter reliquos factores occurrere debere, aſt non probare ipſam, quod toties occurrere debeat poſterior, quoties prior occurrit, quod tamen, ſi contingat non eſſe, euidens eſt, reſolutionem in meros factores trinomiales reales ſuccedere non poſſe.

13) Leui autem negotio hoc dubium aufertur. Si nempe functio ☉ habeat quantitatem $x+m+n\sqrt{-1}$, n vicibus pro factore, patet ex demonſtratione prolata, minimum vna vice $x+m-n\sqrt{-1}$, fore eiusdem functionis factorem. Diuidatur ergo functio ☉ per factorem trinomialem $x^2+2mx+m^2 \atop \quad\quad\quad\quad -n^2$, atque prodeat

$$x^{m-2}+a'x^{m-3}+b'x^{m-4}+c'x^{m-5} \cdots\cdots = ☾$$

inter cuius factores $x+m+n\sqrt{-1}$, adhuc $n-1$ vicibus occurrit. Haec itaque functio, vi demonſtrationis noſtrae, denuo minimum vna vice habebit factorem $x+m-n\sqrt{-1}$. Si ergo denuo diuidatur functio ☾, per $x^2+2mx+m^2 \atop \quad\quad\quad -n^2$, atque prodeat

$$x^{m-4}+a''x^{m-5}+b''x^{m-6}+c''x^{m-7} \cdots\cdots = ☿$$

quae functio, $x+m+n\sqrt{-1}$, $n-2$ vicibus pro factore habebit, euidens eſt, et ipſam, minimum vna vice, factorem $x+m-n\sqrt{-1}$ habituram. Perſpicuum autem eſt, continuari poſſe hanc argumentandi methodum, vsquedum poſt n diuiſiones, peruentum ſit ad functionem

$$x^{m-2n}+\alpha x^{m-2n-1}+\beta x^{m-2n-2} \cdots\cdots ♄,$$

 inter

inter cuius factores, $x+m+n\sqrt{-1}$, vlterius non occurrit. Inter huius autem functionis factores, etiam $x+m-n\sqrt{-1}$ vlterius occurrere nequit. Si enim haec quantitas foret factor ipſius $\mathfrak{p}$, ex demonſtratione noſtra abunde patet, etiam inuerſim neceſſe eſt, vt tum ſit quoque $x+m+n\sqrt{-1}$ ipſius factor. Aſt locum non habet poſterius, quoniam per inſtitutas diviſiones numero n, hic factor penitus ſublatus eſt. Manifeſtum ergo eſt, ſi $x+m+n\sqrt{-1}$ pluries occurrat inter factores functionis cuiusdam, totidem exacte vicibus etiam occurrere debere alterum, $x+m-n\sqrt{-1}$.

SOLVTIO.

SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM AD MAXIMA MINIMAVE PERTINENTIS.

Auctore

STEPH. RVMOWSKI.

1)

Cum commercium epiſtolicum iuniorem *Eulerum* inter et me intercederet, in litteris menſe Ianuario anni praeterlapſi ad me datis, ſignificauit, ſe problema *Data altitudine Coni determinare figuram baſis, vt conus inter omnes alios eiusdem ſuperficiei maximam habeat ſoliditatem* a patre propoſitum ſoluiſſe, voluitque vt ego in ſoluendo problemate vires meas experiar. Tentaui igitur eiusdem problematis ſolutionem, et partem ad eum transmiſi. Interea autem ipſam ſolutionem humaniſſime mecum communicauit, qua accepta animus inceſſit, vt meam quoque ad finem perducerem. Exhibita igitur mea ſolutione, *Euleri* ex litteris excerptam ſiſtam, quo appareat diuerſitas ſolutionum.

2) Sit figura baſis AMN, quae vtique in ſe redeat neceſſe eſt. Incidat demiſſum ex vertice V perpendiculum in D, et ſit $VD = a$, per punctum D ducatur vtcunque recta AN, quae pro axi ſeu diametro curuae quaeſitae haberi poterit. Ex puncto D ducatur ad curuam recta DM, et alia ei infinite propinqua Dm, et dicatur $DM = z$, erit $rm = dz$. Statuatur inſuper $ADM = \Phi$, erit $MDm = d\Phi$, $Mr = z d\Phi$ Tab. I. Fig. 4.

 et

et $Mm = \sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}$. Ex puncto D ducatur inſuper in tangentem MQ perpendiculum DQ, et prodibunt triangula Mmr et DQM ſimilia, qua propter erit $DQ = \frac{zzd\Phi}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$ et $QM = \frac{zdz}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Hinc $VQ = \sqrt{(VD^2 + DQ^2)} = \sqrt{aa + \frac{z^4 d\Phi^2}{dz^2 + zzd\Phi^2}}$ $= \frac{\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}}{\sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}}$. Elementum ergo ſuperficiei VMm erit $= \frac{Mm.VQ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$ et ſuperficies arcui AM reſpondens erit $= \frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$. Cuius integrale ita capi debet, vt poſito $\Phi = 0$, ipſum euaneſcat. Elementum autem areae baſeos $DMm = \frac{1}{2}zzd\Phi$ et hinc area ADM $= \frac{1}{2}\int zzd\Phi$, ſoliditas autem partis coni arcui AM reſpondentis erit $= \frac{1}{6}a\int zzd\Phi$. Commune ergo omnibus conis debet eſſe $\frac{1}{6}a\int zzd\Phi$, et maximum minimumue $\frac{1}{2}\int\sqrt{(aadz^2 + (aa+zz)zzd\Phi^2)}$, quae expreſſio poſito $dz = pd\Phi$ tranſibit in ſequentem $\frac{1}{2}\int d\Phi \sqrt{(aapp + (aa+zz)zz)}$.

3) Comparentur nunc hae expreſſiones ſecundum regulas a Celeberrimo *Eulero* datas cum formula $\int Zd\Phi$ in qua Z ponitur functio quaecunque ipſarum Φz et p atque ponatur $dZ = Md\Phi + Ndz + Pdp + Qdq$ etc. prior ergo expreſſio dabit $Z = zz$, quod differentiatum et comparatum cum dZ dat $M = 0$ $N = 2z$, $P = 0$ etc. Poſterior autem $Z = \sqrt{(aapp + (aa+zz)zz)}$. Hinc $M = 0$, $N = \frac{(aa+2zz)z}{\sqrt{(aapp+xz(aa+zz))}}$ et $P = \frac{aap}{\sqrt{(aapp+zz(aa+zz))}}$. Per easdem ergo maximorum et minimorum regulas debebit eſſe

$$\alpha\left(N - \frac{dP}{d\Phi}\right) = 2\beta z.$$

Ponatur $\frac{\beta}{\alpha} = cc$, et prodibit $N - \frac{dP}{d\Phi} - 2ccz = 0$, quae ducta in $pd\Phi$ dabit $Npd\Phi - pdP - 2c^2zpd\Phi = 0$ ſeu

Ndz

$N dz - p dP - 2cczdz = 0$. Hinc $N dz + p dP - 2cczdz = d.Pp$. Quod integratum dabit

$$\surd(aapp + zz(aa+zz)) - cczz = Pp + \text{Conſt.}$$

Poſita conſtante $= bb$ et reſtituto valore ipſius P obtinebimus $\frac{zz(aa+zz)}{\surd(aapp+zz(aa+zz))} = bb + cczz$, vnde p definietur ſequentem in modum $ap = \frac{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}{bb+cczz}$ et ob $p = \frac{dz}{d\Phi}$ nanciſcimur aequationem figuram baſeos exprimentem

$$d\Phi = \frac{adz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)} \text{ et}$$

$$\Phi = \text{Conſt.} + \int \frac{adz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}.$$

vbi conſtans poſt integrationem ita definiri debet, vt poſito $\Phi = 0$; z obtineat datum valorem, eum nempe quem habet, ſi punctum M transferatur in A. Toties ergo curuae problemati ſatisfacientes prodibunt algebraicae, quoties $\int \frac{q\,dz(bb+cczz)}{z\surd(zz(aa+zz)^2 - (aa+zz)(bb+cczz)^2)}$ praebet arcum circuli commenſurabilem arcui Φ.

4) Haec erant, quae ad *Eulerum* priusquam eius ſolutionem acceperim transmiſi. Cum aequatio inuenta in genere integrationem admittere non videatur, ad caſus ſpeciales erit deſcendendum. Ponatur in aequatione inuenta $\frac{bb}{cc} = aa$, ſeu $bb = aacc$, et habebimus pro natura curuae quaeſitae ſequentem aequationem $d\Phi = \frac{accdz}{z\surd(zz - c^4(aa+zz))}$ quae mutari poterit in ſequentem $d\Phi = \frac{acc}{\surd(1-c^4)} \cdot \frac{dz}{z\surd(zz - \frac{aac^4}{1-c^4})}$ et poſito breuitatis gratia $\frac{acc}{\surd(1-c^4)} = \frac{1}{f}$, prodibit $d\Phi = \frac{dz}{z\surd(ffzz - 1)}$. Vnde facta reductione prodibit $\frac{zzd\Phi}{\surd(zzd\Phi^2 + dz^2)} = \frac{1}{f}$. At $\frac{zzd\Phi}{\surd(zzd\Phi^2 + dz^2)}$ eſt perpendiculum ex centro D in tangentem demiſſum, quod quia eſt conſtans $= \frac{acc}{\surd(1-c^4)}$,

curua

curua problemati ſatisfaciens hoc caſu erit circulus, radio $\frac{acc}{\sqrt{(1-c^4)}}$ deſcriptus.

5) Aliae atque aliae curuae problemati ſatisfacientes obtinebuntur, prouti conſtantes, quae in aequationem naturam curuae exprimentem ingrediuntur, determinentur. Nunc ſolutionem *Euleri* eius verbis conceptam tradam. Sit ACB baſis coni, altitudo eius OC $=a$. Ponatur CP $=x$, PM $=y$, $dy=pdx$ et habebitur ſoliditas coni $=\frac{1}{3}a\int ydx$. Superficies autem $=\frac{1}{2}\int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Quaeſtio igitur et hoc modo enunciari poterit, vt inter omnes curuas AMB, quibus idem valor formulae $\int ydx$ conueniat, ſeu quae eandem aream includant, definiatur ea, pro qua valor huius formulae fiat minimus. Ad quod ſoluendum, conſtat, primo vtriusque harum formularum valorem differentialem, ſeu, vti alio modo vocatur, variationem, inueſtigari, tum vero alterum multiplo cuiuscunque alterius aequalem ſtatui oportere. Quodſi ergo hi valores differentiales, ſeu variationes, praefixione litterae δ indicentur, aequatio pro figura baſis ita exprimetur $4\delta\int ydx=\delta\int dx\sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$. Cum igitur negotium ad inueſtigationem harum variationum perducatur, ex methodo maximorum et minimorum contemplemur hanc formulam $\int Zdx$, in qua Z ſit functio quaecunque, tam variabilium x et y, tam earum differentialium; ſeu poſito $dy=pdx$, quantitatis p, quandoquidem haec forma binas noſtras complectitur. Quia ergo Z eſt functio quantitatum finitarum x, y et p, ea differentiata talem praebebit formam $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+$ etc. et quouis caſu quantitates

Tab. I. Fig. 5.

titates M, N et P innoteſcent, quibus inuentis dabitur formulae $\int Z dx$ valor differentialis. Pro priori ergo formula $\int y dx$, quia $Z = y$, erit $M = 0$; $N = 1$ et $P = 0$. Vnde eius variatio erit vt 1. Pro altera vero formula $\int dx \sqrt{(aa(1+pp)+(y-px)^2)}$ erit eodem modo $M = \frac{-p(y-px)}{Z}$, $N = \frac{y-px}{Z}$ et $P = \frac{aap - x(y-px)}{Z}$. Vnde litteris breuitatis gratia retentis erit huius alterius formulae valor differentialis vt $N - \frac{dP}{dx}$. Quare pro figura baſis coni conſequimur hanc aequationem $m = N - \frac{dP}{dx}$ denotante m numerum conſtantem, euolutis omnibus aequatio abibit in hanc

$$m dx = \frac{2(y-px)}{Z} - \frac{(aa+xx)dp}{Z} + \frac{(aap - x(y-px))^2 dp}{Z^3}$$

Bini poſtremi termini aequationis hoc modo in vnam ſummam colligentur $-\frac{aadp}{Z^3}(aa+xx+yy)$ ita vt noſtra aequatio hanc formam induat

$$(A) \quad m dx = \frac{2(y-px)dx}{Z} - \frac{aa(aa+xx+yy)dp}{Z^3}$$

multiplicata ea per p prodibit (B) $m dy = \frac{2(y-px)dy}{Z} - \frac{aapdp(aa+xx+yy)}{Z^3}$. Fiat combinatio (A) x + (B) y ea dabit

$$m(xdx+ydy = \frac{2(xdx+ydy)(y-px)}{Z} - \frac{aa(x+py)(aa+xx+yy)}{Z^3}$$

quae integrata poſito $\frac{1}{2}m = n$, et adiecta conſtante nab

$$n(xx+yy+ab) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$$

hinc poſito $b = a$ circulus elicietur.

6) Cum ex aequatione $n = \frac{y-px}{Z}$ non ſtatim pateat curuam quaeſitam eſſe circulum, et *Eulerus* id non exponat, lubet eius rei hic demonſtrationem adiicere. Cum ſit $n = \frac{y-px}{Z}$, ſumtis quadratis habebimus tandem $\frac{nnaa}{1-nn}(1+pp) = (y-px)^2$. Ponatur $y = u$, xet

prodibit $dy = udx + xdu = pdx$. Vnde $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$, et aequatio praecedens mutabitur in ſequentem $\frac{nnaa(1+pp)}{1-nn} = (u-p)^2 xx$, ſumendis logarithmis fit $l\frac{nnaa}{1-nn} + l(1+pp) = 2l(u-p) + 2lx$, et differentialibus $\frac{pdp}{1+pp} = \frac{du-dp}{u-p} + \frac{dx}{x}$. Hinc ob $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$ prodibit $1 + pu = 0$, quod ob $p = \frac{dy}{x}$ et $u = \frac{u}{x}$ poſt integrationem dat $xx + yy = \text{Conſt.}$ quod manifeſto eſt ad circulum abſciſſis a centro computatis. Pergit *Eulerus*:

7) Aequatio $n(ab + xx + yy) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{Z}$ porro per ſubſtitutionem $y - px = u\sqrt{(1+pp)}$ hanc ſuppeditat aequationem $\frac{n(ab+xx+yy)}{aa+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}}$, iam conemur omnia per nouam variabilem determinare, at ſubſtitutio aſſumta dat per differentiationem (C) $x = \frac{du}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{pu}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde oritur ob $y = px + u\sqrt{(1+pp)}$. (D) $y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{(1+pp)} + \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Statuatur porro breuitatis gratia $\frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}} = nU$, erit aequatio pro curua $\frac{ab+xx+yy}{aa+xx+yy} = U$, hinc $xx + yy = \frac{aaUU-ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu$, ex qua reſtat, vt p per u vel U determinetur, tunc x et y ex (C) et (D) per ſolam variabilem expreſſa habebimus: Cum igitur ſit $\frac{du^2}{dp^2}(1+pp) + uu = \frac{aaUU-ab}{1-U}$ erit ſtatim

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{dU\sqrt{(1-U)}}{\sqrt{(aaU-ab-uu(1-U))}}$$

Si pro u ex antecedentibus valor per U expreſſus ſubſtituatur, aequatio ſeparata integrari poterit per ſignum ſummatorium. Hinc p innoteſcet per U, ideoque etiam per u, et problema erit ſolutum.

PHY-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DILVCIDATIONES
DE RESISTENTIA FLVIDORVM.

Auctore
L. EVLERO.

I.

Dupliei modo quaeſtio de reſiſtentia, quam corpora ſolida in fluidis mota patiuntur, tractari ſolet, altero negotium tantum vero proxime plerumque conficitur, dum quantitas reſiſtentiae per regulam ſatis concinnam ad calculum reuocatur; altero vero reſiſtentiae doctrinam ex ipſa fluidorum natura et preſſione, quam in corpora exerunt, per profundiſſimas Hydrodynamicae inueſtigationes conſtituere Geometrae ſunt conati. Quo poſteriori modo ſi negotium ad finem perducere liceret, omnia, quae ad menſuram reſiſtentiae pertinent, inde accuratiſſime definiri poſſent, neque amplius coacti eſſemus, ad modum priorem confugere, quo prope tantum vera reſiſtentiae magnitudo exhibetur. Verum etiam nunc tam longe ab iſta perfecta reſiſtentiae cognitione abeſſe videmur, vt priori modo, etiamſi eius defectum probe norimus, minime carere queamus, ſed eo potius, quoties reſiſtentia indaganda occurrit, vti debeamus.

II. Prior autem modus, quo Newtonus plurimum eſt vſus, etiamſi eius aberrationem a veritate non ignoraſſe videatur, hac regula ad calculum inprimis

mis accommodata continetur, vt reſiſtentia rationem compoſitam ſequi cenſeatur, ex ratione duplicata celeritatis, qua fluidum impingit, et ratione pariter duplicata ſinus anguli, quem directio impulſionis cum ſuperficie percuſſa conſtituit. Hinc ergo ſi pro alliſione fluidi perpendiculari, vbi angulus ille ſit rectus, reſiſtentiae quantitatem nouerimus, facile erit, eam pro quauis alliſione obliqua aſſignare. At vero ſi fluidum perpendiculariter ſuperficiem quampiam planam feriat, reſiſtentia aequalis aeſtimatur ponderi columnae eiusdem fluidi, cuius baſis ſit ipſa ſuperficies percuſſa, altitudo vero congruat cum ea, ex qua graue cadendo ipſam fluidi celeritatem eſſet impetraturum.

III. Haec regula cum ob facilem vſum in calculo, tum vero ideo potiſſimum commendari meretur, quod a veritate plerumque haud notabiliter abludere deprehendatur. Nam quod ad principia attinet, quibus innititur, nullum plane eſt dubium, quin ea nimis ſint vaga, atque a vero ſtatu, ad quem accommodantur, remota, quam vt concluſio inde deducta pro certa admitti queat. Maximam enim partem haec regula eſt petita ex colliſione corporum, dum fluidum continuo in corpus data celeritate et ſecundum directionem motus ſui impingere, conflictumque exerere concipitur. At vero certum eſt, fluidum neutiquam in corpus hoc modo impingere, ſed antequam ad corpus perueniat, tam ſuam directionem, quam celeritatem, ita inflectere, vt cum ad corpus peruenerit, ſecundum ipſam eius ſuperficiem praeterlabatur, nullamque aliam vim in corpus exerat, praeter preſſionem, quae ipſi in

ſingulis

ſingulis contactus punctis conuenit. Quam ob rem concluſio, quae ex ratiocinio tam peruerſo deduci ſolet, minime pro vera haberi poteſt.

IV. Quo hoc clarius perſpiciamus, flumen concipiamus, quod data celeritate ſecundum directionem OV feratur; iam vero in hoc flumine corpus collocari AME, quod quantam vim a flumine ſit ſuſtentaturum, definiri oporteat. Atque per regulam vulgarem haec vis ita inueſtigatur, quaſi in ſingula corporis puncta M vena aquea IM ſecundum directionem fluminis, eaque celeritate, qua flumen progredi aſſumimus, incurreret, ac per conflictum verum corpori vim inferret. Interim tamen ſi actionem fluminis, prouti re vera ſe habet, perpendamus, mox percipiemus, tractus ſeu quaſi riuulos fluminis, qui ſupra corpus in notabili diſtantia celeritatem ſuam cum directione retinuerant, vti f, f, f, g, g, g, etc. cum propius ad corpus acceſſerint, curſum ſuum inflectere, atque tandem iuxta corporis latera defluere, quae deflexio in figura exhibetur. Ex quo manifeſtum eſt, nusquam eiusmodi conflictum fieri, qualis in conſtitutione regulae vulgaris concipi ſolet. Tab. II. Fig. 1.

V. Quin potius hinc manifeſtum eſt, iſtam aquae vim, quae ſub reſtiſtentiae nomine comprehenditur, a preſſione aquae iuxta corpus praeterlabentis proficiſci, quam idcirco preſſionem inueſtigari neceſſe eſt, ſi reſiſtentiam accurate aſſignare velimus. Quare vera ratio reſiſtentiam determinandi, qua alter modus ſupra memoratus continetur, huc redit, vt preſſionem

quam

quam corpus in ſingulis punctis a fluido ſuſtinet, definiamus: at vero haec quaeſtio altioris eſt indaginis, quam vt eius enodationem a profectibus, quos adhuc in hydrodynamicis fecimus, expectare queamus. Hic enim ſinguli riuuli, ex quibus fluuius conſtat, et quemadmodum curſum ſuum circa corpus inflectant, conſiderari, atque omnes illae lineae curuae *ff*, *gg*, *hh*, etc. quaſi ſub communem aequationem redigi debent; vnde deinceps aquae celeritas in ſingulis cuiusque riuuli punctis concludi queat. Hac autem demum celeritate cognita, ipſam preſſionem, cui hoc negotium innititur, aſſignare licebit, a tam perfecta autem motus fluidorum cognitione adhuc longe abſumus.

VI. Quae Celeb. *Alembertus* de reſiſtentia fluidorum in peculiari Tractatu eſt commentatus, hanc ſummam difficultatem, veram reſiſtentiam inueſtigandi, magis demonſtrant, quam leuant. Cum enim Vir acutiſſimus omni adhibita ſagacitate hanc quaeſtionem adaequate explicare haud valuerit, vt inde reſiſtentia, quam quaeuis corpora in aqua mota patiuntur, aſſignari poſſit: magno hoc nobis eſt argumento, quaeſtionem tantopere eſſe difficilem, vt vires humanas tantum non ſuperare videatur. Quae ego etiam nuper in aliquot diſſertationibus de motu fluidorum expoſui, nullum ſubſidium huc afferunt. Etiamſi enim omnia, quae ad motum fluidorum pertinent, ad aequationes analyticas reduxi, tamen ipſa Analyſis minime adhuc ita eſt exculta, vt illis aequationibus reſoluendis ſufficiat. Quae porro alii de hoc argumento ſunt meditati, haud feliciori ſucceſſu vires ſuas ingenii ſunt experti.

VII. Etſi

VII. Etſi autem determinatio preſſionis in genere, hoc eſt in omnibus punctis fluidi, tam a tractu ſingulorum riuulorum, quam ab aquae celeritate pendet, tamen inueni, ſi quaeſtio ad vnicum riuulum reſtringatur, tum preſſionem in ſingulis eius locis per ſolam celeritatem definiri. Quare cum corpus AME ab vnico riuulo f, f, f contingatur, omnisque reſiſtentia ab eius preſſionibus ſolis oriatur, ſi modo preſſionem huius riuuli in ſingulis eius punctis cognoſceremus, inde facile reſiſtentiam, quam corpus a fluuio ſuſtinet, definire poſſemus. Tametſi autem iſta celeritatis cognitio per riuulum corpori proximum non minoribus difficultatibus ſit ſubiecta, quam determinatio preſſionis generatim conſiderata, tamen hoc inde lucri nanciſcimur, vt ſi nobis licuerit, ſiue per experientiam, ſiue vndecunque, celeritatem fluidi iuxta corpus praeterlabentis cognoſcere, hoc ſolum nobis ſatis ſit futurum ad veram reſiſtentiam corporis accurate determinandam.

VIII. Si enim ponamus celeritatem, qua aqua circa elementum corporis M praeterlabitur, debitam eſſe altitudini v, atque aſſumamus, vt vulgo fieri ſolet, omnes riuulos in plano horizontali verſari, ex iis, quae demonſtraui de motu fluidorum in genere, colligitur, preſſionem aquae in puncto M exprimi per altitudinem $k-v$, ita vt quantitas k pro toto riuulo f, f, f, f, eundem obtineat valorem, ideoque in praeſenti negotio pro conſtanti haberi queat, etiamſi pro diuerſis riuulis diuerſos ſortiatur valores. Hanc autem preſſionem $k-v$ ita interpretari oportet, vt corpus in M a pondere columnae aqueae, cuius altitudo ſit $=k-v$,

 ſolli-

ſollicitari ſit cenſendum. Pro baſi ſcilicet huius columnae ſumi debet elementum ſuperficiei corporis in M, quod ab iſta vi normaliter vrgebitur, vti in omnibus preſſionibus euenit, hincque porro more ſolito quantitatem totius reſiſtentiae colligere licebit.

IX. Quanquam autem circa celeritatem aquae apud ſingula puncta M nihil habemus exploratum ex Theoria, tamen ſi experientiam in ſubſidium vocemus, egregias reſiſtentiae proprietates cognoſcemus. Cum enim aucta celeritate in eodem riuulo preſſio diminuatur, contra vero augeatur celeritate imminuta, certo affirmare poterimus, in quibus locis corporis AME aqua velocius praeterlabatur, ibi reſiſtentiam eſſe minorem, quam iis locis, vbi tardius praeterfluit: quae veritas ſi probe perpendatur, plura alia inſignia conſectaria ſuppeditare poterit. Ac merito hoc ingens paradoxon videri debet, quod a maiori celeritate reſiſtentia minor, a minori autem celeritate reſiſtentia maior oriatur; quod primo intuitu regulae vulgari directe aduerſari videtur. Sed omnis difficultas euaneſcet, ſi perpendamus, hic diuerſas fluidi celeritates, quibus eodem tempore ſuperficiem corporis ſtringit, inter ſe comparari. Neque minus certum manet, ſi vel fluvius velocius moueatur, vel corpus celerius aduerſus aquam trudatur, reſiſtentiam quoque maiorem eſſe futuram.

X. Viciſſim ergo vbi per experientiam reſiſtentia maior deprehenditur, ibi celeritas fluidi praeterlabentis minor ſit neceſſe eſt; cum igitur nouerimus, in

iis

iis ſuperficiei corporis partibus, ad quas directio fluminis OV propius ad perpendicularem accedit, reſiſtentiam eſſe maiorem, atque omnium maximam, vbi directio fluuii OV ad corporis ſuperficiem ſit normalis; in iſtis locis quoque celeritas fluidi praeterlabentis minor eſſe debet. Ad angulum ſcilicet AMI erit reſpiciendum, qui quo fuerit maior, ſeu recto propior, ibi celeritas aquae tanto minor ſit neceſſe eſt, contra autem eo maior, vbi hic angulus diminuitur. In figura igitur exhibita celeritas aquae praeterlabentis circa A erit minima, circa E vero maxima: atque hoc etiam experientia manifeſto declarat, qua conſtat, aquam circa verticem A plerumque fere penitus ſtagnare, imprimis ſi angulus OAM fuerit rectus.

XI. Quoniam igitur nouimus per regulam vulgarem, quantumuis debili nitatur fundamento, reſiſtentiam tamen parum a vero aberrantem obtineri, eius beneficio celeritatem aquae iuxta corpus praeterlabentem vero proxime aſſignare poterimus; et quoniam in eodem riuulo O in ſingulis locis $ffff$ E amplitudo reciprocam tenet rationem celeritatis, hinc ſimul amplitudinem iſtius riuuli corpus contingentis in ſingulis locis definire licebit. Tum vero porro primo hoc riuulo conſtituto ſimili ratione riuulus ſequens $fggf$, ſeu ſecundus, ex hocque tertius $ghhg$, indeque ſequentes vero proxime deſignari poterunt. Quae determinationes etſi a veritate aliquantum recedere ſunt cenſendae, tamen in tam ardua inueſtigatione inſigni vſu non carebunt. Quodſi enim iam vero proxime tractum ſingulorum riuulorum vna cum aquae celeritate cognoueri-

 mus,

prodibit $dy = udx + xdu = pdx$. Vnde $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$, et aequatio praecedens mutabitur in ſequentem $\frac{nnaa(1+pp)}{1-nn} = (u-p)^2 xx$, ſumendis logarithmis fit $l\frac{nnaa}{1-nn} + l(1+pp) = 2l(u-p) + 2lx$, et differentialibus $\frac{pdp}{1+pp} = \frac{du-dp}{u-p} + \frac{dx}{x}$. Hinc ob $\frac{du}{p-u} = \frac{dx}{x}$ prodibit $1+pu=0$, quod ob $p = \frac{dy}{x}$ et $u = \frac{u}{x}$ poſt integrationem dat $xx+yy = \text{Conſt.}$ quod manifeſto eſt ad circulum abſciſſis a centro computatis. Pergit *Eulerus*:

7) Aequatio $n(ab + xx + yy) = \frac{(aa+xx+yy)(y-px)}{z}$ porro per ſubſtitutionem $y - px = u\sqrt{(1+pp)}$ hanc ſuppeditat aequationem $\frac{n(ab+xx+yy)}{aa+xx+yy} = \frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}}$, iam conemur omnia per nouam variabilem determinare, at ſubſtitutio aſſumta dat per differentiationem (C) $x = \frac{du}{dp}\sqrt{(1+pp)} - \frac{pu}{\sqrt{(1+pp)}}$. Vnde oritur ob $y = px + u\sqrt{(1+pp)}$. (D) $y = -\frac{pdu}{dp}\sqrt{(1+pp)} + \frac{u}{\sqrt{(1+pp)}}$. Statuatur porro breuitatis gratia $\frac{u}{\sqrt{(aa+uu)}} = nU$, erit aequatio pro curua $\frac{ab+xx+yy}{aa+xx+yy} = U$, hinc $xx+yy = \frac{aaUU-ab}{1-U} = \frac{du^2}{dp^2}(1+pp)+uu$, ex qua reſtát, vt p per u vel U determinetur, tunc x et y ex (C) et (D) per ſolam variabilem expreſſa habebimus: Cum igitur ſit $\frac{du^2}{dp^2}(1+pp)+uu = \frac{aaUU-db}{1-U}$ erit ſtatim

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{dU\sqrt{(1-U)}}{\sqrt{(daU-ab-uu(1-U))}}$$

Si pro u ex antecedentibus valor per U expreſſus ſubſtituatur, aequatio ſeparata integrari poterit per ſignum ſummatorium. Hinc p innoteſcet per U, ideoque etiam per u, et problema erit ſolutum.

PHY-

PHYSICO-MATHEMATICA.

Tab. II. Fig. 2. XV. Ac regula quidem haec certo fallit in corporis parte poſteriori ENB; ſi enim ponamus, vt in parte anteriori, eſſe $v = c$ coſ. Φ^2, puppis nauis praeciſe tanta vi propelleretur, quanta prora repellitur; vnde a puncto E retrorſum formula $v = c$ coſ. Φ^2 eo magis a veritate diſcedet, quo propius ad B perueniamus; tantum ergo in parte anteriori AME, tanquam toleranter vera, admitti poteſt. Interim tamen hinc coniectando ſuſpicari poterimus, quomodo motus aquae praeterlabentis circa puppim nauis ENB ſe ſit habiturus. Si enim puppis nihil ad reſiſtentiam conferat, certum eſt, aquam ab E ad B celeritate vniformi defluere, ea ſcilicet, quae debeatur altitudini c, et quam iam in E recuperauit. Sin autem in hac parte lentius decurrat, nauis hinc propulſionem accipiet, qua reſiſtentia diminuetur. Fieri autem nequit, vt vsquam euadat $v > c$, quia tunc preſſio prodiret negatiua. Hoc enim caſu aqua poſt nauim vacuum relinqueret, et nauis quaſi ſulcum traheret; vnde ob deficientem preſſionem a tergo reſiſtentia vtique augeretur.

XVI. Si igitur puppi nauis ENB eiusmodi figura tribui poſſet, vt aqua ab E et B progrediendo retardaretur, atque circa N et B minorem habitura eſſet celeritatem, quam in E, talis figura conſtructioni nauium eſſet aptiſſima iudicanda, quia hoc modo aqua puppim adeo antrorſum propelleret, reſiſtentiamque prorae diminueret. Verum ſi experientiam conſulamus, talem figuram vix dari colligere licet, quin potius omnis cura eo conferri debere videtur, vt ne alterum incommodum vſu veniat, quo ob vacuum pene na-

vem

vem relictum reſiſtentia adeo augetur. In eo imprimis ergo circa figuram puppis erit elaborandum, vt tale vacuum euitetur, ac puppis ita inſenſibiliter ad B vsque conuergat, vt aqua eam iugiter ſequatur, neque riuulus E f eam vsquam deſerat. In hoc etiam inſignis illa nauium proprietas verſatur, qua puppi talem figuram conciliare ſtudent, vt aqua libere ad gubernaculum decurrere queat, quo effectu fruſtraremur, ſi aqua circa puppim nauem deſereret, neque in gubernaculum allideret.

XVII. Ex celeritate autem aquae iuxta corpus defluentis figuram riuulorum illorum, per quos aqua motum ſuum inflectit, ſatis exacte colligere poterimus. Ac primo quidem pro riuulo corpori proximo fff eius amplitudo vbique celeritati reciproce debet eſſe proportionalis. Cum igitur, poſito angulo AMI $=\Phi$, celeritas aquae in M ſit $= c$ coſ. Φ, in hoc loco amplitudo riuuli f erit vt $\frac{1}{c \operatorname{coſ}. \Phi}$; quia autem hunc riuulum anguſtiſſimum concipimus, motusque aquae in M ſecundum curuae tangentem dirigitur, amplitudo Mq ad curuam ſtatuenda eſt normalis. Quare in normali QM producta capiatur portio Mq, quae ſit vbique vt $\frac{1}{c \operatorname{coſ}. \Phi}$, ſeu vt ſec. Φ, ob c conſtantem, et punctum q erit in curua proxima $fgqe$ riuulum exhibente. Verum hic Φ denotabit quoque angulum PMQ, poſita applicata PM ad fluminis directionem OA perpendiculari: vnde erit Mq vt $\frac{MQ}{MP}$. Producatur ergo vbique applicata PM in p, vt pars producta Mp ſit conſtantis magnitudinis, et ex p axi AO agatur parallela pq, normalem QM productum ſecans in q, eritque punctum q in curua quaeſita. Tab. II. Fig. 3.

XVIII.

XVIII. Cum ergo curua *fgqe* hac praedita ſit proprietate, vt ſit interuallum M*p* conſtantis magnitudinis, in puncto E, vbi tangens curuae eſt axi AO parallela, ipſa riuuli amplitudo E*e*, quae eſt applicatae PM parallela, hanc amplitudinem habebit, ſeu viciſſim interuallum M*p* vbique iſti amplitudini E*e* aequale eſt capiendum, vnde patet, quemadmodum ab E per M ad A progrediendo amplitudo riuuli continuo augeatur. Hinc ergo pro vertice corporis A, ſi recta A*d* fuerit ad curuam normalis, puncti *d* ab axe AO diſtantia D*d* quoque interuallo E*e* erit aequalis, et quoniam hic riuuli amplitudo per ipſam rectam D*d* aeſtimari debet, in hoc loco D*d* aquae celeritas aequalis eſt cenſenda celeritati in E*e*, hoc eſt verae fluminis celeritati, ita vt hic fluuius adhuc vero ſuo motu feratur, neque vllam ob corpus oppoſitum mutationem ſubierit. Quin etiam, ſi corpus in A angulo terminetur, quaelibet alia recta A*g* ad axem AO magis inclinata pariter ad curuam in A normalis eſt cenſenda, vnde et hic diſtantia ab axe G*g* ipſi E*e* et D*d* eſt aequalis, ſicque vltra *d* riuulus includetur recta *dgf*, axi AO parallela.

XIX. En ergo figuram primi riuuli *fgdqe* corpori AME proximi et altera parte cum axe AO tum corpore AME terminati, per cuius partem anteriorem O*f*D*d* aqua motu ſuo naturali affluit. Cum autem vltra D*d* ad corpus appropinquauerit, ob creſcentem amplitudinem riuuli, eius motus partim retardabitur, partim directionem ita inflectet, vt ab *f* ad *q* vsque directionem quidem curuae *fq* ſequatur, ex altera

tera vero parte primum ſecundum axem DA, tum vero ſecundum ductum curuae AM progrediatur; atque ad A ob maximam amplitudinem motu minimo feratur. At vero ſingula interualla E*e*, M*q*, D*d*, G*g* infinite parua ſunt concipienda, quae ſi denuo in duos pluresue riuulos minores ſubdiuidentur, vti in figura biſectio per lineam $f'g'd'q'e'$ repraeſentatur, vnde motus aquae per ſingulos hos riuulos eiusque retardatio et inflexio multo clarius perſpicitur.

XX. Quanquam haec tantum proxime ad veritatem accedere ſunt cenſenda, atque adeo vltra A verſus O lex continuitatis in formula noſtra non amplius obſeruatur, cum vi formulae amplitudo riuuli in *d* non per rectam D*d* ſed A*d* eſſet aeſtimanda, tamen haec ita ad veritatem, quam experientia monſtrare ſolet, accedere videntur, vt ſi non per hanc ipſam conſtructionem, tamen per ſatis ſimilem vera figura ſingulorum riuulorum definiri ſit cenſenda. Per experientiam enim certum eſt, tantum in modica a corpore diſtantia motum demum fluminis perturbari incipere, ita vt, cum retardetur, tum circa corpus inflectatur, omnino vti delineatio riuulorum ſecundum formulam noſtram facta manifeſto declarat. Atque in parte corporis antica AME nullum eſt dubium, quin interualla lateralia M*p* ſint inter ſe proxime aequalia, pone corpus autem, vt vidimus, haec aequalitas ceſſabit, dum ibi ipſae amplitudines M*q* potius aequalitatis legem ſequi videntur.

XXI. Vt a ſimplicioribus incipiam, terminetur corporis pars antica duabus lineis rectis AE et EF, quaTab. II. Fig. 4.

quarum haec ſit directioni fluminis parallela, illa vtcunque inclinata; haec ſcilicet figura quaſi ſemiſſis corporis eſt ſpectanda, iudiciumque partis vltra rectam AC ſitae pari modo abſoluetur, dummodo punctum A maxime promineat. Iam ad riuulos deſignandos ad rectam inclinatam AE ducantur normales A*d*, E*e*, tum in dato interuallo D*d*=F*f*, directioni fluminis OA parallelae agantur *od*, *fe*, iunganturque puncta *d* et *e* recta *de*; ac linea compoſita *odef* repraeſentabit tractum riuuli proximi, ſimili vero modo ſi interualla D′*d*′, F′*f*′ maiora capiantur, figura riuuli ſequentis *o*′*d*′*e*′*f*′ prodibit. Sic quidem ſecundum regulam inuentam figura riuulorum exprimetur; reuera autem circa *d* et *e* anguli obtundentur, quia aqua non ſubito, ſed ſucceſſiue, directionem mutabit: vnde quo magis riuuli a corpore diſtabunt, eo magis eorum tractus ad vniformitatem accedet, quin etiam interualla F*f* ratione D*d* ita inſenſibiliter diminuentur, vt tandem riuuli ſatis remoti directioni OA plane paralleli reſtituantur.

XXII. In primo ergo riuulo aqua per totum tractum O*od*D celeritatem ſuam et directionem retinebit, ac mutatio demum in diſtantia AD a corpore incipiet, niſi quatenus ob incuruationem ad *d* hoc interuallum aliquantum augeri eſt cenſendum. Cum igitur ſit D*d*: AD=AB:BE, erit iſta diſtantia ante corpus, in qua motus aquae perturbari incipit, $AD=\frac{BE}{AB}.Dd$ $=Dd.$ tang. BAE. Vnde ſi angulus BAE fuerit rectus, hoc ſpatium in infinitum augeri videtur; verum cum ipſa riuuli amplitudo D*d* pro infinite parua

ſit

ſit habenda, hinc interuallum ad magnitudinem finitam redigetur. Verum ſi plures poſitiones lateris E A, vt E α, inter ſe comparemus, quae omnes eadem latitudine A E ſint praeditae, ponamusque $BE = a$, $BA = x$, et amplitudinem riuuli $Dd = Ff = f$, locus D, vbi motus aquae primum perturbari incipit, a recta B E diſtabit interuallo $BD = x + \frac{af}{x}$, quod fit omnium minimum, ſi $x = \sqrt{af}$, ſeu $B\alpha = \sqrt{BE.Dd}$, quo caſu angulus $B\alpha E$ iam minime a recto diſtabit. Veriſimile autem eſt, ſi ſpatium $B\alpha$ adhuc minus capiatur, atque adeo euaneſcat, interuallum B D non fieri magis, cum poſitio B E non in maiori diſtantia motum aquae perturbare valeat, quam poſitio αE, vnde et pro poſitione B E haec diſtantia erit cenſenda $BD = 2\sqrt{af}$.

XXIII. Hinc ergo colligere poterimus, quomodo aqua ad ſuperficiem B E, quae ad directionem fluminis eſt normalis, alluat. Scilicet riuulus od, cuius ab axe O B diſtantia ſit Dd, motu inalterato affluet vsque ad d, vt ſit diſtantia $BD = 2\sqrt{BE.Dd}$, hicque demum motum ſuum inflectet ad e progrediens, vnde ſecundum ef lateri E F parallele proferetur, vt ſit diſtantia $Ff = Dd$. Simili modo riuulus remotior viam ſequetur $o'd'e'f'$, curſum ſuum iam in d' inflectens, vt ſit interuallum $BD' = 2\sqrt{BE.D'd'}$. In ſpatiis autem Bd et dd', quia ibi amplitudo riuulorum eſt maxima, motus aquae erit tardiſſimus, et ad B penitus quieſcet, vnde hic reſiſtentia quoque erit maxima, ad E verſus F autem, ob riuuli primi amplitudinem decreſcentem, continuo diminuetur, neque tamen diminutio tanta eſſe poteſt, vt reſiſtentia inde orta a Fig. 5,

regula vulgari notabiliter abhorreat. Haud aliter reſiſtentia comparata fore videtur, ſi latus EB retro fuerit inclinatum.

Fig. 6. XXIV. Sit iam corporis figura AMF quadrans circuli, atque, ad tractum riuuli proximi inueniendum, ponatur radius circuli $CA = CM = a$, amplitudo riuuli in F, nempe $Ff = f$. Pro puncto quocunque circuli M ponatur abſciſſa $CP = x$, applicata $PM = y$, vt ſit $xx + yy = aa$. Tum producto radio CM in m, vt ſit applicata curuae quaeſitae $pm = y + f$, erit abſciſſa $Cp = x + \frac{fx}{y}$. Statuantur ergo pro curua omf coordinatae $Cp = X$, $pm = Y$, vt ſit $Y = y + f$ et $x = \frac{(y+f)x}{y} = \frac{Yx}{y}$; eritque $y = Y - f$ et $x = \frac{X(Y-f)}{Y}$ vnde ob $xx + yy = aa$ pro curua omf habebitur haec aequatio $(XX + YY)(Y - f)^2 = aaYY$: quae ſi f vt parameter variabilis ſpectetur, innumerabiles iſtiusmodi curuas omf exhibebit, quae omnes ſecundum axem AO in infinitum extendentur, ab eoque tandem interuallo $= f$ diſtabunt, vnico caſu excepto, quo $f = o$ ipſum circulum AMF referente. Cum enim ſit $XX = \frac{aaYY}{(Y-f)^2} - YY$, ſi X in infinitum abeat, fiet $Y = f$. Neque vero omnes hae curuae riuulos exhibebunt, propterea quod quaeque ſequens non eodem modo ex praecedente definitur, vti prima ex ipſo circulo eſt constructa.

XXV. Si curua AMF fuerit alia curua quaecunque, aequatione inter $CP = x$ et $PM = y$ contenta, et pro riuulo proximo omf ponatur $Cp = X$ et $pm = Y$, erit $Y = y + f$ et $X = x - \frac{fdy}{dx}$, ſiquidem interuallum f fuerit minimum. At quoniam figura ſequen-

quentium riuulorum a praecedentibus ſimili modo definitur, ſi internallum $Ff = f$ ſtatuatur finitum, curuae omf figura expreſſione magis complicata definietur. Ac pro applicata quidem erit $Y = y + f$, verum abſciſſa X talis erit functio ipſarum x et f, vt ſit $\frac{dy}{dx} + (\frac{dX}{dx})(\frac{dX}{df}) = 0$, vnde natura functionis X determinatur. Si enim ponatur per ſeriem $X = x - fP + ffQ - f^3 R + f^4 S -$ etc. exiſtentibus P, Q, R, S etc. functionibus ipſius x, cuius quoque data eſt functio y, erit

$$dy = (dx - f\,dP + ff\,dQ - f^3\,dR + f^4\,dS \text{ etc.})(P - 2fQ + 3ffR - 4f^3 S + \text{etc})$$

vnde fit:

$$P = \frac{dy}{dx};\ Q = \frac{-PdP}{2dx};\ R = \frac{-PdQ - 2QdP}{3dx};\ S = \frac{-PdR - 2QdQ - 3RdP}{4dx} \text{ etc.}$$

ſicque data curua AM omnes riuulorum curuae om aſſignabuntur, ac per ſeriem quidem infinitam.

XXVI. Quoniam hae formulae tantum vero proxime tractum ſingulorum riuulorum declarant, ſuperfluum foret, in iis euoluendis operam conſumere. Verae tamen formulae ab his non admodum erunt diverſae, ac fortaſſe earum reſolutio multo facilior euadet. Praeterea vero notari conuenit, formulas veras non omnino determinatas eſſe poſſe, niſi forte extenſio fluuii in latitudinem ſit infinita; nam vtcunque fluuius circa corpus curſum inflectat, ad ripam tamen eius directionem ſequetur. Vnde aequatio inter X et Y ita debet eſſe comparata, vt poſito $f = 0$, praebeat ipſam corporis figuram AM; ſin autem ipſi f certus quidam valor tribuatur, vt tum figuram ripae exhibeat. Ita ſi ripa rectae AO ad diſtantiam $= b$ fuerit

parallela, ac ponatur $CF = a$, aequatio inter X et Y has proprietates habere debet, vt poſito $f = 0$, inde ipſa curua AM reſultet, ſeu fiat $X = x$ et $Y = y$, ſin autem ponatur $f = b - a$, quo caſu punctum f in ripam cadet, vt tum fiat $Y = b$ quicunque valor pro X ſit proditurus.

XXVII. Hinc autem ſatis probabiliter reſiſtentiam definire poterimus, qua corpus AMF in fluido canali OCIH datae amplitudinis $CH = b$ motum patitur, ad quem caſum regula vulgaris non eſt accommodata. Sit igitur celeritas, qua corpus ſecundum directionem AO promouetur, $= c$, et riuuli axi proximi amplitudo $Oo = e$; amplitudo autem corporis maxima $CF = a$; vt ſpatium in canali reſiduum ſit $FH = b - a$, per quod cum fluidum omne defluere debeat, aſſumo enim, id neque ſupra corpus neque infra defluere poſſe, amplitudo riuuli in Ff erit $\frac{b-a}{b} e = f$, vbi celeritas debita ſit altitudini k vt ſit $kff = cee$, ſeu $k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$. Ponatur nunc pro corporis figura $CP = x$; $PM = y$; et pro riuulo $Cp = X$ et $pm = Y$, neque hic erit $Y - y = f$, neque $Y - y = e$, ſed medium quendam tenebit valorem, vt ſit $Y - y = \frac{b-y}{b} e$. At eſt $Y - y : Mm = dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, vnde fit $Mm = \frac{b-y}{b} \cdot \frac{e\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$. Si ergo celeritas aquae ad M defluentis debita ſit altitudini v, erit $\frac{(b-y)^2 ee(dx^2+dy^2)}{bbdx^2} v = cee$, ſeu $v = \frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$.

XXVIII. Iam vero fluidi preſſio in M eſt per reſiſtentiae theoriam veram aequalis altitudini $C - v$. Sed quia in F preſſio debet eſſe nulla, euidens eſt, fore $C = k = \frac{cbb}{(b-a)^2}$, vnde preſſio in M erit $= \frac{cbb}{(b-a)^2}$

—

$-\frac{cbbdx^2}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, quae cum ſit normalis ad corporis ſuperficiem, inde naſcetur reſiſtentia ex curuae elemento $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ oriunda $= -\frac{cbbdy}{(b-a)^2} + \frac{cbbdx^2dy}{(b-y)^2(dx^2+dy^2)}$, cuius integrale dabit totam reſiſtentiam. Si amplitudo fluidi b eſſet infinita, foret reſiſtentia $= -cy + c\int\frac{dx^2dy}{dx^2+dy^2}$. Si ergo AMF fuerit linea recta AF, ſitque CA $= b$, exiſtente CF $= a$; erit $a-y : x = a : b$, ſeu $a-y = \frac{ax}{b}$, et $dy = -\frac{adx}{b}$, hincque $dx^2+dy^2 = \frac{dx^2(aa+bb)}{bb}$. Vnde hoc caſu reſiſtentia erit $= C + \frac{acbbx}{b(b-a)^2} + \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-y)}$ quae per totam rectam AF extenſa fiet:

$$\frac{acbb}{(b-a)^2} + \frac{bbcb}{aa+bb} - \frac{bbcbb}{(aa+bb)(b-a)} = \frac{acbb}{(b-a)^2} - \frac{abbcb}{(aa+bb)(b-a)}$$

quae expreſſio abit in hanc: $\frac{aacb(ab+bb)}{(aa+bb)(b-a)^2}$ At ſi fluidum eſſet infinitum, reſiſtentia foret $= \frac{a^3c}{aa+bb}$; quae ſi ponatur $=$ R, illa reſiſtentia erit $= \frac{b(ab+bb)}{a(b-a)^2}$ R, ideoque maior, quam R.

XXIX. Experientia quoque hoc ipſum egregie confirmat, qua conſtat corpus in canali anguſtiori promotum, maiorem pati reſiſtentiam, quam in canali ampliori, atque adeo ſi amplitudo corporis CF amplitudini canalis fuerit aequalis, ita vt corpus canalem perfecte expleat, tum reſiſtentiam fieri infinitam. Quia enim fluidum non niſi per ſpatium FH defluere poſſe aſſumitur, hoc ſpatio euaneſcente corpus moueri non poſſet, quin fluidum in minus volumen compingeretur; at fluidum nullius compreſſionis capax aſſumitur. Quod ſi planum ad directionem motus fuerit normale, vti ſi ipſa linea CF $= a$ celeritate $\sqrt{c}$ in directione CO promoueatur, reſiſtentia in fluido infinito foret $= ac =$ R,

in

in canali autem amplitudinis $CH = b$, eadem linea reſiſtentiam ſuſtinebit $= \frac{bb}{(b-a)^2} R$, quae ergo erit ad illam vt CH^2 ad FH^2. Niſi ergo amplitudo CH prae amplitudine corporis CF fuerit praegrandis, augmentum reſiſtentiae erit notabile. Sic ſi $CH = 2CF$ erit reſiſtentia $= 4R$, ſi $CH = 3CF$, erit ea $= \frac{9}{4}R$; ac ſi fuerit $CH = 10CF$, erit reſiſtentia $= \frac{100}{81}R = 1\frac{19}{81}R$.

XXX. Quanquam autem hinc riuulorum, per quos aqua circa quodque corpus defluit, deſignatio non adeo difficilis videtur, tamen eorum natura cum principio continuitatis vix conciliari poteſt. Cum enim riuulorum partem corporis anticam cingentium amplitudo ſit coſinui anguli, quem tangens corporis cum directione motus conſtituit, reciproce vero ſaltem proxime proportionalis, iuxta partem poſticam vero eorum amplitudo ſit quaſi conſtans, nulla huius anguli, quem Φ vocauimus, functio excogitari poſſe videtur, quae pro parte antica, vbi hic angulus eſt poſitiuus, eius coſinum proxime exhibeat, pro parte autem poſtica, vbi iſte angulus fit negatiuus, quaſi non amplius ab hoc angulo pendeat, ſed conſtans euadat. Interim hoc certum eſt, amplitudinem riuuli exacte per $\frac{1}{cos. \Phi}$ non exprimi, quia tum ſimilis mutatio circa partem poſticam locum habere deberet, quod veritati repugnat. Cauſam quidem ampliationis riuulorum in parte antica agnoſcimus, ſimulque in parte poſtica abſentiam huius cauſae concedere debemus, ſed quomodo haec cum principio continuitatis, cui calculus eſt ſuperſtruendus, cohaereant, nullo modo patet, ex quo ſumma difficultas,

cultas, qua Theoria motus fluidorum etiam nunc premitur, multo magis perſpicitur, quo propius ad eam pertingere videmur.

XXXI. Quae hactenus tradita ſunt, tantum ad reſiſtentiam plani proprie ſunt referenda, nihilo vero minus reſiſtentia nauis aliusue corporis in aqua moti inde colligi poteſt, dum eius partem ſubmerſam per ſectiones inter ſe parallelas in ſtrata minutiſſima ſectam concipimus. Ita ſi AMENB fuerit ſectio nauis quaecunque horizontalis, eius reſiſtentiam inde quoque aeſtimare licet, ſiquidem aqua reſiſtens in hoc plano permaneat, neque ſurſum vel deorſum iuxta nauem defluat. Quod igitur ad figuram puppis ENB attinet, in genere intelligimus, aquam iuxta eam defluere non poſſe, niſi lineae ENB curuatura ſit vbique valde exigua. Cum enim in Ef nulla detur preſſio, nulla inde vis adeſt, quae motum aquae ab E ſecundum directionem axi AB parallelam progreſſurae inflectat, atque hanc inflexionem a ſola grauitate aquae produci debere, quod quidem in ſectionibus profundioribus citius euenit, quam magis eleuatis. Tum vero, quo velocius nauis promouetur, eo difficilius aquae decurſus incuruatur, et niſi inflexio ENB ſit ſatis parua, aqua nauem deferet, et ob deficientem ibi preſſionem aquae, reſiſtentia prorae etiam a pondere aquae proram vrgente augebitur, quod ingens vitium nauium reputatur. Tab. II. Fig. 2.

XXXII. Etiamſi autem aqua iuxta puppem ENB bene defluat, neque iſtud incommodum ſit pertimeſcendum, tamen hoc ad facilem gubernaculi actionem, ad quam non minus nauem inſtructam eſſe oportet, non

ſufficit. Cum enim aqua fere vsque ad B defluxerit, quia ab altera parte ſimili modo fertur, perinde motum continuare debet, quaſi ſecundum rectam BV obex ipſi obiiceretur, et quia prope B curſum inflectere cogitur, perinde vti in A eſt factum, eius motus eo magis retardabitur, quo maior fuerit angulus ABN, quod quidem in maioribus nauibus vſu venire poteſt, etiam ſi linea ENB ſit arcus circuli admodum magni; in aqua autem circa B fere ſtagnante gubernaculum vix vllam vim exerere valebit. Quocirca neceſſe eſt, vt figura ENB non ſolum lente incuruetur, ſed etiam in B cum axe AB angulum ſatis acutum conſtituat. Interim tamen, ob iſtam aquae retardationem circa B, nauis inde maiorem preſſionem ſuſtinebit, qua reſiſtentia prorae imminuetur, vnde, niſi gubernaculi ratio haberi deberet, angulus fere rectus ad B curſum nauis potius accelleraret, quam retardaret.

XXXIII. Hae autem conſiderationes ad commodiorem euolutionem formularum, quibus vniuerſa Theoria motus fluidorum continetur, viam aperire videntur. Cum enim iſtae formulae in genere pro quocunque loco tam motum fluidi, quam preſſionem, exhibeant, quae ſumma generalitas in cauſa erat, quod hae formulae minus tractabiles euaſerint, ea, quae hactenus ſunt allata, non exiguam ſpem facilioris calculi faciunt, ſi non ſolum riuulos, per quos ſingulae aquae particulae deferuntur, contemplemur, ſed etiam harum curvarum traiectorias orthogonales in calculum introducamus: quoniam enim hae traiectoriae cuiusque riuuli in quoque loco amplitudinem commodiſſime oſtendunt, inde

inde celeritas aquae, quae in quolibet riuulo amplitudini reciproce eſt proportionalis, aptiſſime definitur, vnde deinceps preſſio per formulam concinniorem exprimi poſſe videtur. Aſſumo autem, tam omnem aquam, quam eius motum, in eodem plano eſſe conſtitutum, eumque iam ita ad ſtatum permanentem eſſe perductum, vt riuulorum tractus ſint conſtantes, neque vlli amplius mutationi obnoxiae.

XXXIV. Quo autem haec facilius ad Theoriam reſiſtentiae accommodari queant, omnes determinationes ad figuram corporis AME aquae immiſſi referri conueniet. Hanc ergo figuram pro fixa habebo, quia in reſiſtentiae inueſtigatione perinde eſt, ſiue corpus contra aquam ſtagnantem, ſiue aqua contra corpus quieſcens pari celeritate feratur. Iuxta corpus ergo aqua, quicunque motus ei tribuatur, ſecundum eius figuram AME praeterfluet, et in maioribus diſtantiis motus aquae fiet per certas lineas curuas RYS, rys, quibus riuuli conſtituuntur. Talium riuulorum ſeries intra AME et RYS infinita multitudo concipi debet, quae omnes inter ſe tantum ratione parametri differant. Sit MYy traiectoria orthogonalis quaecunque, quae ex M egreſſa omnes riuulos normaliter traiiciat, vti etiam in M ad ipſam curuam datam AME eſt normalis. Hocque modo puncta riuulorum Y et y inprimis cum puncto M connectuntur, vt magis ad hoc punctum, quam ad aliud quoduis pertinere ſint cenſenda. Tab. III. Fig. 1.

XXXV. Ponamus ergo pro iſto puncto M abſciſſam AP $= s$, et applicata PM exprimetur per certam quandam functionem ipſius s: pro riuulo autem

RYS parameter ſit $=b$, qui pro ſequente rys abeat in $b+db$, pro ipſa autem curua AME euaneſcat. Iam ſitus puncti Y pendebit partim a puncto M, partim a parametro, vnde eius coordinatae, quae ſint $AX=x$, $XY=y$, erunt functiones iſtarum duarum quantitatum s et b; ponamus ergo:

$$dx=P\,ds+Q\,db \text{ et } dy=R\,ds+S\,db,$$

quae relatio inter x et y ita debet eſſe comparata, vt, poſito $b=0$, ipſam curuam AME praebeat: at ſi ipſi b certus quidem et conſtans valor tribuatur, aequatio ſit proditura pro curua RYS; pro qua ergo erit $dx=P\,ds$ et $dy=R\,ds$. Sin autem punctum M fixum ſumatur, variabilitas ſolius parametri b dabit traiectoriam orthogonalem MYy, pro qua ergo ducta applicata proxima xy, et Yz, axi AX parallela, erit $Xx=Q\,d\,b$ et $yz=S\,d\,b$; quia pro punctis in eadem traiectoria ſitis quantitas s non variatur.

XXXVI. Cum iam Yy ſit ad curuam RYS normalis, erit ex natura traiectoriarum orthogonalium $zy:Yz=dx:-dy=P:-R$ vnde fit $S:Q=P:-R$ ideoque $PQ+RS=0$. Vt huic conditioni ſatisfaciamus, ponamus ſtatim:

$$Q=RT \text{ et } S=-PT \text{ vt ſit}$$

$$dx=P\,ds+RT\,db \text{ et } dy=R\,ds-PT\,db.$$

Porro autem erit riuuli amplitudo $Yy=db\sqrt{(QQ+SS)}$ $=T\,db\sqrt{(PP+RR)}$, cui cum celeritas aquae in Y, quatenus aqua in eodem riuulo comparatur, ſit reciproce proportionalis, poſita celeritate in $Y=v$, ſtatuamus $v=\frac{B}{T\sqrt{(PP+RR)}}$, vbi B denotat functionem ipſius

para-

parametri b tantum. Reſoluatur haec celeritas ſecundum directiones coordinatarum x et y, ſintque celeritates deriuatae ſecundum AX $= u$ et ſecundum XY $= v$; ac reperitur:

$$u = \frac{BP}{T(PP+RR)} \text{ et } v = \frac{BR}{T(PP+RR)}$$

vnde, ob $uu + vv = \upsilon\upsilon$ erit $\upsilon\upsilon = \frac{BB}{TT(PP+RR)}$.

XXXVII. Quia igitur eſt $\frac{B}{T(PP+RR)} = \frac{T\upsilon\upsilon}{B}$, habebimus:

$$u = \frac{PT\upsilon\upsilon}{B} \text{ et } v = \frac{RT\upsilon\upsilon}{B}$$

Conueniet autem potius ipſas has celeritates u et v in calculum introduci, quam quantitates P et R ibi relinqui, vnde colligetur:

$$P = \frac{Bu}{T\upsilon\upsilon};\ R = \frac{Bv}{T\upsilon\upsilon};\ Q = \frac{Bv}{\upsilon\upsilon};\ S = \frac{-Bu}{\upsilon\upsilon}$$

et $dx = \frac{B}{T\upsilon\upsilon}(u\,ds + Tv\,db)$ et $dy = \frac{B}{T\upsilon\upsilon}(v\,ds - Tu\,db)$

quas ergo formulas integrabiles eſſe oportet. Quare quia $\upsilon\upsilon = uu + vv$ et B functio ipſius b tantum, facile colligitur, cuiusmodi functiones eſſe debeant u, v et T, vt his duobus requiſitis ſatisfiat. Siquidem, quod regula vulgaris exigebat, celeritas in quouis riuulo proportionalis eſſet coſinui anguli, quem curua cum axe facit, ſeu $\upsilon = \frac{CP}{\sqrt{(PP+RR)}}$, haberemus $Cu = \upsilon\upsilon$, exiſtente C functione ipſius b tantum, ideoque $v = \sqrt{(Cu-uu)}$ ſeu $u = \frac{\upsilon\upsilon}{C}$ et $v = \frac{\upsilon}{C}\sqrt{(CC-\upsilon\upsilon)}$, ita vt integrabiles eſſe deberent hae formulae:

$$dx = \frac{B}{CT}ds + \frac{B\,db}{C\upsilon}\sqrt{(CC-\upsilon\upsilon)};\ dy = \frac{B\,ds}{CT\upsilon}\sqrt{(CC-\upsilon\upsilon)} - \frac{B}{C}db.$$

XXXVIII. Verum iam perpendamus, quid Theoria motus fluidorum requirat. Oſtendi autem, ſi preſſio aquae in Y exponatur per altitudinem p, et ex viribus acceleratricibus naſcatur efficacia $= V$, tum ſumtis x et y vtcunque variabilibus, hanc aequationem locum habere debere:

$$p = V - \int \left(u\,dx \left(\frac{du}{dx}\right) + v\,dx \left(\frac{du}{dy}\right) + u\,dy \left(\frac{dv}{dx}\right) + v\,dy \left(\frac{dv}{dy}\right) \right)$$

Totum ergo negotium huc redit, vt iſta formula integrationem actu admittat; niſi enim hoc eueniat, talis motus, qualis per quantitates u et v fingitur, omnino ſubſiſtere nequit. Si quaeſtio de preſſione reſtringatur ad vnicum riuulum, oſtendi hoc integrale eo reduci, vt fiat $p = V - \frac{1}{2}uu$, vbi $\frac{1}{2}uu$ referat altitudinem celeritati aquae debitam, vti iam ſupra inueni. Verum pro tota motus extenſione neceſſe eſt, vt illud differentiale, cuius integrale occurrit, ſit completum, vti quidem loquendi mos eſt.

XXXIX. Quodſi formulas hactenus inuentas huc transferre velimus, habemus quidem valores pro dx et dy; verum pro formulis $\left(\frac{du}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dv}{dx}\right)$ notandum eſt in differentiatione ita ſolum x poni variabile, vt y maneat inuariatum; ergo ob $dy = o$ erit $Tudb = vds$ ſeu $db = \frac{vds}{Tu}$; vnde fit $dx = \frac{Bds}{Tu}$. Quare ſi ponamus

$$du = K\,ds + L\,db \text{ et } dv = M\,ds + N\,db$$

erit in hac hypotheſi

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(K\,ds + \frac{Lvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{KTu + Lv}{B}$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right) = \left(M\,ds + \frac{Nvds}{Tu}\right) : \frac{Bds}{Tu} = \frac{MTu + Nv}{B}$$

Simili-

Similiter pro formulis $(\frac{du}{dy})$ et $(\frac{dv}{dy})$ aſſumitur x conſtans, vnde erit $db = \frac{-u\,ds}{Tv}$ et $dy = \frac{B\,ds}{Tv}$, ſicque prodibit:

$$(\tfrac{du}{dy}) = (K\,ds - \tfrac{L\,u\,ds}{Tv}) : \tfrac{B\,ds}{Tv} = \frac{KTv - Lu}{B}$$

$$(\tfrac{dv}{dy}) = (M\,ds - \tfrac{N\,u\,ds}{Tv}) : \tfrac{B\,ds}{Tv} = \frac{MTv - Nv}{B}.$$

XL. Ex his ergo differentiale ſuperius, cuius integrale in formulam pro p datam ingreditur, abibit in formam ſequentem:

$$+\tfrac{u}{T\upsilon\upsilon}(u\,ds + Tv\,db)(KTu + Lv)$$

$$+\tfrac{v}{T\upsilon\upsilon}(u\,ds + Tv\,db)(KTv - Lu)$$

$$+\tfrac{u}{T\upsilon\upsilon}(v\,ds - Tu\,db)(MTu + Nv)$$

$$+\tfrac{v}{T\upsilon\upsilon}(v\,ds - Tu\,db)(M\Gamma v - Nu)$$

quae quatuor formulae ſtatim ad has duas rediguntur:

$$K(u\,ds + Tv\,db) + M(v\,ds - Tu\,db).$$

Cum iam ſit $K = (\frac{du}{ds})$ et $M = (\frac{dv}{ds})$
preſſio quaeſita p ſequenti definietur aequatione:

$$p = V - \int((u\,ds + Tv\,db)(\tfrac{du}{ds}) + (v\,ds - Tu\,db)(\tfrac{dv}{ds}))$$

ſeu ob $u\,du + v\,dv = \upsilon\,d\upsilon$ habebitur:

$$p = V - \int(ds(\tfrac{\upsilon\,d\upsilon}{ds}) + T\,db(\tfrac{v\,du - u\,dv}{ds})).$$

XLI. Haec formula adhuc concinnior reddi poteſt, introducendo praeter ipſam celeritatem υ, eius quoque directionem. Sit ergo Φ angulus quem directio motus in Y cum axe Ao facit, et quia ſit $u = \upsilon\cos.\Phi$ et $v = \upsilon\sin.\Phi$, conficitur hinc $v\,du - u\,dv = -\upsilon\upsilon\,d\Phi$, ſicque preſſio p definietur per hanc aequationem:

$$p = V - \int(ds(\tfrac{\upsilon\,d\upsilon}{ds}) - T\upsilon\upsilon\,db(\tfrac{d\Phi}{ds}))$$

quae

quae non amplius pendet a poſitione coordinatarum, vtpote arbitraria; et hic quantitates, $\upsilon\upsilon$ et Φ conſiderandae ſunt tanquam functiones ipſarum s et b. Hic vero euidens eſt, ſi b ſumatur conſtans, integrationem nullam habere difficultatem, cum prodeat

$$p = V - \tfrac{1}{2}\upsilon\upsilon + D$$

denotante D functionem parametri D; quare ſi et eius variabilitatis ratio habeatur, eſſe oportet

$$db\left(\frac{\upsilon d\upsilon}{db}\right) - dD = -T\upsilon\upsilon\, db\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)$$

vnde hoc obtinemus requiſitum, vt eſſe debeat

$$\frac{dD}{db} = \left(\frac{\upsilon d\upsilon}{db}\right) + T\upsilon\upsilon\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \text{functioni ipſius } b \text{ tantum.}$$

XLII. Verum inſuper neceſſe eſt, vt formulae differentiales pro dx et dy inuentae fiant completae ſeu integrabiles; valoribus autem pro u et v ſubſtitutis habemus:

$$dx = \frac{B}{T\upsilon}(ds \cos\Phi + T\, db \sin\Phi)$$

$$dy = \frac{B}{T\upsilon}(ds \sin\Phi - T\, db \cos\Phi).$$

Quae formulae vt fiant integrabiles neceſſe eſt ſit: ſi breuiatis gratia ponamus $\frac{1}{T\upsilon} = \Theta$,

$$\Theta\cos\Phi.\frac{dB}{db} - B\Theta\sin\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\cos\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\cos\Phi}{\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \frac{B\sin\Phi}{\upsilon\upsilon}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)$$

$$\Theta\sin\Phi.\frac{dB}{db} + B\Theta\cos\Phi\left(\frac{d\Phi}{db}\right) + B\sin\Phi\left(\frac{d\Theta}{db}\right) = \frac{B\sin\Phi}{\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) + \frac{B\cos\Phi}{\upsilon\upsilon}\left(\frac{d\upsilon}{ds}\right)$$

quae

quae formulae reducuntur ad has duas:

$$\Theta \mathfrak{v}\mathfrak{v}(\frac{d\Phi}{db}) = (\frac{d\mathfrak{v}}{ds}) \text{ et } \frac{dB}{B\,db} = \frac{1}{\Theta\mathfrak{v}}(\frac{d\Phi}{ds}) - \frac{1}{\Theta}(\frac{d\Theta}{db}).$$

Ergo praeterquam quod ſit $(\frac{d\mathfrak{v}}{ds}) = \Theta\mathfrak{v}\mathfrak{v}(\frac{d\Phi}{db})$ neceſſe eſt, vt binae ſequentes quantitates

$$\frac{1}{\Theta\mathfrak{v}}(\frac{d\Phi}{ds}) - \frac{1}{\Theta}(\frac{d\Theta}{db}) \text{ et } \mathfrak{v}(\frac{d\mathfrak{v}}{db}) + \frac{\mathfrak{v}}{\Theta}(\frac{d\Phi}{ds})$$

ſint functiones ſolius parametri b.

XLIII. Ex his iam poterimus diiudicare, num eiusmodi fluidi ſtatus, cuius reſiſtentia perfecte ſequatur regulam vulgarem, ſit poſſibilis, et ſub quibus conditionibus? id quod inueſtigauiſſe operae erit pretium. Regula autem vulgaris poſtulat, vt ſit $u = \frac{uu}{C}$; cum igitur hic poſuerimus $u = \mathfrak{v}\cos\Phi$, fiet $\mathfrak{v} = C\cos.\Phi$, exiſtente C functione ipſius b tantum: hinc erit

$$(\frac{d\mathfrak{v}}{ds}) = -C\sin.\Phi(\frac{d\Phi}{ds}) \text{ et } (\frac{d\mathfrak{v}}{db}) = \frac{dC}{db}\cos.\Phi - C\sin.\Phi(\frac{d\Phi}{db}).$$

Verum eſſe oportet $\Theta\mathfrak{v}\mathfrak{v}(\frac{d\Phi}{db}) = (\frac{d\mathfrak{v}}{ds})$, vnde fit

$$CC\Theta\cos.\Phi^2(\frac{d\Phi}{db}) = -C\sin.\Phi(\frac{d\Phi}{ds})$$

ideoque $\Theta = \frac{-\sin.\Phi}{C\cos.\Phi^2} \cdot \frac{(\frac{d\Phi}{ds})}{(\frac{d\Phi}{db})}$, et $T = \frac{-\cos.\Phi}{\sin\Phi} \cdot \frac{(\frac{d\Phi}{db})}{(\frac{d\Phi}{ds})}$

Cum autem porro eſſe debeat $\frac{dD}{db} = \mathfrak{v}(\frac{d\mathfrak{v}}{db}) + \frac{\mathfrak{v}}{\Theta}(\frac{d\Phi}{ds})$, erit

$$\frac{dD}{db} = \frac{C\,dC}{db}\cos.\Phi^2 - CC\sin.\Phi\cos.\Phi(\frac{d\Phi}{ds}) - \frac{CC\cos\Phi^3}{\sin.\Phi}(\frac{d\Phi}{db})$$

 ſiue

ſiue

$$\frac{dD}{db} = \frac{CdC}{db}\text{coſ.}\,\Phi^2 - \frac{CC\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi}\left(\frac{d\Phi}{db}\right).$$

XLIV. Hinc ſi tantum b pro variabili habeamus, s vero vt conſtantem ſpectemus, habebimus hanc aequationem differentialem:

$$dD = CdC\,\text{coſ.}\,\Phi^2 - \frac{CCd\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi}{\text{ſin.}\,\Phi},$$

quam ſi more conſueto integremus, et loco conſtantis functionem ipſius s, quae ſit Σ, introducamus, dum E et F pro functionibus ipſius b tantum aſſumimus, obtinebimus:

$$\text{ſin.}\,\Phi = \surd\frac{E}{F+\Sigma} \text{ et coſ.}\,\Phi = \surd\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}$$

exiſtente $lC = \tfrac{1}{2}\int\frac{dF}{E}$ et $D = \tfrac{1}{2}CC - \tfrac{1}{2}\int\frac{CCdE}{E}$.

Hinc ergo eruitur:

$$d\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\surd E(F+\Sigma)}$$

$$\text{et } d\Phi = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE - Ed\Sigma}{2(F+\Sigma)\surd E(F-E+\Sigma)}$$

ita vt ſit:

$$\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) = \frac{-d\Sigma\surd E}{2(F+\Sigma)ds\surd(F-E+\Sigma)} \text{ et}$$

$$\left(\frac{d\Phi}{db}\right) = \frac{FdE - EdF + \Sigma dE}{2(F+\Sigma)db\surd E(F-E+\Sigma)};$$

XLV.

XLV. His valoribus ſubſtitutis obtinebimus:

$$\upsilon = C\sqrt{\frac{F-E+\Sigma}{F+\Sigma}} \quad \text{et}$$

$$\Theta = \frac{E\sqrt{E(F+\Sigma)}}{C(F-E+\Sigma)} \cdot \frac{db\,d\Sigma}{(F+\Sigma)dE\,ds - E\,dF\,ds}$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{dE}{db} = e$; $\frac{dF}{db} = f$; $\frac{d\Sigma}{ds} = \sigma$ eritque $dC = \frac{C\,dF}{2E} = \frac{Cf\,db}{2E}$; et

$$l\Theta = \tfrac{3}{2}lE + \tfrac{1}{2}l(F+\Sigma) - lC - l(F-E+\Sigma) + l\sigma - l(e(F+\Sigma) - fE).$$

Sit porro $de = \varepsilon\,db$ et $df = \zeta\,db$, eritque ſumto ſolo b variabili

$$\frac{d\Theta}{\Theta\,db} = \frac{3e}{2E} + \frac{f}{2(F+\Sigma)} - \frac{f}{2E} + \frac{e-f}{F-E+\Sigma} - \frac{\varepsilon(F+\Sigma)+E\zeta}{e(F+\Sigma)-fE}$$

At vero eſſe debet $\frac{dB}{B\,db} = \frac{1}{\Theta\upsilon}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right) - \left(\frac{d\Theta}{\Theta\,db}\right)$; vnde ob

$$\frac{1}{\Theta\upsilon} = \frac{\sqrt{(F-E+\Sigma)}}{E\sqrt{E}} \cdot \frac{e(F+\Sigma)-fE}{\sigma} \quad \text{fiet}$$

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon(F+\Sigma)-\zeta E}{e(F+\Sigma)-fE}$$

XLVI. Quia haec formula ab altera variabili s omnino immunis eſſe debet, transformetur in hanc ſpeciem:

$$\frac{dB}{B\,db} = \frac{-2e}{E} + \frac{f}{2E} + \frac{f-e}{F-E+\Sigma} + \frac{\varepsilon}{e} + \frac{\varepsilon fE - \zeta eE}{ee(F+\Sigma) - efE}$$

 vnde

vnde manifeſtum eſt, eſſe oportere:

$$ee(f-e)(F+\Sigma)-efE(f-e)+(\varepsilon fE-\zeta eE)(F+\Sigma)-EE(\varepsilon f-\zeta e)=0$$

ideoque $ee(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

et $ef(f-e)=E(\zeta e-\varepsilon f)$

ſicque neceſſe eſt, vt ſit $f=e$, vnde ſit $\zeta=\varepsilon$; et $F=E$; atque hinc prodit $\frac{dB}{B\,db}=\frac{-3e}{2E}+\frac{\varepsilon}{e}$; ideoque integrando

$lB=le-\frac{3}{2}lE$, ſeu $B=\frac{e}{E\sqrt{E}}$. Porro vero erit

$$\upsilon=C\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}} \quad \text{et} \quad \Theta=\frac{E\sigma\sqrt{E(E+\Sigma)}}{Ce\Sigma\Sigma}$$

ac denique ſin. $\Phi=\sqrt{\frac{E}{E+\Sigma}}$ et coſ. $\Phi=\sqrt{\frac{\Sigma}{E+\Sigma}}$.

XLVII. Verum ob $F=E$, ſit $lC=\frac{1}{2}lE$ et $C=\sqrt{E}$, vnde ſumta pro E functione quacunque ipſius b, et pro Σ functione quacunque ipſius s, ſtatuaturque $dE=e\,db$ et $d\Sigma=\sigma\,ds$

erit $\upsilon=c\sqrt{\frac{E\Sigma}{E+\Sigma}}$; et $\Theta=\frac{E\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{ce\Sigma\Sigma}$

item $D=\frac{1}{2}CC-\frac{1}{2}\int\frac{CC\,dE}{E}=\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}E=0$ vel conſtans.

Tum vero erit $T=\frac{1}{\Theta\upsilon}=\frac{e\Sigma\sqrt{\Sigma}}{E\sigma\sqrt{E}}$, ac denique

ob $\frac{B}{T\upsilon}=B\Theta=\frac{\sigma\sqrt{(E+\Sigma)}}{e\Sigma\Sigma\sqrt{E}}$, obtinebimus

$$dx=\frac{\sigma\,ds}{\Sigma\sqrt{E\Sigma}}+\frac{e\,db}{E\sqrt{E\Sigma}} \quad \text{hincque} \quad x=\frac{-2}{\sqrt{E\Sigma}}$$

$$dy=\frac{\sigma\,ds}{\Sigma\Sigma}-\frac{e\,db}{EE} \quad \text{hincque} \quad y=\frac{1}{E}-\frac{1}{\Sigma}$$

Quare

Quare cum ſit $\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{E} - y$, erit $x = -2V\left(\frac{1}{EE} - \frac{y}{E}\right)$
Sit $\frac{1}{E} = a$, et fiet $xx = 4aa - 4ay$. Preſſio autem in quouis loco Y erit $p = V - \frac{E\Sigma}{2(E+\Sigma)} = V - \frac{2acc}{xx+4aa}$.

XLVIII. Iam ergo audacter pronunciare poſſumus, regulam reſiſtentiae vulgarem exacte locum habere non poſſe, niſi quando figura corporis AEB fuerit parabolica, et ſinguli riuuli aeb, $a'e'b'$ quoque ſint inflexi ſecundum parabolas, quae cum illa parabola AEB, tam axem EF, quam focum F, habeant communem, vnde et vaſis extremam oram $\alpha\varepsilon\beta$ ſecundum ſimilem parabolam formatam eſſe oportet. Cum igitur in reliquis caſibus omnibus regula vulgaris a veritate aberret, reſiſtentia quoque aliam ſequetur legem, neque iſti regulae erit conſentanea. Quando ergo ſpecię huius regulae nonnulli ſeducti putauerunt, fieri poſſe, vt corpus in fluido nullam reſiſtentiam paſſurum moueatur, propterea quod actio fluidi in partem poſticam deſtruat vim in partem anticam exertam, et in fluidis terreſtribus haec deſtructio a tenacitate prohiberi cenſeatur; iam manifeſtum eſt, hanc concluſionem nullo modo admitti poſſe. Quia enim corpus parabolicum AEB non vtrinque terminatur, hic caſus neutiquam ad reſiſtentiae doctrinam traduci poteſt. Tab. III. Fig. 2.

PRINCIPIA THEORIAE MACHINARVM.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Primum omnes machinas in duas claſſes diſtribui conuenit: quarum prima eas complectitur, quae dum in actione verſantur, ita vniformiter mouentur, vt omnes eius partes perpetuo motu vniformi ferantur. Ad alteram vero claſſem eae pertinent machinae, quarum ſingulae partes in motu ſuo modo accelerantur, modo retardantur, etiamſi forte tota machina motum vniformem mentiatur.

Prioris claſſis ſunt machinae oneribus eleuandis deſtinatae, item molae frumentariae, quippe quae dum in actione debita verſantur, omnes earum partes iugiter motu vniformi agitantur, ita vt nusquam neque acceleratio, neque retardatio motus adſit. Piſtrina vero, aliaeque machinae, quae tundendo opus conficiunt, quoniam piſtilla alternatim attolluntur, ac remittuntur, ad claſſem poſteriorem ſunt referendae: quorſum etiam pertinent omnis generis horologia, in quibus cum nullum proprie adſit onus ſuperandum, tota actio in alterna partium acceleratione ac retardatione conſumitur. Machinae quoque aquis attollendis deſtinatae huic claſſi ſunt annumerandae, quoniam cum embola non motu vniformi

formi agitantur, tum etiam ipſi aquae, quae primum fuerat in quiete, motus imprimi debet, ad quod neceſſario acceleratio requiritur. Poſterior ergo claſſis latiſſime patet, atque adeo ſaepe machinas, quae ad priorem pertinere debebant, recipit; id quod earum vitio euenit, quando dentes, quibus rotae ſe mutuo vrgent, non ita fuerint elaborati, vt dum vna motu vniformi gyratur, reliquae pari motu cieantur, ſed quaſi per ſuccuſſiones impellantur. Alio autem loco oſtendi, cuiusmodi figuram dentibus binarum rotarum ſe inuicem trudentium tribui oporteat, vt dum altera motu vniformi circumagitur, alterius quoque motus futurus ſit vniformis. Quam neceſſaria autem haec ſit machinarum diſtinctio, ad earum actionem recte perſpiciendam, mox clarius exponetur.

2. *In Machinis primae claſſis, quae in omnibus partibus motu vniformi feruntur, vis ad earum motum conſeruandum requiſita praeciſe aequalis eſt ei, qua opus eſt ad aequilibrium, ſeu quae reſiſtentiae tantum non ſuperandae par eſt.*

Quae igitur vis aequilibrio producendo ſufficit, eadem motum quantumuis celerem in machina, dummodo fuerit vniformis, conſeruare valet. Hinc ſi machina ponderi 100 librarum eleuando deſtinata ita ſit inſtructa, vt pro aequilibrio opus ſit vi 10 librarum, eadem vis 10 librarum ſufficiet ad idem pondus 100 ℔ celeritate quantumuis magna vniformiter eleuandum. Statim enim ac motus machinae ad vniformitatem eſt perductus, quia ſingulae partes ob inertiam ad hunc mo-

motum conſeruandum ſunt diſpoſitae, continuatio motus plus non requirit, quam vt reſiſtentia motui aduerſans ſuperetur, quae cum eadem ſit atque in ſtatu quietis, eadem vis, quae machinam in ſtatu quietis conſeruare, eiue motum vel minimum valet, ad motum vniformem conſeruandum ſufficit. Mirum quidem videbitur et experientiae contrarium, quod celerrimus motus maiori vi non indigeat, quam tardiſſimus; cum tamen in machinis, vel aqua, vel animalibus actis, nullum ſit dubium, quin ad motum velociorem producendum maior aquae copia, maiorue animalium numerus requiratur. Verum his caſibus perpendendum eſt, augendo vel aquae copiam, vel animalium numerum, vim inde ortam non augeri, propterea quod, quo velocius machina mouetur, ſiue aquae, ſiue animalium vis in machinam agens minuatur: vnde fit, vt etiamſi pro motu celeriori maior vis non requiratur, tamen maiori ſiue aquae copia, ſiue animalium numero ſit opus: quod idem de reliquis virium generibus, quae ad machinas momouendas adhiberi ſolent, eſt tenendum. Minime igitur noſtra propoſitio, qua motum etiam velociſſimum, dummodo fuerit vniformis, maiorem vim non exigere ſtatuimus, quam tardiſſimum affirmamus, veritati adverſari eſt cenſenda, quin potius, vti firmiſſimis Theoriae principiis innititur, ita quoque experientiae apprime conformis deprehenditur, dummodo quantitatem virium rite aeſtimare diſcamus.

3. *Hinc euidens eſt, ſi vis machinam ſollicitans vel maior fuerit, vel minor ea, quae ad aequilibrium conſeruandum requiritur, ſeu quae ipſi vel minimum motum im-*

imprimere valet, tum motum machinae priori caſu acceleratum poſteriori vero retardatum iri.

Viciſſim ergo intelligitur, ſi motus machinae debeat accelerari, maiorem vim requiri, quam quae aequilibrio conſeruando ſufficiat: hoc enim caſu non ſolum reſiſtentiam, ſeu vim motui machinae proprie aduerſantem, vinci oportet, ſed etiam ipſi accelerationi inertia tam oneris, quam ſingularum ipſius machinae partium, reluctatur. Quamobrem ſi ex vi data, quae ſuperet eam, qua ad aequilibrium ſuſtinendum opus eſt, motus machinae acceleratus definiri debeat, praeter vim reſiſtentem ſimul inertiae ratio eſt habenda, quae inveſtigatio idcirco proprie ex principiis motus eſt expedienda, dum conſideratio motus vniformis per ſola principia ſtatica, ſeu aequilibrii, perfici poteſt. Vnde fit, vt ſi accelerationem cuiuspiam machinae definire velimus, in calculos plerumque admodum moleſtos prolabamur, dum motus vniformis facillime ad calculum reuocatur. Similis eſt ratio retardationis motus, quae oritur, ſi vis ſollicitans minor fuerit ea, quam aequilibrii conſeruatio exigit: tum enim vis reſiſtentiae, motui machinae reluctans, quatenus vim ſollicitantem ſuperat, in retardationem motus impenditur; cuius accurata explicatio pariter ex motus principiis eſt petenda. Quando ergo machina alternatim motu accelerato et retardato agitatur, tuto concludere poſſumus, vim ſollicitantem alternatim maiorem minoremque eſſe ea, quae ad motum vniformem eſſet neceſſaria: difficillimum autem plerumque erit ipſam accelerationem et retardationem aſſignare. Interim tamen ſine dubio pronunciare licet, ſi omnes

illae vires modo maiores, modo minores, ad mediam quandam vim reuocentur, hanc minorem non eſſe futuram ea vi, quae ad motum vniformem requireretur; ſi modo acceleratio et retardatio vtrinque aeque a motu vniformi diſcedant.

4. *In machinis prioris claſſis, quae motu vniformi agitantur, productum ex vi ſollicitante in celeritatem, qua incedit, aequale eſt producto ex vi reſiſtente in celeritatem, qua promouetur.*

Haec propoſitio ſequitur ex principio vniuerſali aequilibrii, quo conſtat tum binas vires contrarias machinae cuicunque applicatas eſſe in aequilibrio, cum impreſſo machinae vel minimo motu vires fuerint reciproce vt ſpatia percurſa, ſeu vti celeritates; hinc enim producta vtriusque vis in ſuam celeritatem fient inter ſe aequalia. Oſtendimus autem, in motu machinarum vniformi ad reſiſtentiam vincendam maiorem vim non requiri, quam in ſtatu aequilibrii: vnde, cum motus machinae tam vi ſollicitanti, quam reſiſtenti, certum celeritatis gradum tribuat, ſi vtraque vis per ſuam celeritatem multiplicetur, ambo producta neceſſe eſt, vt inter ſe ſint aequalia. Verum celeritas, qua vis quaecunque mouetur, ſecundum directionem eius propriam aeſtimari debet, in directione ſcilicet vis mente concipiatur fixum quodpiam punctum, cum quo conferatur punctum, vbi vis machinae applicatur; et ex mutatione momentanea diſtantiae horum punctorum celeritatem definiri oportet Quomodo autem quouis caſu haec bina producta, quorum aequalitate actio machinae continetur, recte exprimi conueniat, mox accuratius exponetur.

tur. Quod autem ad machinas motu non vniformi operantes attinet, hinc ſatis eſt perſpicuum, ſi productum ex vi ſollicitante in ſuam celeritatem maius fuerit, quam productum ex vi reſiſtente in ſuam celeritatem, quoniam tum vis ſollicitans maior eſt quam motus vniformitas requirit, motum machinae inde accelerari; contra vero, ſi illud productum hoc fuerit minus, retardari. Ex quo intelligitur, iſtorum productorum accuratam cognitionem ad actionem omnis generis machinarum definiendam maxime eſſe neceſſariam. Quomodocunque ergo machina fuerit compoſita, hic non tam ipſa compoſitionis ratio in computum ingreditur, quam ratio celeritatum, quibus cum potentia tum onus, dum machinae motus imprimi concipitur, promouentur: quandoquidem ex hac ratione ſtatim ratio inter potentiam et onus, quam tam motus vniformis, quam acceleratus et retardatus requirit, innoteſcit.

5. *Momentum effectus inuenitur, ſi vis motui machinae reluctans, ſeu cui mouendae machina deſtinatur, per viam ab ea dato tempore deſcriptam multiplicetur. Pro hoc autem tempore hic perpetuo minutum ſecundum aſſumemus.*

In hoc momento effectus vera continetur notio effectus a machina quacunque editi. Quo celerius enim onus, ſeu vis reſiſtens, mouetur, ſeu, quo maius fuerit ſpatium, per quod dato tempore promouetur, eo maior aeſtimatur machinae effectus, et, manente celeritate eadem, quo maior fuerit ipſa reſiſtentia, eo maior quoque effectus cenſetur. Ad hoc ergo momentum definiendum primo ipſa vis reſiſtens, quatenus motui machinae reluctatur, explorari, eiusque quantitas

 per

per pondus aequiualens exprimi debet, tum vero diſpiciendum eſt, per quantum ſpatium ea dato quodam tempore promoueatur. Hinc momentum effectus ad definitum quodpiam tempus adſtringitur, pro quo hic commoditatis gratia minutum ſecundum aſſumamus; ita vt hac expreſſione effectus vno minuto ſecundo editus indicetur, vnde autem facile ad quoduis aliud tempus, ſiquidem motus fuerit vniformis, transferri poterit. Ita ſi onus, cuius pondus $=Q$, ſit verticaliter attollendum, idque ſingulis minutis ſecundis per altitudinem a eleuetur; erit momentum effectus $=Qa$. Sin autem onus horizontaliter promoueri debeat, eius tantum frictio ſuperanda eſt, quae ſi aequiualeat ponderi Q, onusque pariter per ſpatium a ſingulis minutis ſecundis protrahatur, momentum effectus pariter erit $=Qa$. At ſi onus ſuper plano inclinato ſurſum trahi debeat, vis reſiſtens Q partim pondere oneris, partim frictione exprimenda erit. Quod ſi in molis momentum effectus ſit aeſtimandum, indagari debet vis ad molam circum agendam requiſita, cuius quidem punctum applicationis imprimis eſt ſpectandum; quod enim quo magis ab axe motus fuerit remotum, eo minor vis reſiſtentiae ſuperandae par erit. Quoniam vero haec vis per ſpatium vno minuto ſecundo per curſum multiplicari debet, quod in ratione diſtantiae ab axe creſcit, productum eandem quantitatem retinebit, ſiue diſtantia illa maior minorue aſſumatur, vnde momentum effectus fixum obtinebit valorem. Si machina ad aquam eleuandam fuerit accommodata, ex Theoria fluidorum oſtendi poteſt, momentum effectus inueniri, ſi copia aquae, eius

eius ſcilicet pondus, quae ſingulis minutis ſecundis eleuatur, per totam altitudinem eleuationis multiplicetur, ſimilique modo pro omnibus omnino caſibus momentum effectus aſſignari poterit.

6. *Momentum impulſus ſimili modo reperitur, ſi vis machinam actu impellens multiplicetur per ſpatium, quod ab ea dato tempore conficitur: vbi iterum pro hoc dato tempore minutum ſecundum aſſumetur.*

Duae ergo res requiruntur ad momentum impulſus conſtituendum; primo ſcilicet ipſa vis impellens, cuius quantitatem pondere metiri licet, deinde ſpatium, quod ea agendo ſingulis minutis ſecundis abſoluit: harumque duarum quantitatum multiplicatione momentum impulſus oritur, quod ergo homogeneum erit cum momento effectus. Circa aeſtimationem ipſius vis impellentis plerumque ad celeritatem, qua in machinam agit, eſt reſpiciendum; niſi enim haec vis a grauitate ponderis deſcendentis petatur, quod, dummodo aequabiliter deſcendat, perpetuo aequali vi vrget, aucta celeritate, qua in machinam agit, ſimul eius quantitas diminui ſolet, idque diuerſimode pro varia virium ſollicitantium natura. Ita ſi machina operis hominum animaliumue impellatur, eorum vis actu exerta maxime ab actionis celeritate pendet: cum enim animal vi indigeat ad ſe ipſum mouendum, atque omni, quo pollet, niſu adhibito ſe vltra certum celeritatis gradum mouere nequeat, quo propius eius actio ad hunc gradum acceſſerit, eo minorem vim exerere valebit, quippe quae cum illum gradum attigerit, penitus euaneſcet. Quare ſi vim impellentem aeſtimare velimus, minime magni-

tudinem conatus, quo machinam quieſcentem ſollicitat, tanquam eius menſuram accipere debemus, ſed ad hoc iam ipſam celeritatem, qua machina mouetur, ſpectari oportet, vnde pro natura vis agentis eius vera quantitas definiri queat: atque hanc demum vim per viam minuto ſecundo percurſam multiplicando obtinebimus verum momentum impulſus. Iſtud vis agentis decrementum a motu iam acquiſito ortum clariſſime perſpicitur in machinis a vi illabentis aquae impulſis: quo celerius enim rota aquaria gyratur, eo minorem vim ab aqua ſuſtinet; dum contra vis aquae in rotam quietam eſt maxima. Probe igitur cuiusque generis virium, quae ad machinas mouendas adhibentur, natura eſt exploranda, vt pro quolibet celeritatis gradu vera vis agentis quantitas aſſignari poſſit.

7. *Si machina frictione careat, eiusque motus fuerit vniformis, momentum effectus praecise aequale erit momento impulſus; ideoque ex cognito momento impulſus verus effectus eiusue momentum poterit determinari.*

Aſſumo hic primum, machinam frictione carere, tum vero eius motum eſſe vniformem, vt conſeruatio motus machinae nullam vim requirat, totaque vis impellentis actio in onus promouendum impendatur. Ita enim fiet, vt ſuperatio vis reluctantis maiorem vim non exigat, quam quae aequilibrio continendo ſufficeret, propterea quod ſolum onus motui machinae reſiſtentiam opponit. Cum igitur productum ex vi reſiſtente in ſuam celeritatem aequale ſit vi impellenti per

per ſuam celeritatem multiplicatae, haeque celeritates ſint vt ſpatia eodem tempore confecta, ſi earum loco ſpatia vno minuto ſecundo abſoluta ſubſtituamus, illa producta abeunt in momenta impulſus et effectus, prouti ea modo definiuimus, quae igitur inter ſe aequalia eſſe oportet. Hinc ſi cognita fuerit quantitas vis impellentis vna cum celeritate, qua agit, inde ſimul momentum effectus innoteſcit; ita ſi vis impellens ſit $= P$, ſpatiumque, quod ab ea ſingulis minutis ſecundis conficitur, $= p$, exprimet Pp momentum impulſus, cui cum aequale ſit momentum effectus, ſi Q deſignet reſiſtentiam oneris, et q ſpatium, per quod vno minuto ſecundo promoueatur, erit $Qq = Pp$, hincque $q = \frac{Pp}{Q}$. In hac formula nota illa aequalitas inter cauſam et effectum continetur, quatenus ea quidem rite ad actionem machinarum accommodatur; eique actioni machinarum certus terminus praefigitur, quem nunquam transgredi valeant. Pendet igitur quantitas effectus non ſolum a quantitate vis impellentis, ſed etiam a celeritate, qua agere poteſt, et quoniam vidimus, plerasque vires, quae ad machinas agitandas adhiberi ſolent, ita eſſe comparatas, vt aucta celeritate ipſae minuantur, de quantitate effectus nihil certi definire licet, niſi exploratum ſit, qua lege quantitas vis impellentis pro ſingulis celeritatis augmentis diminuatur. Atque hinc euenire poteſt, vt manente eadem vi ſollicitante, effectus machinae plurimum variari poſſit, prout ſcilicet ea vis alia atque alia celeritate fuerit praedita, quod tamen neutiquam aequalitatem inter cauſam et effectum euertit; propterea quod in iuſta cauſae aeſtimatione ſimul celeritatis ratio haberi debet. 8.

8. *Frictio vero, quam partes machinae, dum inter ſe commouentur exerunt, non admodum iudicium machinarum turbat; quoniam enim motui machinae reluctatur, reſiſtentiam oneris tantum augere eſt cenſenda, ex quo momentum effectus data quadam quantitate augeri debet, antequam momento impulſus aequale ſtatuatur.*

Hic ex experientia aſſumitur frictionis quantitatem eandem manere, quantacunque celeritate machina moueatur: vnde machinae cuiusuis propoſitae frictio explorari poteſt, ſi remota oneris reſiſtentia inueſtigetur, quanta vi opus ſit, ad machinam, dum eſt in quiete, vel tantillum commouendam; tanta enim vis deinceps quoque in motu, vtcunque fuerit rapidus, perpetuo ad frictionem ſuperandam requiretur. Perinde igitur erit, ac ſi reſiſtentia oneris certa quadam quantitate ſit aucta, ſicque commode frictio cum ipſo onere coniungetur, ita vt ob frictionem reſiſtentia oneris maior ſit aeſtimanda, quam re vera eſt. Quoniam enim reſiſtentia oneris perpetuo eadem manet, quacunque celeritate moueatur, frictio congrue ad oneris reſiſtentiam adiicitur. Dum minus congrue propter eam vis impellens quapiam quantitate imminui conciperetur, quia haec cum celeritate motus variatur, etiamſi ratione recte inſtituta res eodem redeat. Atque hinc frictionis nulla ratione ſeorſim habita reſiſtentia oneris ob eam aucta ſtatim per experientiam cognoſci poterit: quaecunque enim machina cum adiuncta oneris reſiſtentia fuerit propoſita, quaeratur vis, quae illi vel tantillum commouendae par ſit, atque ex regulis ſtaticis ſtatim colligetur, quanta ſit tota vis reſiſtentiae, quae tam ex onere

onere ipſo, quam ex frictione reſultat. Quae ſi fuerit cognita, ac ponatur $= Q$, ea in momentum effectus introduci debet; cui deinceps momentum impulſus erit coaequandum, dummodo motus fuerit vniformis, prorſus vt ante eſt praeceptum. Totum ergo negotium huc redit, vt in computo ob frictionem reſiſtentia oneris data quapiam quantitate augeatur, ac momentum effectus ex hac reſiſtentia aucta determinetur, cui aeque ac ante momentum impulſus aequale ſtatui debebit.

9. *Propoſita machina cum reſiſtentia ſuperanda ante omnia indagari debet quantitas vis impellentis, quae ad eam in motu vniformi conſeruandam requiritur. Haecque inueſtigatio commodiſſime per experimenta inſtituitur, vt ſimul frictio in effectu comprehendatur.*

In hunc finem bina machinae loca praecipue ſunt notanda, vbi tam vis impellens, quam reſiſtentia oneris, applicatur, atque ex ſtructura machinae patebit, quaenam ratio, dum mouetur, inter celeritatem vis impellentis et celeritatem oneris intercedat. Quare ſi quantitas oneris, ſeu vis motui machinae reluctantis, fuerit $= Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem vis reluctantis ſit vt m ad n, quantitas vis impellentis foret $= \frac{Qn}{m}$, ſi motus machinae ob frictionem non impediretur. Quando ergo frictio adeſt, quae inſuper vinci debet, maior vis impellens requiritur, ad quam inueniendam, cum frictio difficulter a priori definiri queat, commodiſſime ad experimenta confugietur. Machina ſcilicet in quiete conſtituta ei in loco, vbi vis im-

8. *Frictio vero, quam* [illegible] hibeatur, quae primo *inter ſe commouentur ex*[illegible] it, deinde ea ſenſim augea- *machinarum turbat*[illegible] minimum motum imprimere *luctatur, reſiſt*[illegible] habebitur ea ipſa vis, quae mo- *ex quo m*[illegible] quantumuis celeri, dummodo fuerit vni- *geri d*[illegible] accelerando ſufficiet. Ob frictionem autem [illegible] vis maior prodibit, quam $\frac{Qn}{m}$, eoque magis hanc quantitatem excedet, quo maior fuerit frictio; ſeu po- ſita hac vi per experimentum inuenta $= P$, erit $P > \frac{Qn}{m}$, ideoque $P = \frac{Qn}{m} + F$, exiſtente F eius augmento ad frictionem ſuperandam requiſito. Vel ſi ponatur $F = \frac{Gn}{m}$, ob $P = \frac{n}{m}(Q + G)$, frictio eundem praeſtabit effectum, ac ſi loco reſiſtentiae Q maior reſiſtentia $Q + G$ ſuperari deberet. Neque vero opus eſt, vt in hoc experimento vis explorans P in eo ipſo loco, vbi deinceps vis impellens applicari debet, applicetur; ſi enim in alio loco applicetur, cuius celeritas ad celeritatem in loco vis impellentis ſit vt μ ad ν, eaque vis reperiatur $= \Pi$, hinc facile concludetur vera vis impellentis P quantitas, quippe quae erit $P = \Pi\frac{\mu}{\nu}$: quemadmodum ex principiis ſtaticis eſt manifeſtum. Hoc ergo modo plura experimenta inſtitui poterunt, quo certiores de vera quantitate vis P reddamur.

10. *Quantacunque fuerit reſiſtentia ſuperanda, machina ſemper ita inſtrui poteſt, vt data vis impellens, quae ſimul data celeritate agat, ei vniformiter mouendae ſufficiat; vnde itaque momentum effectus ſponte innoteſcet.*

Ex-

Exprimat Q reſiſtentiam ſuperandam, quae ſimul frictionem rite aeſtimatam et ad locum reſiſtentiae reductam complectatur: deinde ſit P vis impellens, quae ſingulis minutis ſecundis ſpatium p abſoluat; quoniam enim vires, quibus machinae agitari ſolent, ita ſunt comparatae, vt aucta actionis celeritate minuantur, de earum quantitate abſolute nihil certi pronunciare licet, niſi celeritas, qua agant, ſimul definiatur. His poſitis, ex vulgaribus Mechanicae elementis conſtat, quemadmodum partes machinae inſtrui ac diſponi debeant, vt vis P reſiſtentiam Q in aequilibrio continere valeat. Efficiendum ſcilicet eſt, vt dum machina tantillum mouetur, ſpatia tam a vi impellente P, quam a reſiſtentia Q percurſa ipſis viribus ſint reciproce proportionalia. Machina igitur ita inſtructa, motus quicunque vniformis maiorem vim impellentem quam P non requiret; et quia vis impellentis quantitas eatenus eſt $=P$, quatenus ea praeſcripta celeritate agit, hoc eſt ſingulis minutis ſecundis ſpatium $=p$ conficit, etiam in motu machinae vniformi haec celeritas vi impellenti conueniet. Cum igitur momentum impulſus ſit $=Pp$, eidem momentum effectus erit aequale, ita ſi q denotet ſpatium, per quod reſiſtentia Q ſingulis minutis ſecundis promouetur, quia eſt $Qq=Pp$, erit $q=\frac{Pp}{Q}$, ſicque verus machinae effectus innoteſcit, ſiquidem motus vniformis ſit capax. Quoniam vero in reſiſtentia ſuperanda Q frictionem ſumus complexi, euidens eſt, quo maior fuerit frictio, eo minorem eſſe futurum verum machinae effectum. Hinc ſi frictio aequiualeat vi G in loco reſiſtentiae applicatae, atque iam Q denotet

 ipſam

ipſam reſiſtentiam ſuperandam, erit $Pp = (Q+G)q$, ideoque verum momentum effectus $Qq = Pp - Gq$, ſeu ob $q = \frac{Pp}{Q+G}$ erit id $Qq = \frac{PQ}{Q+G} p. = \frac{Q}{Q+G} \cdot Pp$; ſcilicet in ratione $Q+G$ ad Q minus erit, quam momentum impulſus Pp.

11. *Niſi vis impellens ſit pondus deſcendens, eius quantitas a celeritate, qua agit, pendet, ita vt pro celeritate nulla ſit maxima, tum vero aucta celeritate decreſcat, donec, cum celeritas datum gradum attigerit, penitus euaneſcat; neque vnquam hunc gradum ſuperare queat.*

Iſta vis impellentis diminutio ratione auctae celeritatis clariſſime in impulſu aquae contra obicem mobilem perſpicitur. Ponamus enim obicem eſſe planum, et aquam in eum directe celeritate altitudini c debita illidere, obicisque ſuperficiem eſſe $= aa$, erit vis aquae aequalis ponderi maſſae aquae, cuius volumen eſt $= aac$, quae ſtatuatur $= A$. Iam ſi obex habeat motum, quo impulſui aquae directe cedat, eiusque celeritas debita ſit altitudini v, perinde erit, ac ſi aqua tantum celeritate $\sqrt{c} - \sqrt{v}$ illidat, cum ante celeritate $\sqrt{c}$ incurriſſet, vnde nunc vis impulſus aequabitur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= aa(\sqrt{c} - \sqrt{v})^2$, quae ergo ob $aac = A$ erit $= A(1 - \sqrt{\tfrac{v}{c}})^2$. Cum igitur haec vis euaneſcat, ſi fiat $\sqrt{v} = \sqrt{c}$, eademque ſit $= A$, dum adhuc in quiete verſatur, generalius actionem huiusmodi virium ita deſcribere poterimus, vt dicamus, ſi quantitas talis vis, dum quieſcit, ſit $= A$, dum autem ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= f$ percurrit,

percurrit, euaneſcat, tum ſi ita moueatur, vt ſingulis minutis ſecundis ſpatium p, exiſtente $p < f$, abſoluat, eius quantitatem fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quae etſi ex natura impulſus aquae ſunt deſumta, tamen latius patere, atque adeo in actione hominum animaliumque locum habere videntur; de quo eo minus dubitare licet, cum huiusmodi vires nonniſi propemodum ad calculum reuocari queant. De hominibus ergo atque animalibus, quorum ope machinae agitari ſolent, ſtatuemus, ſi hominis animaliſue, dum quieſcit, vis fuerit $= A$, ea vero, quando ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= f$ percurrit, euaneſcat, tum eiusdem vim, dum ita mouetur, vt ſingulis minutis ſecundis ſpatium $= p$ abſoluat, fore $= A(1 - \frac{p}{f})^2$. Quodſi ergo talis vis, dum ſingulis minutis ſecundis per ſpatium $= p$ fertur, ponatur $= P$, erit $P = A(1 - \frac{p}{f})^2$, ac ſi inſuper conſtet vis A, quam eadem vis in quiete exerit, hinc viciſſim concludemus maximam eius celeritatem f, qua nullam amplius vim exeret: erit enim $1 - \frac{p}{f} = \sqrt{\frac{P}{A}}$, hincque $f = \frac{p\sqrt{A}}{\sqrt{A} - \sqrt{P}}$, vnde natura huiusmodi virium diſtincte intelligitur.

12. *Si huiusmodi vis ad machinam mouendam adhibeatur, quae in quiete maior ſit, quam reſiſtentiae aequilibrium requirit, tum machina mox ad motum vniformem perducetur, quo deinceps perpetuo agitabitur, ſiquidem ipſa machina motus vniformis fuerit capax.*

Sit igitur haec vis impellens ita comparata, vt in quiete eius quantitas ſit $= A$; dum autem ſingulis

minutis ſecundis ſpatium $=f$ abſoluit, in nihilum abeat: eiusdem ergo vis impellentis quantitas erit $=A(1-\frac{p}{f})^2$, dum minuto ſecundo ſpatium $=p$ conficiet. Sit porro tota reſiſtentia ſuperanda $=Q$, qua ſimul frictio comprehendatur, ipſaque Machina ita inſtructa, vt ſtatus aequilibrii vim $=\frac{n}{m}Q$ requirat. His poſitis, quia aſſumo eſſe $A>\frac{n}{m}Q$, ſtatim ab initio motus machinae accelerabitur, et quoniam aucto motu vis impellens continuo imminuitur, acceleratio tamdiu durabit, quoad vis impellens quantitatem $\frac{n}{m}Q$ attigerit. Re vera quidem hoc demum tempore elapſo infinito eueniet, verum plerumque mox ab initio machinae talis motus imprimetur, qui ab iſto vniformitatis gradu vix parte centeſima differat, qui igitur in praxi iam pro vniformi haberi poterit. Quod ſi euenerit, motusque iam pro vniformi haberi poſſit, neceſſe eſt, vt ſit $A(1-\frac{p}{f})^2=\frac{n}{m}Q$ ideoque $1-\frac{p}{f}=\sqrt{\frac{nQ}{mA}}$ et $p=\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$, quae formula ſpatium exprimit, quod tum a vi impellente ſingulis ſecundis abſoluetur; visque reſiſtens ergo eodem tempore per ſpatium $=\frac{n}{m}p=\frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.f$ promouebitur. Vnde momentum effectus habebitur $=\frac{n}{m}.\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}.fQ=\frac{n}{m}(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}})fQ$, quo ſimul momentum impulſus definitur. Patet ergo, quo maioris celeritatis vis impellens fuerit capax, antequam actionem amittat, eo maiorem ab ea produci effectum; his autem caſibus machina tardius ad motus vniformitatem perducetur. Ac ſi adeo ſpatium f fuerit infinitum, quo caſu vis impellens conſtanter eandem quantitatem A retineret,

retineret, tum quidem tandem effectum in infinitum excreſcere poſſe, verum mox tam debilia incrementa acciperet, vt a leuiſſima reſiſtentia vlterior acceleratio impediri poſſet. Semper tamen caeteris paribus effectus eo maior obtinebitur, quo maius fuerit ſpatium f, etiamſi is non in eadem ratione augeri ſit cenſendus.

13. *Etiamſi igitur eadem impulſione ad eandem reſiſtentiam ſuperandam vtamur, effectus tamen plurimum a machinae indole pendebit, ſeu a ratione* m : n, *quae inter celeritates vis impellentis et reſiſtentis ſtatuitur. Haecque adeo ita temperari poterit, vt maximus effectus conſequatur.*

Quoniam pro poſitionibus modo in genere traditis inuenimus momentum effectus $= \frac{n}{m}\left(1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}}\right) f Q$, patet eius quantitatem manentibus A, f et Q plurimum a ratione $m:n$, quam ſtructura machinae praebet, pendere; ſi enim fuerit vel $\frac{n}{m} = 0$, vel $\frac{nQ}{mA} = 1$, ſeu $\frac{n}{m} = \frac{A}{Q}$ vtroque caſu effectus penitus euaneſcit. Vnde inter limites 0 et $\frac{A}{Q}$ dabitur valor quidam medius pro fractione $\frac{n}{m}$ capiendus, qui cum maximo effectu futurus ſit coniunctus; quem ergo potiſſimum operae pretium erit cognouiſſe. Ponamus in hunc finem $\frac{n}{m} = zz$, et huic formulae $zz - z^3 \sqrt{\frac{Q}{A}}$ maximum valorem conciliari oportebit; reperietur autem $2z - 3zz\sqrt{\frac{Q}{A}} = 0$, ideoque $z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{A}{Q}}$, quare habebitur $\frac{n}{m} = \frac{4A}{9Q}$; ſeu machina ita inſtrui debet, vt ſit celeritas vis impellentis ad celeritatem vis reſiſtentis vt $9Q$ ad $4A$. Quodſi ergo iſte

valor

valor $\frac{4A}{9Q}$ pro fractione $\frac{n}{m}$ ſubſtituatur, fiet $\sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{2}{3}$ et $1 - \sqrt{\frac{nQ}{mA}} = \frac{1}{3}$; hincque maximum momentum effectus obtinebitur

$$\frac{4A}{9Q}\cdot\frac{1}{3}\cdot fQ = \frac{4}{27}Af.$$

Hinc igitur luculenter perſpicimus, quantopere effectus ab idonea machinae diſpoſitione pendeat, cum vnico modo iſte effectus maximus obtineri queat, ſcilicet efficiendo, vt ſit $m:n = 9Q:4A$, a qua proportione ſi machina receſſerit, ſemper minorem effectum producet, etiamſi tam vis impellens, quam vis reſiſtens, cum frictione maneant eaedem, quam ſi haec iuſta ratio obſeruetur. Interim ſi vel tantillum ab ea aberretur, detrimentum in effectu vix erit ſenſibile, quoniam maxima et minima aliquam latitudinem admittunt, id quod commode evenit, quia in praxi hanc rationem ſummo rigore vix obſeruare licet. In eo tamen erit elaborandum, vt machina, quam fieri poteſt exactiſſime, ad hanc rationem accommodetur.

14. *Si vis impellens ita ſit comparata, vt celeritate* f *omnem actionem amittat, machina ſemper maximum praeſtabit effectum, ſi ita inſtruatur, vt vis impellentis celeritas fiat pars tertia ipſius* f.

Sumo hic, vt et in ſequentibus, ſpatium vno minuto ſecundo percurſum pro menſura celeritatis; ac huiusmodi vim impellentem contemplor, cuius dum eſt in quiete quantitas ſit $= A$, quae autem celeritate f lata omni actione deſtituatur. Huius igitur vis, dum celeritate $= p$ procedit, quantitas erit $= (1 - \frac{p}{f})^2$.
Quodſi

Quodſi iam reſiſtentia ope machinae ſuperanda ſit $=Q$, et ratio celeritatis vis impellentis ad celeritatem reſiſtentiae ponatur $=m:n$, quae ratio a ſtructura machinae pendet, vidimus, vt effectus maximus obtineatur, ſtatui oportere $\frac{n}{m}=\frac{4A}{9Q}$. Tum vero pro celeritate vis impellentis naniſcimur $p=\frac{\sqrt{mA}-\sqrt{nQ}}{\sqrt{mA}}f=(1-\sqrt{\frac{nQ}{mA}})f$: erit itaque ob $\sqrt{\frac{nQ}{mA}}=\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}f$. Hoc autem immediate ex actione vis impellentis colligi poterit, quippe cuius momentum impulſus maximum reddi debet, vt maximum momentum effectus obtineatur Verum ſi vis impellens celeritate p agere aſſumatur, quia tum eius quantitas eſt $=A(1-\frac{p}{f})^2$, erit momentum impulſus $=Ap(1-\frac{p}{f})^2$, quod maximum factum praebet $A(1-\frac{p}{f})^2=\frac{2Ap}{f}(1-\frac{p}{f})$, ſeu

$$1-\frac{p}{f}=\frac{2p}{f},\text{ hincque } 3p=f \text{ et } p=\tfrac{1}{3}f.$$

Effectus igitur maximus produci nequit, niſi vis impellens ita agat, vt eius celeritas p ſit pars tertia celeritatis f, qua omni actione priuatur. Poſito autem $p=\frac{1}{3}f$, erit quantitas vis impellentis $=A(1-\frac{1}{3})^2 =\frac{4}{9}A$; vnde pro data vi reſiſtente machina ita attemperari debet, vt vis $\frac{4}{9}A$ in aequilibrio conſiſtat cum vi reſiſtente frictione ſimul complexa, ſeu vt vis $\frac{4}{9}A$ tantum non motum machinae imprimere valeat. Scilicet ſi tota vis reſiſtens ſit $=Q$, celeritas vis impellentis ad celeritatem reſiſtentis ſtatui debet, vt $9Q$ ad $4A$, quo facto momentum effectus, ideoque et momentum impulſus erit $=\frac{4}{27}Af$, quod nullo modo maius effici

poterit ſeu fieri omnino nequit, vt ab eadem vi impellente maior effectus obtineatur.

15. *Cum ratione celeritatis, qua vis impellens agit, machina ad maximum effectum producendum fuerit instructa, frictio quoque ſpectari debet, quae primo, quantum fieri poteſt, erit diminuenda, tum vero eius effectus eo minor reddetur, quo longius vis impellens ab axe, circa quem machinam vrget, remouetur.*

Aſſumo ergo frictionem iam eo vsque eſſe minutam, vt minor fieri nequeat, et vim impellentem rotae eſſe applicatam, cuius radius ſit $= r$, in eadem autem diſtantia vi opus eſſe F ad frictionem ſuperandam. Iam ſit Mf momentum impulſus, idque maximum, cuius vis impellens eſt capax, quae agat celeritate $= p$, et quia vis ad frictionem ſuperandam requiſita F, vtpote in eodem loco applicata, eadem celeritate agit, erit eius momentum $= Fp$, ideoque verum momentum effectus detracta frictione erit $= Mf - Fp$, ex quo quantitas effectus ob frictionem minutus aeſtimari debet. Ponamus iam, rotae illius primariae radium augeri in ratione $1 : \lambda$, ita vt vis impellens eadem nunc applicetur in diſtantia λr ab eius axe, et in hoc loco vi tantum opus erit $\frac{1}{\lambda}F$ ad frictionem ſuperandam: machina autem paucis mutandis denuo ita inſtruatur, vt pro motu vniformi vis impellens celeritate p, cui maximum momentum impulſus reſpondeat, incedat, et cum frictio nunc tantum huius momenti partem $\frac{1}{\lambda}Fp$ poſtulet, verum momentum effectus hoc

caſu erit $= Mf - \frac{1}{\lambda} Fp$, ideoque eo maius, quam caſu praecedente, quo maior fuerit numerus λ Hinc igitur patet fieri poſſe, vt ab eadem vi impellente, frictione non imminuta, multo maior effectus impetrari poſſit: hic autem ſuppono, aucto illius rotae diametro frictionem non augeri, vnde haec regula ita debet limitari, vt quatenus augenda rota hac principali frictio vel non augetur, vel ſaltem in minore ratione augetur, quam diameter rotae, eatenus ſemper conueniat hanc rotam maximam fieri. Antequam autem ad hanc regulam confugiamus, maxime intereſt, vt notis artificiis frictionem, quantum quidem fieri poteſt, diminuere conemur; tum vero obſeruatio huius regulae nihilominus maximam afferet vtilitatem, propterea quod, etiamſi frictio ſit minima, ob eam momentum effectus adhuc notabiliter diminui poſſet, ſi ſcilicet λ denotaret fractionem valde paruam.

16. *Denique plurimum ad machinarum perfectionem confert motus vniformitas, ad quam ideo imprimis machinas inſtrui oportet; ſi enim motus non fuerit vniformis, ſed per interualla modo intendatur, modo remittatur; tum effectus ſemper erit minor eo, qui ſecundum regulas praecedentes obtineri poſſet.*

In motus difformitate enim non ſolum portio vis impellentis in ſuperanda inertia conſumitur, ſed etiam nonniſi maxima celeritas aequalis eſt ei, quam machina eſſet habitura, ſi motus foret vniformis. Namque dum motus acceleratur, vis impellens maior

eſt vi ad aequilibrium requiſita, eiusque idcirco celeritas minor, quam ea, quae motui vniformi conueniret; etſi autem interdum machinae motus celerior ineſſe queat, quia tamen hoc euenit, quando machina non in totum onus agit, inde nihil omnino in augmentum effectus redundat: vtroque ergo caſu ſemper non parum de vi impellente perit, quando motus non erit vniformis. Quare in hoc potiſſimum eſt incumbendum, vt machinae, quantum fieri poteſt, motus vniformis concilietur. Hunc in finem igitur, primo rotae, quae ſe mutuo mouent, ita ſunt fabricandae, vt dum vna vniformiter mouetur, etiam reliquarum motus prodeat vniformis, id quod dentibus rotarum debita figura inducenda efficietur, quod argumentum antehac pertractaui. Deinde defectus vniformitatis imprimis eſt pertimeſcendus, quando machina piſtillis alternatim attollendis ac demittendis, vel deprimendis, deſtinatur, propterea quod corpori, quod eſt in quiete, non ſubito motus imprimi poteſt. His ergo caſibus machina ad piſtilla ita eſt applicanda, vt motus machinae non ſequatur motum piſtillorum, ſeu vt ille vniformis manere poſſit, etiamſi hic a ſtatu quietis acceleretur iterumque retardetur, qui effectus commodiſſime per brachia incuruata impetrari ſolet; dum enim huiusmodi brachium piſtillum eleuandum primum arripit, motum ſuum continuare poteſt, etiamſi piſtillum parum attollatur; id quod etiam vſu venit, quando piſtillum ad maximam altitudinem fuerit eleuatum. Quoniam autem hoc pacto piſtilla motui machinae non ſemper pari

vi

vi reluctantur, ea, ſi plura fuerint, ita diſponi oportet, vt machina quouis momento in piſtilla plura, quorum alia ſint in loco imo, alia in ſummo, aliaque in medio ſtatu verſentur, agat, ſic enim reluctantia aequabilis reddetur. Idem obſeruandum eſt in omnibus machinis, quibus motus reciproci produci ſolent; ac perpetuo, quando his tribus regulis erit ſatisfactum, certi eſſe poſſumus, machinas ad ſummum perfectionis gradum, cuius ſunt capaces, eſſe euectas.

DE MOTV ET ATTRITV LENTIVM DVM SVPER CATINIS POLIVNTVR.

Auctore

L. EVLERO.

1.

Inter plures modos, quibus lentes ſuper catinis, ſiue immotis, ſiue in gyrum actis, atteri ac poliri ſolent, hic eum tantum ad examen reuocare conſtitui, quo catino vniformiter in gyrum acto, lens ope ſtyli eius centro applicati ad catinum apprimitur, quo fit, vt ipſa lens circa ſtylum libere mobilis a catini motu in gyrum agatur, et quatenus eius motus a motu catini diſcrepat, eidem atteratur, ſicque politura perficiatur. Quoniam hac ratione arbitrio artificis nihil aliud praeter locum, vbi lentem ſuper catino detineat, relinquitur. Hic modus lentes poliendi prae reliquis geometricae inueſtigationis capax videtur, dum contra, vbi totus lentis motus ab arbitrio artificis pendet, vix quidquam definire licet.

Tab IV. Fig. 1. 2. Sit igitur PQRS catinus ope machinae rotatoriae certa quadam velocitate vniformiter in gyrum agendus, circa eius axem O, quem verticalem aſſumo, vt motus catini in plano horizontali abſoluatur. Lens autem AEBF ope ſtyli eius centro C applicati ita con-

continuo ad catinum apprimatur, vt punctum C immotum ſeruetur, lens autem circum id libere reuolui queat. Catino iam in gyrum acto, ipſa lens circa ſtylum in motum abripietur, moxque vniformiter circumagetur, cuius motus celeritatem ante definiri oportet, quam effectus attritus, ſeu celeritas, qua ſingula lentis puncta ſuper catino teruntur, aſſignari queat.

3. Denotet u celeritatem gyratoriam catini, ita ad diſtantiam quandam fixam a centro O, vnitate indicandam relatam, vt in diſtantia a centro quacunque z ſit celeritas vera $=uz$, cuius quadratum $uuzz$, vt menſuras certas obtineamus, exprimat altitudinem huic celeritati debitam: hac ergo littera u motus catini prorſus determinatur, quippe qua conſtat, punctum quodcunque catini Z, cuius diſtantia ab axe O fuerit OZ $=z$, ita moueri, vt eius directio ſit recta Zm ad OZ normalis, celeritas vero $=uz$, quae tanta eſt intelligenda, quanta ex lapſu grauis per altitudinem $uuzz$ acquiri ſolet; quandoquidem catinus in plagam PQRS circumagitur; ſi enim in plagam contrariam circumageretur pari celeritate, celeritas quidem puncti Z foret eadem, ſed directio Zm contraria eſſet ſtatuenda.

4. Quod porro ad lentem attinet, primo eius diameter AB in computum eſt ducendus, cuius ſemiſſis ſit CA$=$CB$=a$. Deinde plurimum refert, in quanta diſtantia eius centrum C a centro catini O ope ſtyli fixum detineatur, quae diſtantia ſit OC$=c$. Tum vero ſi de effectu attritus iudicare velimus, vis qua

ea

ea ad catinum apprimitur, rationem haberi conuenit; quae vis aequetur ponderi $=$ P. Cum autem tanta vi tota facies lentis inferior catino apprimatur, vis qua quaelibet eius portio atque adeo elementum apprimitur, ex eius ratione ad totam faciem erit colligenda; ſiquidem aſſumimus, lenti iam catini figuram eſſe inductam, totumque negotium ſola politura eſſe abſoluendum.

5. His quae circa lentem ſunt nota conſtitutis, inueſtigandus eſt eius motus, qui ob centrum C fixum alius eſſe nequit, niſi gyratorius circa idem centrum, et qui inter quaerenda primum locum obtinet. Statim quidem patet, lentem ob motum catini, quem in plagam PQRS fieri pono, in ſimilem plagam AEBF abreptum iri; ſed celeritas huius motus etiam nunc eſt incognita. Sit ergo ſimili modo huius motus celeritas gyratoria $= v$, ita ad diſtantiam fixam $= 1$ relata, vt puncti lentis cuiuscunque Z, cuius diſtantia ab eius centro C fuerit $CZ = x$, celeritas vera futura ſit $= vx$, directione exiſtente Zn ad CZ normali. Tum vero vt punctum C immotum teneatur, quoniam motus catini totam lentem auehere conatur, ſtylo praeterea vim contranitentem applicatam eſſe oportet, cuius quantitas pariter erit inueſtiganda.

6. Quo nunc felicius haec, quae ſunt incognita, definire liceat, ante omnia motum reſpectiuum cuiusque lentis puncti ratione catini explorari conuenit, in quo motu verus attritus conſiſtit. Ac primo quidem at-

attritus centri lentis C ſuper catino per ſe eſt manifeſtus; cum enim ob diſtantiam $OC = c$, punctum catini C celeritate $= cu$ in directione Cc ad OC normali feratur, lentis autem punctum C quieſcat, haec ipſa cu erit celeritas attritus; quae ergo eo maior eſt, quo longius centrum lentis Ca centro catini O detineatur. Euidens autem eſt, effectum polituræ ab hac attritus celeritate ita pendere, vt partim illi ipſi, partim preſſioni futurus ſit proportionalis.

7. Celeritas attritus autem omnium reliquorum lentis punctorum ſuper catino, non ſolum ab huius, ſed etiam a lentis motu pendet, ad quam inueſtigationem figuram ſecundam maiori ſpecie expreſſam accommodemus. Sit ergo pro puncto lentis quocunque Z diſtantia $CZ = x$ et angulus $ACZ = \Phi$, ad CZ normaliter iungatur $Zn = vx$ motum verum puncti lentis Z exhibens. Catini autem punctum ſubiectum Z, poſita diſtantia $OZ = z$, feretur in directione Zm ad OZ normali celeritate $= uz$. Sumta ergo $Zm = uz$, ſi catino et lenti ſimul motum imprimi concipiamus ſecundum directionem $Z\nu$, ipſi Zn oppoſitam, et celeritate $Z\nu = vx$; tum vero completo parallelogrammo $mZ\nu z$ ducamus diagonalem Zz, res eodem redibit, ac ſi puncto lentis Z quieſcente catinus ſub eo promoueatur in directione Zz celeritate $= Zz$, quae ergo erit celeritas attritus puncti Z. Tab. IV. Fig. 2.

8. Cum autem ſit $OC = c$; $CZ = x$, et angulus $ACZ = \Phi$, erit $OZ = z = \sqrt{(cc + xx + 2cx \operatorname{coſ.} \Phi)}$. Deinde poſito angulo $COZ = \omega$, erit $\operatorname{tang.} \omega = \frac{x \operatorname{ſin.} \Phi}{c + x \operatorname{coſ.} \Phi}$

 et

et $\text{ſin.}\,\omega = \frac{x\,\text{ſin.}\,\Phi}{z}$: porro ang. $CZO = \Phi - \omega$, et $\text{tang.}(\Phi - \omega) = \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{x + c\,\text{coſ.}\,\Phi}$, atque $(\Phi - \omega) = \frac{c\,\text{ſin.}\,\Phi}{z}$. In triangulo autem $Z\nu z$ eſt $Z\nu = vx$; $z\nu = Zm = uz$ et angulus $Z\nu z = CZO = \Phi - \omega$; vnde colligitur $Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxz\,\text{coſ.}(\Phi - \omega))}$.

Inde vero colligitur $z\,\text{coſ.}(\Phi - \omega) = x + c\,\text{coſ.}\,\Phi$, quo valore ſubſtituto fit

$$Zz = \sqrt{(vvxx + uuzz - 2uvxx - 2cuvx\,\text{coſ.}\,\Phi)} \text{ ſeu}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u - v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u - v)^2 xx)}.$$

9. Pro ſitu deinde huius lineae Zz, quae celeritatem attritus puncti lentis Z exprimit, erit primo $CZ\nu$ angulus rectus, tum vero $\text{coſ.}\,\nu Zz$

$$= \frac{Zz^2 + Z\nu^2 - z\nu^2}{2Zz \cdot Z\nu} = \frac{-(u - v)x - cu\,\text{coſ.}\,\Phi}{Zz} = \text{ſin.}(CZ\nu + \nu Zz)$$

Tab IV. Fig. 1. at $\text{ſin}\,\nu Zz = \frac{zv\,\text{ſin.}\,Z\nu z}{Zz} = \frac{uz\,\text{ſin.}(\Phi - \omega)}{Zz} = \frac{cu\,\text{ſin.}\,\Phi}{Zz} = -\text{coſ.}(CZ\nu + \nu Zz)$. Si ergo in fig. 1. lineam Zz ſuperne cum CZ angulum conſtituere aſſumamus, erit

$$\text{ſin.}\,CZz = \frac{(v - v)x + cu\,\text{coſ.}\,\Phi}{Zz} \text{ et}$$
$$\text{coſ.}\,CZz = \frac{-cu\,\text{ſin.}\,\Phi}{Zz} \text{ exiſtente}$$
$$Zz = \sqrt{(ccuu + 2cu(u - v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u - v)^2 xx)};$$

vnde patet, ſi fuerit $ACZ = \Phi = 0$, fore $Zz = cu + (u - v)x$; et angulum CZz rectum, ac ſi praeterea ſit $x = 0$, erit vt ante celeritas attritus centri lentis $C = cu$.

10. Iam quaeſtio huc redit, quamnam habitura ſit rationem celeritas gyratoria lentis v ad celeritatem gyratoriam catini u? ad quam reſoluendam duae patent viae, altera indirecta ex principio minimae actionis

nis petita, altera directa ex principiis motus negotium conficiens. Secundum priorem nullum eſt dubium, quin motus lentis ita comparatus ſit futurus, vt attritus totus fiat minimus. Quare ſi in Z elementum ſuperficiei lentis concipiatur, erit id ob variabilitatem tam diſtantiae $CZ = x$, quam anguli $ACZ = \Phi$, ita expreſſum $= x\,dx\,d\Phi$, quod per celeritatem attritus Zz multiplicatum, dabit eius attritus quantitatem

$$x\,dx\,d\Phi\,\sqrt{(ccuu + 2cu(u-v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u-v)^2xx)}$$

cuius integrale per totam lentem extenſum minimum eſſe debet.

11. Producta recta ZC vltra C, concipiatur par elementum ſuperficiei $x\,dx\,d\Phi$ ad alteram partem rectae AB, et quia hic fit vel x vel coſ. Φ negativum, eius quantitas attritus erit

$$x\,dx\,d\Phi\,\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\,\text{coſ.}\,\Phi + (u-v)^2xx)}$$

Collectis his ambobus elementis, euidens eſt, eorum ſummam fieri minimam, ſi ſumatur $v = u$, id quod vtraque formula irrationali in ſeriem conuertenda facillime patet, dum additione poteſtates impares ipſius x, ac proinde etiam ipſius $u-v$, ſe deſtruant, vnde minimum ratione celeritatis v inueſtigando manifeſto elicitur $v = u$, quod cum de omnibus elementorum ſibi hoc modo oppoſitorum paribus valeat, ſequitur etiam, totius lentis attritum minimum eſſe futurum, ſi fuerit $v = u$, ideoque lens aeque celeriter in gyrum agatur atque catinus, ita vt ambo aequalibus temporibus ſuas reuolutiones abſoluant.

12. Verum etiam via directa ad eandem concluſionem manuducet. Cum enim experimentis conſtet, frictionem a ſola preſſione pendere, neque celeritatem attritus quicquam, ſiue ad augendam, ſiue diminuendam frictionem, conferre, elementum ſuperficiei $xdxd\Phi$ in Z vi quadam ipſi proportionali, ob preſſionem vbique aequalem, in directione Zz ſollicitabitur; quae vis ergo ſit $=\alpha xdxd\Phi$; et quia centrum lentis C immotum tenetur, erit huius reſpectu momentum illius vis $=\alpha xdxd\Phi.\, CZ\,\text{ſin}.\, CZz$

$$=\frac{\alpha x dx d\Phi.\, x((u-v)x + cu\,\text{coſ}\,\Phi)}{\sqrt{(ccuu + 2cu((u-v)x\,\text{coſ}\,\Phi + (u-v)^2 xx)}}.$$

Ex elemento autem oppoſito, vti ſupra, ſumto, orietur momentum

$$\frac{\alpha x dx \Phi.\, x((u-v)x - cu\,\text{coſ}.\Phi)}{\sqrt{(ccuu - 2cu(u-v)x\,\text{coſ}.\Phi + (u-v)^2 xx)}}.$$

13. Nunc autem, quia motus lentis iam ad vniformitatem compoſitus ſtatuitur, neceſſe eſt, vt horum momentorum ſumma vniuerſa ad nihilum redigatur, quod cum fiat in binis elementis oppoſitis, ſi capiatur $v=u$, idem pro tota lente valebit. Idem etiam per integrationem ſolito more elucet, poſito enim $v=u$, ex elemento Z oritur momentum $=\alpha xxdxd\Phi\,\text{coſ}.\Phi$, vnde pro ſectore elementari CZ colligitur momentum $=\frac{1}{3}\alpha x^3 d\Phi\,\text{coſ}.\Phi$, et pro toto ad marginem vsque extenſo $=\frac{1}{3}\alpha a^3 d\Phi\,\text{coſ}.\Phi$, cuius denuo integrale eſt $=\frac{1}{3}\alpha a^3\,\text{ſin}\,\Phi$, quod per totam lentem extenſum, donec fiat $\Phi=360°$, manifeſto in nihilum abit, quod non fieret, ſi non eſſet $v=u$. Viciſſim ergo altera methodus per alteram confirmatur, et cum principium minimi per ſe ſit euidens, patet

ſimul

ſimul alterum, quo frictio a ſola preſſione pendere aſſumitur, veritati omnino eſſe conſentaneum.

14. Definita iam celeritate $v=u$, non difficile erit determinare vim, cui ſtylus centro lentis C applicatus, praeter preſſionem P, reniti debet, ne centrum lentis C a motu catini abripiatur. Cum enim ſit $v=u$, erit $Zz=cu$, ſin $CZz=$ coſ. Φ et coſ. $CZz=-$ ſin. Φ, ita vt ſit $CZz=90°+\Phi$, et $zZn=\Phi=ACZ$. Ob frictionem autem vrgetur elementum ſuperficiei lentis $xdxd\Phi$ ſecundum directionem Zz vi conſtante; et quia tota ſuperficies, quae eſt $=\pi aa$, denotante π peripheriam circuli, cuius diameter eſt $=1$, apprimitur vi P, elementum illud apprimetur vi $=\frac{Pxdxd\Phi}{\pi aa}$ cuius parti quaſi tertiae frictio aequatur. Scribamus autem generalius λ pro parte tertia, ita vt elementum in Z ſecundum Zz ſollicitetur vi $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi}{\pi aa}$, quae ſecundum directionem CZ praebet vim $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi}{\pi aa}$ et ſecundum directionem ad illam normalem vim $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi \,\text{coſ.}\, \Phi}{\pi aa}$.

15. At per ea, quae ſupra oſtendimus, omnes iſtae vires normales ſe deſtruunt, vnde ſtylus ſuſtinere debet alteras illas vires ſecundum CZ agentes, quae ſunt $=\frac{\lambda Pxdxd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi}{\pi aa}$, et quaſi ipſi centro lentis C ſecundum directionem CZ applicatae eſſent, concipi poſſunt. Quaelibet vero huiusmodi vis reſoluatur ſecundum directiones fixas CA et Cc, eritque vis ſecundum $CA=\frac{\lambda Pxdxd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi}{\pi aa}$, et vis ſecundum $Cc=\frac{\lambda Pxdxd\Phi \,\text{ſin.}\, \Phi^2}{\pi aa}$. Illa primum integrata, poſito

 $x=a$

$x = a$, dat $\frac{\lambda}{2\pi}P\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{\lambda}{4\pi}P\,d\Phi\,\text{ſin.}\,2\,\Phi$, cuius porro integrale eſt $= \frac{\lambda}{8\pi}P(1-\text{coſ.}\,2\,\Phi)$. Poſito nunc pro tota lente $\Phi = 360°$, haec vis ſecundum CA euaneſcit. Altera vis ſecundum Cc ſemel integrata dat $\frac{\lambda}{2\pi}P\,d\Phi\,\text{ſin.}\,\Phi^2 = \frac{\lambda}{4\pi}P\,d\Phi(1-\text{coſ.}\,2\,\Phi)$, cuius ſequens integrale eſt $= \frac{\lambda}{4\pi}P(\Phi - \frac{1}{2}\text{ſin.}\,2\,\Phi)$, et poſito $\Phi = 360° = 2\pi$ prodit vis ſecundum $Cc = \frac{1}{2}\lambda P$.

16. Ob motum ergo catini ſtylus ſuſtinet vim $= \frac{1}{2}\lambda P$ ſecundum directionem Cc, quam artifex continuo vi contraria et aequali renitendo deſtruere debet, ſiquidem centrum lentis immotum tenere velit. Quare ſi $\lambda = \frac{1}{3}$, haec vis aequatur ſextae parti preſſionis totius P, qua lens catino apprimitur, cui concluſioni per ſe verae vnicus caſus aduerſatur, quo centrum lentis C ipſi centro catini O apprimitur; tum enim, quia lens pari motu cum catino circumagitur, nulluſque attritus exercetur, ſtylus etiam nullam vim ſuſtinet. At huiusmodi exceptio ſemper, quando de frictione agitur, admitti debet; cum enim in motu tardiſſimo frictio aeque ſit magna atque in celerrimo, motu tamen plane euaneſcente frictio quaſi ſubito euaneſcit. Neque ergo hoc incommodum tanquam vitium calculo eſt imputandum.

17. Cum duplici demonſtratione euictum ſit, eſſe $v = u$, idem etiam experientia egregie confirmari deprehendi; in quacunque enim catini loco lens detinebatur, eius reuolutiones ſemper exactiſſime cum reuolutionibus catini conueniebant, neque vix vllam inaequali-

qualitatem, ne in motus quidem initio, obſeruare licuit. Vnde patet ſtatim ab initio motus reuolutiones lentis ſe ad eam aequalitatem componere; quam calculus oſtendit; quin etiam motu catini modo intenſo, modo remiſſo, lens eandem inaequalitatem ſequi obſeruata eſt. Hic ergo inſigne cernitur ſpecimen foecundiſſimi illius principii minimae actionis, quod eo magis omni attentione dignum videtur, quod etiam in motu per frictionem impedito tam felici cum ſucceſſu adhiberi potuerit, cum hactenus eius vſus tantum in motibus liberis a viribus veri nominis, quibus frictionem vix annumerare licet, perturbatis, ſit oſtenſus.

18. Quoniam igitur ex eo, quod inuenimus $v = u$, ſequitur eſſe celeritatem $Zz = cu$, patet in eodem lentis ſitu omnia eius puncta aequali celeritate atteri, ideoque pari vi laeuigari ac poliri, quo ipſo hic mechaniſmus non mediocriter reliquis antecellit, cum alias alia lentis puncta fortius, alia debilius, atteri ſoleant. Praeterea vero hic perſpicitur, celeritatem attritus rationem ſequi interualli $OC = c$, ita vt ſi centrum lentis C centro catini O applicetur, nullus plane attritus ſit futurus; quo longius autem interuallum OC capiatur, eo maiorem fore attritum, idque in eadem ratione. Quam ob rem omnino neceſſe eſt, vt catini magnitudo multum ſuperet magnitudinem lentis, quae regula etiam ab artificibus probe obſeruari ſolet.

19. Hic igitur ingens conſpicitur diſcrimen inter frictionem et attritum, quae duae res vulgo confundi ſolent.

ſolent. Frictio enim, ſiue motus ſit tardior, ſiue velocior, perpetuo manet eadem. cum attritus eiusque effectus, qui in abraſione eſt conſtituendus, maxime a velocitate pendent, ex quo attritus quantitatem commodiſſime metiemur eius celeritate Zz in preſſionem ducta. Quare ſi in ſuperficie lentis conſideremus elementum dZ, quod quia catino apprimitur vi $= \frac{PdZ}{\pi aa}$, teriturque celeritate $= cu$, erit quantitas attritus $= \frac{PcudZ}{\pi aa}$. Hinc ergo lens eo promtius laeuigabitur et polietur, quo maior fuerit quantitas $\frac{Pcu}{\pi aa}$; quae proportionalis eſt 1°, vi P, qua lens catino apprimitur, 2°, celeritati u, qua catinus in gyrum agitur, 3°, interuallo $OC = c$ quo centrum lentis diſtat a centro catini, et 4°, denique reciproce ſuperficiei lentis, ita vt quo lens fuerit maior, eo tardius laeuigatio perficiatur.

20. Hic autem non tantum ad lentis attritum eſt reſpiciendum, ſed qnia catinus etiam atteritur, eiusque ſuperficies abraditur, niſi vbique aequaliter radatur, mox eius figura alteratur; vnde fit, vt deinceps etiam lenti figura a propoſita aberrans inducatur. Quam ob rem neceſſe eſt, vt etiam attritus ipſius catini accuratius inueſtigetur. Primo autem patet omnia catini puncta ab eius centro aeque remota quauis reuolutione aequaliter atteri. Conſideremus ergo catini punctum quodcunque L a centro catini O diſtans interuallo $OL = y$, quod vna reuolutione tamdiu tantum atteritur, quamdiu per angulum MON profertur. Cum igitur attritus momentaneus ſit $= \frac{Pcu}{\pi aa}$, vna reuolutione integra totus attritus cenſendus erit $= \frac{Pcu}{\pi aa} \cdot \frac{ang. MON}{360°}$, ſiquidem puncti

Tab. IV. Fig. 3.

puncti lentis L quantitas attritus vna reuolutione exprimatur per $\frac{Pcu}{\pi aa}$.

21. Cum nunc ſit $CM = CA = a$; $OC = c$; $OM = OL = y$, erit coſ. $LOM = \frac{cc + yy - aa}{2cy}$, vnde, ob $\pi = 180^\circ$, erit attritus puncti catini L durante vna reuolutione $= \frac{Pcu}{\pi\pi aa}$. A coſ. $\frac{cc - aa + yy}{2cy}$, quae expreſſio tantum pro iis catini punctis valet, quorum diſtantia a centro O intra limites $AO = c + a$ et $BO = c - a$ continetur, quoniam tam in vtroque limite, quam extra eos, attritus euaneſcit. Hic autem notandum eſt, ſi fuerit $c < a$, et $y = a - c$, fore A coſ. $\frac{cc - aa + yy}{2cy} = 180^\circ = \pi$, ſeu haec catini puncta perpetuo atteri, quod multo magis valebit, ſi fuerit $y < a - c$, hoc ſcilicet caſu ſpatium circulare circa centrum catini O, cuius radius eſt $= a - c$, perpetuo attritum patietur, et quidem aequalem ei, cui lens eſt ſubiecta. Cuiusmodi attritu ſi totus catinus afficeretur, non eſſet metuendum, vt eius figura deformaretur.

22. Cum autem ſolum ſpatium annulare catini lenti ſe applicans atteratur, quamdiu quidem lens in eodem loco detinetur, eius tantum figura alterationem patitur, eamque non aequabilem, vnde ſphaericitas eius tandem vehementer mutabitur, lentique proinde figura a ſcopo non mediocriter aberrans imprimetur. Huic incommodo artifices remedium afferre conantur, dum lentem modo propius admouent ad centrum catini, modo ab eo longius remouent, quo pacto quidem cati-

num circa centrum atterunt, ſed circa marginem attritus multo minor manet, ita vt ne hoc quidem modo catinus per totam ſuperficiem aequaliter radatur. Deinde vero etſi hoc modo attritus non tam inaequabilis fit, quam ſi lens iugiter in eodem loco detineretur, tamen is non certa quadam lege diſtribuitur, vnde fit, vt figura catini a ſphaerica mox notabiliter recedat, ſolique fortunae ſit tribuendum, ſi quandoque bonae indolis lentes hoc modo elaborentur.

23. Ad catini autem attritum aequabilem reddendum optimum remedium videtur, ſi fruſtum quoddam vitri praeter lentem ſuper catino atteratur, cuius figura et preſſio ita ſit comparata, vt ſingula catini puncta, tam a lente, quam ab iſto fruſto, aequabilem attritum patiantur. Quo huius fruſti figura ſimplicior prodeat, ponamus interuallum BO euaneſcere, ſeu eſſe $OC = c = CB = a$, catinique radium OA diametro lentis $2a$ eſſe aequalem, quandoquidem, cum lens perpetuo in eodem loco detineatur, ſuperfluum foret, catinum ampliorem efficere. Sit igitur $EObi$ figura illius fruſti vitrei quaeſita, quod continuo catino in eodem loco applicatum detineatur, eique pondere $= Q$ apprimatur, cuius area ſit $= ee$. Quoniam nihil refert, quo in loco hoc fruſtum applicemus, concipiamus id in ſitu DOHVT.

Tab. V. Fig. 1.

24. Cum igitur catini puncta L a centro O interuallo $OL = y$ diſtantia ob $c = a$ a lente attritum pati-

patiantur, cuius quantitas vna reuolutione eſt $=\frac{Pu}{\pi\pi a}$ A coſ. $\frac{y}{2a}$ $=\frac{P.u}{\pi\pi ay}.LM$. Tum vero eadem puncta L ſub fruſto vitri per arcum VR deferuntur celeritate uy, et quia preſſio in ſingulis punctis eſt vt $\frac{Q}{ee}$, erit quantitas attritus in vna reuolutione $=\frac{Quy}{ee}.\frac{KV}{2\pi y}=\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$, vbi $2\pi y$ peripheriam totius circuli denotat. Neceſſe ergo eſt, vt ſumma harum expreſſionum $\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV$ ſit quantitas conſtans, quae ſtatuatur $=\frac{Pu}{\pi\pi a}.\frac{\pi}{2}$. At poſita recta OD ad AO perpendiculari, ob arcum LMK $=\frac{\pi}{2}y$, erit haec conſtans $=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$, ita vt habeatur haec aequatio:

$$\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LM+\frac{Qu}{2\pi ee}.KV=\frac{Pu}{\pi\pi ay}.LMK$$

quae reducitur ad hanc: $\frac{Q}{2ee}.KV=\frac{P}{\pi ay}.MK$.

25. Erit ergo arcus $KV=\frac{2Pee}{Q\pi ay}.MK$, exiſtente $OK=y$; vnde porro area ſpatii DOHVI $=ee$ definiri poteſt. Cum enim ſit $MK=y\,A\,\text{ſin}.\frac{y}{2a}$, habebitur $KV=\frac{2Pee}{Q\pi a}A\,\text{ſin}.\frac{y}{2a}$, hincque areae elementum $KV.dy=\frac{2Pee}{Q\pi a}dy.A\,\text{ſin}.\frac{y}{2a}$, cuius integrale eſt

$$\frac{2Pee}{Q\pi a}(y\,A\,\text{ſin}.\frac{y}{2a}+\sqrt{(4aa-yy)}-2a)$$

quod per totum fruſtum extenſum ponendo $y=2a$ praebet aream totam

$$ee=\frac{2Pee}{Q\pi a}(2a.\frac{\pi}{2}-2a)=\frac{2Pee}{Q\pi}(\pi-2)$$

vnde quidem non area ee, ſed pondus apprimens Q, ita definitur, vt ſit $Q=\frac{2P(\pi-2)}{\pi}$; vnde ſiue ponatur $\pi=\frac{22}{7}$

 ſiue

ſiue $\pi = \frac{355}{113}$, dat $Q = \frac{8}{11}P$, ſeu $Q = \frac{258}{355}P$, vnde conſtat, quanto pondere fruſtum vitri catino apprimi debeat.

26. Ad figuram autem fruſti vitrei inueniendam quia inuenimus $\frac{2Pee}{Q\pi} = \frac{ee}{\pi - 2}$, habebimus hanc aequationem $KV = \frac{ee}{(\pi - 2)ay} . MK$, vbi ee pro lubitu aſſumere licet. Statuamus ergo $ee = (\pi - 2)aa$, vt area fruſti ſit ad aream lentis, vt $\pi - 2$ ad π, ſeu 4 ad 11, fiatque $KV = \frac{a}{y} . MK$. Ad quam aequationem conſtruendam ducto per centrum lentis C quadrante CHX, quem recta OM ſecet in T, erit $TX = \frac{a}{y} . MK$, ideoque $KV = XT$. Vbique ergo ſumatur arcus KV aequalis arcui XT, et ſpatium curua OHVI et radio OD incluſum dabit figuram fruſti DOHVI, ſeu in ſitu lentem non impediente EO*bvi*, quod pondere $Q = \frac{8}{11}P$ catino appreſſum deſideratum praeſtabit effectum, vt figura catini non deformetur.

27. Etſi conſtructio lineae O*bvi* eſt facilis, dum vbique arcus kv arcui xt aequalis eſt capiendus, conſtituto ſemicirculo O*m*D ſemiſſi lentis aequali, tamen conueniet, aequationem huius curuae ad coordinatas orthogonales ſaltem proxime reduci. Sit igitur $Op = p$ et $pv = q$, exiſtente $Ok = y = \sqrt{(pp + qq)}$ et $Ox = a$, et vocetur angulus $kOm = A\,\text{ſin}.\frac{y}{2a} = \Phi$, vt ſit $y = 2a\,\text{ſin}.\Phi$, vnde ob $kv = xt = a\Phi$, hincque angulum $kOv = \frac{a\Phi}{y} = \frac{\Phi}{2\,\text{ſin}.\Phi}$ reperietur:

$$p = 2a\,\text{ſin}.\Phi\,\text{coſ}\frac{\Phi}{2\,\text{ſin}.\Phi} \text{ et } q = 2a\,\text{ſin}.\Phi\,\text{ſin}.\frac{\Phi}{2\,\text{ſin}.\Phi},$$

vnde

vnde approximando colligitur

$$q = 0,5463p + 0,03513 \cdot \frac{p^3}{aa}.$$

Initio ſcilicet circa O haec curua abit in rectam ad OE angulo 28°, 39′, cuius arcus ſemiſſi radii aequatur inclinato; pro puncto extremo autem *i* fiunt coordinatae $p = q = a\sqrt{2}$.

28. Facillime autem huius fruſti figura in praxi hoc modo delineabitur: Radio OE diametro lentis aequali deſcribatur circulus, in quo primo capiatur arcus E*i* = 45°, tum vero arcus E*n* ſemiſſi rectae OE aequalis, qui continebit quaſi 28°, 39′: Deinde centro O radio dimidio O*c* deſcribatur arcus *cg* continens 30°, ac ducta recta O*n* linea quaeſita circa O cum hac recta confundetur, tum vero ab ea paulatim recedens per punctum *g* tranſibit, indeque proferetur ita in punctum *i*, vt hic circulum E*i* tangat. Fruſtum ergo vitri terminandum eſt primo recta OE, tum arcu E*i*, ac denique linea curua O*gi* oſtenſo modo praeſcripta: hocque vitrum catino appreſſum pondere $Q = \frac{4}{11}P$, dum P eſt pondus, quo lens ei apprimitur, impediet catini deprauationem. Tab. V. Fig. 2.

29. Hic modus figuram catini intemeratam conſeruandi in vſum vocari nequit, niſi lens ita detineatur, vt eius ora ad centrum catini vsque pertingat. Si enim a lente centrum catini plane nonattereretur, quoniam etiam a fruſto vitri, quod catino immotum

incumbere aſſumo, nullum attritum pateretur, nihil inde abraderetur, neque ergo depravatio eius caveri poſſet. Quae eſt cauſa, cur hic lentem vsque ad catini centrum O porrigi aſſumſerim. Caeterum cum tam lentis centrum C ope ſtyli, quam totum vitri fruſtum perpetuo in eodem loco teneri debeat, artifex ſtrenuus ope ſimplicis mechaniſmi haud difficulter hoc exequetur, ſimulque efficiet, vt cum lens dato pondere P catino apprimatur, fruſtum vitri debito pondere Q, quod ad illud ſit vt 8 ad 11, ſit oneratum. Hocque pacto lentibus praeſcripta figura induci poterit, dum inter operandum figura catini non depravatur.

DE

DE NOVA QVADAM VECTIS PROPRIETATE DISSERTATIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

In euoluenda magnetis theoria occupatus, fortuito in notabilem quandam vectis proprietatem incidi, quam, vtpote non inelegantem, et a nemine, quantum ſcio, animaduerſam, obliuioni eripiendam eſſe iudicaui, vnde non incongruum puto, ſi ipſius in Commentariis Academiae mentio iniiciatur.

Nouam iſtam proprietatem ſequens comprehendit theorema: *Vectis BAC, aequalium brachiorum, extremis punctis B et C applicatae cogitentur vires datae magnitudinis, trahentes ſecundum directiones, rectis poſitione datis LM et ON, parallelas, ſecundum lineas nempe BD et CF. Exhibeatur altera harum virium per rectam BD, altera per EF, et prior reſoluta cogitetur in vim vecti parallelam CB, atque normalem ED, poſteriorque ſimili modo in vires CG et GF. Dico fore vectem ABC in aequilibrio conſtitutum, quando eum adquiſiuit ſitum, vt ſumma virium EB et CG ſit maximum.* Tab. V. Fig. 3.

Pro demonſtranda propoſitionis iſtius veritate, cogitetur poſitione data recta tertia RS, ſitque angulus

gulus $LPI = \alpha$, $OQH = \beta$, $BKH = \Phi$, recta $BD = A$, CF vero $= B$. Quaeramus iam ſitum vectis, ſiue angulum Φ, qui ſummam rectarum BE atque CG reddit maximam. Quoniam hic angulus LPI ſiue $BHI = \alpha$, BKH vero $= \Phi$, erit $EBD = \alpha + \Phi$, vnde obtinemus in triangulo rectangulo EBD, $EB = A$ coſ $(\alpha + \Phi)$. Similiter eſt angulus $FCG = \beta - \Phi$, atque $CG = B$ coſ. $(\beta - \Phi)$. Fit itaque $EB + CG = A$ coſ. $(\alpha + \Phi) + B$ coſ. $(\beta - \Phi) = (A$ coſ. $\alpha + B$ coſ. $\beta)$ coſ $\Phi - (A$ ſin. $\alpha - B$ ſin. $\beta)$ ſin. Φ, quae quantitas ſi debeat eſſe maximum, erit, poſtquam capta ſunt differentialia $-(A$ coſ. $\alpha + B$ coſ. $\beta)$ ſin. $\Phi\, d\Phi - (A$ ſin. $\alpha - B$ ſin $\beta)$ coſ. $\Phi\, d\Phi = 0$, vnde deducitur tang. $\Phi = \frac{B\, ſin.\, \beta - A\, ſin.\, \alpha}{B\, coſ.\, \beta + A\, coſ.\, \alpha}$, ex qua aequatione deductus valor ipſius Φ, quaeſito ſatisfacit.

Ex ſtaticis porro notum eſt, eſſe tum vectem BAC in aequilibrio conſtitutum, quando eſt $ED = FG$. Cum ergo ſit, vti ex ſupra traditis facile concluditur, $ED = A$ ſin. $(\alpha + \Phi)$, atque $GF = B$ ſin. $(\beta - \Phi)$, erit pro ſtatu aequilibrii A ſin. $(\alpha + \Phi) = B$ ſin. $(\beta - \Phi)$, ſiue A ſin. α coſ. $\Phi + A$ coſ α ſin. $\Phi = B$ ſin. β coſ. $\Phi - B$, coſ. β ſin. Φ, vnde fit $\frac{B\, ſin\, \beta - A\, ſin.\, \alpha}{B\, coſ.\, \beta + A\, coſ.\, \alpha} =$ tang. Φ, qui valor, cum idem ſit cum antea reperto, veritas aſſerti noſtri abunde patet.

Dubium autem incidere poteſt lectoribus, an recte aſſeruerim, $BE + CG$ eſſe maximum, conditio enim, quod quantitatis iſtius differentiale euaneſcat, pro hacce re probanda non ſufficit, cum $BE + CG$ quoque eſſe poſſit minimum, immo contingere queat,

vt

vt neque maximum ſit, neque minimum. Aſt dubium facile tolli poteſt. Ponatur breuioris expreſſionis cauſa, $B \sin \beta - A \sin. \alpha = N$, $B \cos. \beta + A \cos. \alpha = M$, atque $BE + CG = z$. Quoniam iam pro caſu $dz = 0$, $\frac{N}{M} = \tang \Phi$, erit $\sin. \Phi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$ atque $\cos. \Phi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, quos valores ſubſtituendo in formula ſupra reperta, erit pro caſu $dz = 0$, $z = \sqrt{M^2 + N^2}$. Sit porro Φ iſtud, quod reſpondet $dz = 0$, $= \psi$, atque ſit Φ reſpondens alii valori ipſius $z = \psi + \gamma$, eritque tum $z = M \cos. (\psi + \gamma) + N \sin. (\psi + \gamma) = M \cos. \psi \cos. \gamma - M \sin. \psi \cos. \gamma + N \sin. \psi \cos \gamma + N \cos. \psi \sin. \gamma$, quae formula, ob $\sin. \psi = \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, et $\cos. \psi = \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2}}$, tranſit in $\cos. \gamma \sqrt{M^2 + N^2} = z$. Quodſi ergo z reſpondens dz euaneſcenti, quod ſupra repertum eſt $= \sqrt{M^2 + N^2}$, indicetur per z', erit $z' \cos. \gamma = z$.

Cum itaque $\cos. \gamma$, quicunque valor tribuatur angulo γ, ſit ſemper minor radio, ſiue vnitate, erit generatim $z < z'$, vnde z', omnino, vti aſſerui, eſt maximum.

DESCRIPTIO INSTRVMENTI CVIVSDAM, NAVTIS BAROMETRI AD INSTAR INSERVITVRI.

AVCTORE IO. ERN. ZEIHERO.

Praecipuum Barometri marini requiſitum in eo conſiſtit, vt aer in eiusmodi agat corpus, quod nauis agitatione nullam patiatur mutationem. Quare iam ſuperiori ſaeculo Celeb. Dr. *Robertus Hook*, ſumma eiusmodi inſtrumenti vtilitate conuictus, Barometrum quoddam, quod concuſſionibus nauium non alteretur, excogitauit, coniungendo Thermometrum Florentinum cum Drebeliano, et, inſtituta vtriusque thermometri comparatione, in quorum vnum aeris pondus ſimul agit; alterum autem nullam ab eodem patitur mutationem, ſcalam, diuerſa aeris pondera indicantem, perficiendo, vti ex Tranſactionibus Anglicanis notum eſt. Pari etiam modo Cel. *Amontons* Barometrum vſui huic memorato inſeruiens inuenit, idque in Actis Pariſinis deſcripſit. (*)

Vtrumque fortaſſe inuentum non modo perfectius, ſed ad vſum etiam accommodatius reddi poſſet, ſi quis rem, de qua agitur, denuo ſuſcipere velit.

Hac occaſione, dum omnia quae huc ſpectant momenta, penſitabam, nouum inuentum ſubiit, quod, quum

(*) Vid. Mem. de l'Acad. des Sc. de Paris. ann. 1705. p. 62.

quum fortaſſe ad alia inuenta, multiplici vſu praeclara, aditum pateſacere poſſit, in publicum proferre non dubitaui.

Si concipiamus mercurii loco in tubo Toricelliano elaterem, euidens eſt, eum vsque dum compreſſum iri, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Inde porro ſequitur, elaterem hunc ſub altitudine mercurii in Barometro Toricelliano minore, e. g. 27″, minus comprimi, quam ſi altitudinem 28 vel 29 digitorum attigerit. Hic itaque elater non ſecus ac columna mercurialis, mutato aeris pondere, ſpatium quoddam percurret, et ſi indice inſtrueretur, pari modo, ac mercurius, inde oriundas mutationes indicabit.

Hoc autem ſequenti modo, ego vt arbitror, effici poteſt. Conſtruatur cylindrus metallicus ABCD, quali alias ad euacuandum ſeu comprimendum aerem vtimur, eidemque adaptetur embolus E pertica EF inſtructus, ita, vt minimam, quantum fieri poteſt, patiatur frictionem; ſedulo tamen in conſtructione caveatur, ne aer intra parites cylindri et emboli latera ſeſe inſinuet. Inter hunc E, illiusque operculum AB, adaptetur ſpiralis G, quae altera extremitate embolo E, altera operculo AB ſit affixa. H eſt alter embolus, quo aer in cylindro inter vtrumque embolum contentus euacuatur. IK eſt capus, mediante cochlea K embolo H vel iungendus, vel pro lubitu ab eo ſeparandus. Pyxis, ſeu fundus CD, foramine quadrangulari, emboli partem eiusdem formae 1. 1. commode recipiente, eſt inſtructus. 2. 2. eſt alia emboli H pars ro- Tab. VI.

 tunda,

tunda, inque ſe inciſam habens cochleam, huicque reſpondet altera, femina 3. 3. quae embolum per foramen fundi quadrangulare retractum retinet. 4. 4. eſt annulus coriaceus, inter cylindri annulum 5. 5. et pyxidem CD poſitus, qui impedit, ne aer externus emboli latera ſubeat. Embolo H itaque verſus embolum E protruſo ad ſpiralis omnimodam compreſſionem (dematur autem prius hamulus α, vt arcte ad ſe inuicem applicari poſſint emboli) indeque ad fundum vsque retracto, ſpatium inter E et H euacuabitur, et externa embolum premens aeris columna ſpiralem G ad certum gradum extendet, donec aeris preſſioni perfecte reſiſtat. Prouti autem aeris pondus mutatur, ſpiralis etiam plus minusue extendetur, embolusque vna cum ſua pertica FE, a minimo aeris pondere ad maximum vsque, ſpatium certum percurret, et quodlibet perticae EF punctum, ad externam operculi ſuperficiem AB relatum, pondus aeris mutatum indicabit.

Si igitur ad notandas mutationes ponamus, altitudinem mercurii eſſe in Barometro communi 28'', 4''' ped. Rhenan. vis, qua ſpiralis G trahitur, aequalis erit preſſioni columnae mercurii, ſectionem emboli E transuerſam pro baſi, ac 28'', 4''', pro altitudine habentis. Adeoque, vt determinetur, quo vsque ſpiralis hoc aeris pondere fuerit extenſa, quaenamque virgae EF pars extra operculum AB promineat, nihil aliud requiritur, quam vt auferatur fundus CD, extrahatur embolus H, hamuloque α, embolo infixo, appendatur pondus columnae mercuriali aequiponderans, idemque

idemque erit, ac ſi aeris columna embolo E incumbens omni ſua preſſione in ſpiralem G ageret, et perticae EF punctum in lineam AB cadens deſignare poterit; hocque modo alia quaeuis puncta a minima mutatione ad maximam vsque inuenientur, ponderis tantum, vel addendo, vel auferendo, quantum Barometri Toricelliani altitudines, a minima mutatione ad maximam vsque, requirunt.

Quum tota viciſſitudo ponderis aeris, vel mercurii, decimam quartam partem circiter attingat, ſpatium, quod punctum quodlibet perticae EF percurrit, non admodum poteſt eſſe magnum. Vt autem iſtae mutationes reddantur notabiliores, efficiatur, vt virga ſub motu ad rotulam β patiatur frictionem, huicque acus βγ affigatur, qua in laminae LMN, cui cylindrus ABCD duorum cingulorum ope annectitur, oppoſito latere diuiſiones in limbo inferiore notatae indicantur. Ne autem pertica vacillet, ſed in motu ſuo rotulam β ſecum ſemper circumducat, ad δ alia rotula, quae elatere ε inſtructa eſt, perticamque ad ζ articulo donatam, ad priorem adprimit, affigenda eſt.

Quum interdum fieri poſſit, vt acus caſu de loco ſuo excidat, virgam immotam derelinquens; neceſſe erit, vt certa Barometri altitudo, e. g. media, ſigno quodam in virga notetur, e. g. linea transuerſa, quae ſub medio aeris pondere in ſuperficiem AB iuſto cadat, et acus diuiſionem in laminae limbo MN factam in partes duas aequales diuidat. Haec ſi obſer-

vetur cautela, inſtrumentum, perticam vel deprimendo, vel retrahendo, eo vsque, donec linea ſuperficiem AB attingat, acumque $\beta\gamma$ ad diuiſionis medium dirigendo, denuo ſemper verificare poteris.

Ad excludendum vero omnem aerem, qui alias emboli E latera ſubire facile poſſet, olei et ſeui miſtura (germ. Speiſe) ſuper embolum ad aliquot linearum altitudinem affundatur. Si autem poſt aliquod temporis interuallum eſſet, cur aerem clandeſtino irruptum ſuſpicemur, tunc denuo euacuare cylindrum, et, ſi ſpiralem ſuae elaſticitatis feciſſe iacturam foret coniectura, de nouo puncta determinare oportet: id quod facili opera fieri poteſt.

DVARVM

DVARVM MACHINARVM, VNIVS AD PERFICIENDA QVAEDAM INSTRVMENTA, GERM. Rändeleiſen, ALTERIVS AD COCHLEAS INFINITAS EXSCINDENDAS IDONEAE, DESCRIPTIO.

AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Machinarum ſiue inſtrumentorum a modernis fabrefactorum capitula rotunda, cochleis adiuncta, et capſulas cylindricas, mediante cochlea connexas, ſtriatis ſeu crenatis donatas eſſe marginibus, nonnullarum inſtar monetarum, notum eſt; id quod germanice vocant geründelt. Crenae autem iſtae non tam ornamenti cauſa, quam potius magnum ob vſum, quem praeſtant, conficiuntur: multum enim faciunt, vt modo dictae partes et firmiter apprehendi, et commode moueri queant; cum e contrario in glabro margine non habeant, quo obfirmentur, digiti, ita vt cochleae ſoluendae ſaepius nobis non ſit poteſtas.

Inſtrumentum, quo conficiuntur margines ſtriati, eſt diſcus chalybeus Fig. 1. *n.* 7, 8, 9, 10, circa frontem excauatus, ac crenatus: crenae autem nihil aliud, quam cochlearum typi ſunt. CD eſt furca, qua diſcus circa axem, altera extremitate capite, altera cochlea inſtructam, mouetur. G eſt vncus, quo capulo ligneo inſinuatur. Tab. VII.

Opus

Opus autem marginandum torno formatur modo ſequenti: annulis hunc in finem torno iam efformatis, ac politis, inſtrumentum, Rändeleiſen dictum, fulcro imponitur, vti quoduis inſtrumentum tornatorium; porro inſtrumentum inter tornandum contra marginem operis marginandi fortiter premitur, tam diu, donec crenae inſtrumenti annulis perfecte ſint impreſſae: id quod peractis aliquot reuolutionibus factum erit.

Machina autem ipſa, ad iſtiusmodi inſtrumenta perficienda, vt et alia quaedam, cochleis infinitis quibusdam ſingularibus, quibus inſtrumenta hodie inſtructa reperiuntur, exſcindendis adaptata, vno eodemque fundatae ſunt principio, modo ratione ſtructurae parum diuerſae, quantum ſcilicet ſingularum peculiaris requirit vſus.

Cochleas infinitas modo dictas anglicanas omne id, quod in hoc genere adhuc inuentum eſt, ſuperare, nemo inficias iuerit: ideoque non incongruum fore iudicaui, ſi vtramque machinam, qualis in vſum laboratorii Mechanici a me inuenta, elaborata, Illuſtrique Conuentui exhibita eſt, deſcriberem.

Tab. VII. Fig. 1. n. 1, 2, 3, 4, 5, 6, totam Machinam primo loco nominatam, ſecundum omnes ipſius partes, dimidio minores, quam elaboratae exſiſtunt, repraeſentat.

AB, CD, eſt par laminarum, mediantibus fruſtis *a*, *b*, cochleis iunctum, eo modo, vt, ſi neceſſe fuerit, iterum ſeiungi poſſit. E eſt pars mobilis, germanica voce Laufer dicta, quae cochleae F, partem *b* tranſeuntis ope protrudi et retrudi poteſt.

GH,

GH eſt cingulum machinam circumdans, mobile, clauo cochleatim ſtriato *cd* fulcimenti inſtar inſeruiens. Hic clauus, ſeu cochliditypus *cd*, circa extremitatem *d* quadrangularis eſt, thecae pariter quadrangulari apponendae, ac cochleae ſeu claui ope firmandae, adaptatus; thecae modo deſcriptae gyrgillus I K applicatur. Altera extremitas *d* pari modo, aut claui, aut cochleae ope, in loco ſuo retinetur, quod quilibet pro lubitu ſuo diſponere poteſt, modo cochliditypus ita ſit firmatus, vt circum quidem gyrari poſſit, non tamen vacillet, ſed in ſitu ſuo ſemper retineatur.

Quodſi igitur machinae huius ope diſcos crenatos (Rändeleiſen) performare animus eſt, primum diſci chalybei tomo perficiuntur, quorum diameter circiter duplex iconis *n*. 7, craſſitiei cochliditypi proportionata eſt. Singuli diſci medium foramine patet, cuius diameter foraminum *e*, *e*, n. 1. diametrum adaequat. Iidem circa frontem excauantur ita, vt ipſorum cauitas conuexitati cochliditypi circiter reſpondeat.

Quo facto, eorum duo machinae applicantur, vti ad n. 3, *g*, *h*, videre eſt. Interſtitium inter laminas, atque diſcos chalybeos, bracteis tenuibus, rotundis, orichalceis, perforatis, impletur, et totus apparatus clauis *f*, *f*, traiicitur ita, vt vtramque machinae laminam transeant. Diſcorum vnus inter immobilem partem vtriusque laminae, alter inter mobilem, cochliditypus autem inter frontes diſcorum ponitur. Diſcos ita figere oportet, vt eorum frontes conuexitati cochliditypi reſpondeant, ne inaequabili modo exſcindantur.

His ita diſpoſitis, mediante cochlea F pars mobilis E, vna cum ſuo diſco, contra cochliditypum, hicque contra diſcum oppoſitum, protruditur; denique cochliditypus gyrgilli ope circum mouetur, ſic cochlidia, ad frontes diſcorum oppoſitos ſeſe applicantia, eos ſecundum directiones oppoſitas circumagent, ac, parte mobili magis magisque protruſa, ſenſim ſenſimque discorum frontibus ſeſe imprimeat.

Aſt caute faciendum eſt hoc opus: cochlea F enim paulo nimis intenſa, clauus ſeu cochliditypus, vtpote valde induratus, facile diffringitur; exercitio ſolo acquiritur ſenſus quidam, quo, an reſiſtentia nimis magna ſit, nec ne, percipitur. Cochleam enim leuiter tantum intendere oportet, vt, diſcis prima vice revolutis, vix cochlidiorum tramites ſint conſpiciendi; poſtea arctius ſenſim cogitur cochlea, donec poſt plures reuolutiones crenae ſatis profunde ſint impreſſae.

Adhibentur autem non eam potiſſimum ob cauſam duo diſci, vt vterque ſimul exſcindatur; ſed potius, vt cochliditypus ex vtraque parte ſibi inuicem oppoſita aequalem patiatur reſiſtentiam, nec frangatur: id quod alias, ob illius in chalybem actionem, facile accidere poſſet Quodſi vero cochliditypus admodum craſſus ſit, ſine fracturae periculo vnicus etiam diſcus exſcindi poteſt.

Altera, cochleis infinitis exſcindendis inſeruiens machina, ratione ſtructurae a priori aliquantulum differt: partim, quod opera diuerſae valde diametri hac mediante exſcinduntur; partim, quoniam clauus tantum modo

modo in orichalcum, vel ad ſummum in ferrum agit, nec opus eſt, vt clauus diſcos duos ſibi oppoſitos ſimul exſcindat.

Machinam totam, omnesque eius partes, dimidio imminutas, fig. 2 et 3. n. 1, 2, 3, 4, 5, repraeſentant. Tab. VII. et VIII.

AB, CD, pariter, vt in machina priore, laminae ſunt, cum partibus *a*, *b*, mediantibus cochleis, capitibus quadrangularibus inſtructis, coniunctae. GH eſt cingulum vna cum ſuo cochliditypo *c d*. Cuneus *lm* cingulo GH et cochleae F eſt interponendus, vt haec illi innitatur, cingulumque GH vna cum ſuo cochliditypo *cd* ad opus exſcindendum apprimat, vti ad fig. 2. n. 1, punctis notatum videre eſt. *e e e* etc. ſunt foramina, operi firmando inſeruientia, quorum vni vel alteri, prouti diameter operis elaborandi illud requirit, vncus *f* inſeritur; quem in finem, ne vncus, niſi forte foramen perfecte impleret, vacillet, ſed firmiter in ſuo remaneat ſitu, quadrangularia iſta facta ſunt foramina. In eiusmodi enim operibus, prout res poſtulat, diuerſae craſſitiei axes obueniunt.

Quum diſci integri raro, vtplurimum autem ſemicirculi vel quadrantes, aut ſectores circulorum exſcindantur, facile eſt perſpectu, neceſſe eſſe, vt cochliditypus reducatur, opereque ab vna ad alteram extremitatem peracto, denuo adigatur.

Reliqua autem momenta, machinae huius vſum concernentia, quum e prioris machinae deſcriptione pateant, ſuperfluum foret repetere.

ACVS NAVTICAE NOVAE DESCRIPTIO.

AVCTORE I. E. ZEIHERO.

Expoſitis in nouae acus declinatoriae deſcriptione proprietatibus, quibus effectum eſt, vt pertica chalybea, tanquam pars acus princeps, vim maximam magneticam, nec, niſi polos duos acceperit: vlterius meditatus ſum de inueniendo aliquo modo, vi cuius prisma eiusmodi chalybeum ita poſſit ſuſpendi, vt libere ſeſe circummouere, ac per conſequens pyxidis nauticae vſitatae ad inſtar inſeruire queat; id quod obtinebitur ſequenti modo:

Tab. IX. Elaboretur virga magnetica (A, B) eodem plane
Fig. 1. modo, quem ad acum declinatoriam perficiendam adhibere oportebat, perforeturque pariter duabus cochleis
Fig. 1. cauis (1 - 2); loco autem apparatus praecedentis, firme-
et 2. tur nunc, ac iungatur cum acu, fruſtum orichalceum
Fig. 2. (C D E F). Fruſtum hoc ex lamina (C D) conſiſtit,
et 3. cuius in medio pyxis (5), achate, cauitate conica vel parabolica (I) inſtructo, munita, continetur. Eidem laminae circulus (E F) columnellarum ope (3 - 4) eſt affixus, totusque apparatus mediantibus cochleis (1 - 2) perticae chalybeae annectitur.

Quum circulus ad conſeruandum aequilibrium factus ſit, e rei natura ſequitur, illum tam longe infra virgam eſſe ponendum, vt centrum grauitatis commune

mune

mune totius apparatus ſub centrum motus cadat, acusque aequilibrium ſemper reſtituatur. Huncque in finem circulus iſte columnellarum (3-4) ope cum acu eſt coniunctus, vt ſitum ſatis profundum obtineat.

Cui Nonio vti libet, circuli arcus (E F), quibus acus extremitates inſtruuntur, diuiſionesque deſignantur, pari modo mediantibus columnellis (3-4) in tanta a ſuperficie acus inferiore diſtantia diſponat, quanta ad conſeruandum acus aequilibrium requiritur, ſic circulo, primo loco deſcripto, non erit opus. Fig. 4.

DE AEQVILIBRIO VIRIVM CORPORIBVS ADPLICATARVM COMMENTATIO.

Auctore

S. *KOTELNIKOW*.

I.

Nemo, vt ſpero, dubitat, quin illud, paſſim traditum et demonſtratum in libris mechanicis, theorema de aequilibrio trium corpori adplicatarum virium ſit vtiliſſimum; nullam tamen eius demonſtrationem ita eſſe comparatam, vt nihil obiici poſſit, aut in dubium vocari. Omnes vero iſtae difficultates euaneſcerent, ſi principium minimae actionis, a Celeberr. *Mopertuiſio* detectum, admittere vellemus, de cuius veritate fere amplius dubitare non licet, cum ea a Celeberr. *Eulero* aliisque adplicatione illius principii, tum ad Mechanicam, tum ad Staticam, et inde deductis legitimis conſequentiis, ita euicta eſſe videatur, vt absque dubio inter veritates iam rigide demonſtratas referri poſſit. Ex principio illo non ſolum trium virium in aequilibrio conſtitutarum proprietates, ſed et plurium, eadem facilitate deducuntur. E contrario per methodos adhuc vſitatas, non niſi de tribus tantum viribus, quantum mihi conſtat, facile demonſtrari ſolet, eas eſſe in aequilibrio, ſi quaelibet earum ſit, vt ſinus anguli

anguli a directionibus reliquarum facti. Theorema hoc etiam ex principio minimae actionis, ni fallor, iam ſaepius demonſtratum eſt, ſed methodus haec ad plures, quam tres vires nunquam extenſa fuit; egregias tamen praebet et maxime notatu dignas proprietates, ſi corpori plures vires adplicatae, in aequilibrio conſtitutae, conſiderentur.

2. Sint vires puncto alicui adplicatae, A, B, C, D, E, F, G etc. et earum diſtantiae reſpectiuae p, q, r, s, t, u, x etc. Erunt momenta iſtarum virium Ap, Bq, Cr, Ds, Et, Fu, Gx etc. Et quia actiones harum virium per earum momenta exprimuntur, principium ſupra memoratum, ad ſcopum nobis propoſitum ita enunciabitur, *vt ſumma actionum omnium virium puncto adplicatarum debeat eſſe ſemper minima*, ſi nempe vires in aequilibro ſunt. Ex hoc igitur principio erit

$$Ap + Bq + Cr + Ds + Et + Fu + \text{etc. minimum.}$$

Et ex natura minimi debet eſſe:

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + E\,ds + E\,dt + F\,du + \text{etc.}$$

Hoc eſt, ſi ſitus puncti, cui vires ſunt adplicatae, etiamſi infinite parum mutetur, tamen ſumma actionum debeat eſſe eadem, et propterea differentia inter ſummam actionem prioris ſtatus et poſterioris erit nihilo aequalis, ſeu nulla.

3. Videamus nunc, quales obtineant valores, ipſae dp, dq, dr, ds etc. ſi ſitus puncti, cui potentiae A, B, C, D etc. adplicatae ſunt, infinite parum immutetur. Hunc in finem ponamus potentias A, B, C, Tab X. Fig. 1.

D, E,

D, E, F, G etc adplicatas eſſe puncto O, in diſtantiis AO, BO, CO, DO, EO, FO, GO etc. hoc eſt, p, q, r, s, t, u, x etc. easque eſſe in ſtatu aequilibrii. Vocentur anguli $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, $DOE = \delta$, $EOF = \varepsilon$, $FOG = \zeta$, $GOA = \eta$, etc. Ponamus nunc punctum O translatum eſſe in o, et tranſibunt p, q, r, s, t, u, x etc. in $p + dp$, $q + dq$, $r + dr$, $s + ds$, $t + dt$, $u + du$, $x + dx$ etc. Cum vero ſumma actionum reſpectu puncti O ſit $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + Fu + Gx +$ etc. erit eadem reſpectu ipſius o $A(p + dp) + B(q + dq) + C(r + dr) + D(s + ds) + E(t + dt) + F(u + du) + G(x + dx) +$ etc. Hinc differentia $Adp + Bdq + Cdr +$ etc. quae aequalis nihilo eſſe debet; ideoque

$$Adp + Bdq + Cdr + Dds + Edt + Edu + Gdx + \text{etc.} = 0.$$

4. Vt iam valores ipſarum dp, dq, dr etc. determinentur, concipiatur ex o per O ducta recta indefinita oON, et ex A tamquam centro, radio AO deſcriptus arculus Oa, et habebitur, propter $AO = Aa$, $ao = dp$. Ponatur angulus $NOA = \Phi$, et quia $NOA = NoA + OAo = NoA$, propter OAo infinite paruum, erit $dp = Oo.\,\text{coſ.}\,\Phi = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$, poſito $Oo = dm$. Eodem modo, facto ex B radio BO arculo Ob, habebitur $ob = dq$, et propter OBo infinite paruum $NOB = NOA + AOB = NoB$, hoc eſt $\Phi + \alpha = NoB$. Hinc $dq = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha)$. Haud diſſimili modo determinabitur $dr = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta)$, $ds = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta + \gamma)$, $dt = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$, $du = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$, $dx = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)$. etc.

5. Ex

5. Ex his valoribus ipſarum dp, dq, etc. perſpicitur ſimul lex, ſecundum quam formantur, ita vt ſi etiam numerus potentiarum ſit infinitus, valores incrementorum, diſtantiarum virium puncto adplicatarum, facile per coſinus angulorum, a directionibus virium factorum, determinantur; quae lex vt melius percipi poſſet, placet valores illos in ordinem ponere,

$dp = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$; $dq = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha)$; $dr = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta)$; $ds = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$; $dt = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$; $du = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$; $dx = dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$; etc.

vbi attente conſideranti obuium erit, valores iſtos ita formari. Si nempe punctum O, cui potentiae A, B, C, etc. adplicatae ſunt, concipiatur ex O ad diſtantiam infinite paruam in o tranſiiſſe, et ex o per O ducta recta indefinita oON, quae cadet intra aliquem angulum, a duabus potentiis formatum, vt in noſtro caſu intra AOG, eumque diuidet in duos alios AON et NOG, tum faciendo initium a potentia G vel A, quod perinde eſt, determinabitur incrementum diſtantiae AO per coſinum anguli NOA per Oo mutiplicatum; et incrementum diſtantiae ſequentis potentiae B, per coſinum ſummae angulorum NOA et AOB, per Oo multiplicatum; et incrementum diſtantiae tertiae potentiae C, per coſinum ſummae trium angulorum praecedentium NOA, AOB et BOC, per diſtantiam Oo multiplicatum; etc. Ita vt ſi numerus potentiarum ſit $= n$, incrementum diſtantiae vltimae potentiae erit aequale producto ex coſinu angulorum praecedentium $n-1$ in Oo. Tab. X. Fig. 1.

6. Valores incrementorum diſtantiarum virium puncto adplicatarum, hoc modo determinati, in aequatione,

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds + \text{etc.} = 0$$

quam canonicam vocare licet, ſubſtituantur, et prodibit

$$A\,\text{coſ.}\Phi + B\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha) + C\,\text{coſ}(\Phi+\alpha+\beta) + D\,\text{coſ}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma) + E\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} = 0$$

ſeu

$$\left.\begin{matrix} A\,\text{coſ.}\Phi + B\,\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}\alpha + C\,\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + D\,\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + E\,\text{coſ.}\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \\ - B\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}\alpha - C\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) - D\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - E\,\text{ſin.}\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = 0$$

Ex hac vltima aequatione ratio potentiarum determinari debet.

7. Cum ſitus puncti o ſit arbitrarius, angulus Φ variae magnitudinis eſſe poteſt, ideoque propter diuerſos valores ſinuum et coſinuum ipſius Φ, aequatio generalis plures partiales praebere poteſt, prouti ſucceſſiue alii atque alii termini euaneſcant. Angulus Φ, denotante π ſemicirculum, poteſt eſſe vel 0, vel $\frac{1}{2}\pi$; vel π; vel $\frac{3}{2}\pi$; vel 2π; vel $\frac{5}{2}\pi$; etc. Erunt eius ſinus reſpectiue

$$0; \quad 1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \text{ etc.}$$

et coſinus

$$1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 1; \quad 0; \text{ etc.}$$

Reliquorum valorum ipſius Φ vsque in infinitum, ſinus et coſinus coincidunt cum quatuor priorum 0, $\frac{1}{2}\pi$, π, et $\frac{3}{2}\pi$. Vnde patet aequationem generalem, plures duabus praebere non poſſe, quae prodeunt ponendo $\Phi = 0$ et $\Phi = \frac{1}{2}\pi$; vel $\Phi = \frac{1}{2}\pi$; et $\Phi = \pi$; vel $\Phi = \pi$; et

et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$; vel $\Phi = 0$ et $\Phi = \frac{3}{2}\pi$. Nos ſumemus in poſterum ſemper hos duos valores $\Phi = 0$ ſcilicet et $\Phi = \frac{1}{2}\pi$.

8. Vidimus ſupra, quomodo valores incrementorum diſtantiarum, quarumlibet potentiarum, inueniantur, et demonſtrauimus, pro vnico valore cuiusuis incrementi dari duas aequationes, propter duos diuerſos valores ipſius Φ; videamus quoque, quot valores accipere poteſt incrementum diſtantiae cuiusuis potentiae puncto O adplicatae, dum punctum illud ſucceſſiue ex vno loco in aliud transferatur. Primo intuitu adparet, puncti O ſitum poſſe mutari, non ſolum ita, vt cadat in *o*, intra angulum DOE, ſed etiam intra quemlibet alium, a directionibus duarum virium factum; et cum talium angulorum tot ſint, quot numero potentiae, tot etiam dantur varii ſitus puncti O, ita vt quoduis diſtantiae incrementum, alium, pro alio puncti O ſitu, valorem obtineat. Si numerus potentiarum ſit $= n$, quoduis incrementum dp, dq, dr etc. ſortietur n valores diuerſos. Ideoque, propter ſupra demonſtrata, aequatio generalis canonica praebebit $2n$ aequationes particulares, ex quibus valores potentiarum in aequilibrio conſtitutarum, angulorumque ab iis factorum, determinandi ſunt.

9. Quoniam ex algebra conſtat, tot debere eſſe aequationes, quot ſunt incognitae, dubium hic ſuboriri poteſt, plures dari aequationes, quam neceſſe eſt; nam potentiae per ſinus angulorum, et ſinus per potentias tantum determinari poſſunt, quare non pluribus n aequatio-

quationibus opus eſſe videtur. denotante n numerum potentiarum. Sed in poſterum patebit, quamlibet potentiam duplici modo determinatum iri, et quaeuis binae determinationes, re vera non niſi vnicam dant tantum aequationem, naturam aequilibrii continentem.

10. Supra demonſtrauimus legem, qua valores ipſorum dp, dq, ds etc. formantur, pro qualibet poſitione rectae oON, a ſitu puncti o pendente. Ita pro poſitione rectae oON, quando iſta cadit intra angulum AOG, habuimus $dp = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$, $dq = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha)$, $as = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta)$ etc. Si iam recta ON, promoueatur, et ſucceſſiue intra angulos AOB, BOC, COD etc. cadat, dum iterum ad angulum GOA redeat, valores ipſorum dp, dq, dr etc. ita ſe habebunt, pro qualibet poſitione recta ON.

	1.	2.
dp	$dm\,\text{coſ.}\,\Phi$ . . .	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$
dq	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha)$ . .	$dm\,\text{coſ}\,\Phi$ . . .
dr	$dm\,\text{coſ}\,(\Phi+\alpha+\beta)$ . .	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta)$ . .
ds	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$.	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma)$.
dt	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma+\delta)$.
du	$dm\,\text{coſ}\,(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$
dx	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$	$dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$

	3.	4.
dp	*dm*coſ.$(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)$
dq	*dm*coſ.$(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$	*dm*coſ.$(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$
dr	*dm*coſ.Φ	*dm*coſ.$(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$
ds	*dm*coſ.$(\Phi+\gamma)$	*dm*coſ.Φ
dt	*dm*coſ $(\Phi+\gamma+\delta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\delta)$
du	*dm*coſ.$(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon)$	*dm*coſ.$(\Phi+\delta+\varepsilon)$
dx	*dm*coſ.$(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\delta+\varepsilon+\zeta)$

	5.	6.
dp	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta+\eta)$
pq	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha)$	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta+\eta+\alpha)$
dr	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta)$
ds	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$
dt	*dm*coſ.Φ	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$
du	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon)$	*dm*coſ Φ
dx	*dm*coſ.$(\Phi+\varepsilon+\zeta)$	*dm*coſ.$(\Phi+\zeta)$

	7.
dp	*dm*coſ.$(\Phi+\eta)$
dq	*dm*coſ $(\Phi+\eta+\alpha)$
dr	*dm*coſ.$(\Phi+\eta+\alpha+\beta)$
ds	*dm*coſ $(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma)$
dt	*dm*coſ.$(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta$
du	*dm*coſ.$(\Phi+\eta+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$
dx	*dm*coſ.Φ

In hac tabula prima columna repraeſentat valores ipſorum *dp*, *dq*, *dr* etc. pro poſitione rectae *o*ON intra angulum GOA; ſecunda pro ſitu eiusdem rectae intra angulum AOB; et tertia pro ſitu intra angulum BOC et ita porro.

11. Tabulam hanc adornauimus, pro eo caſu, vbi ſeptem potentiae puncto O adplicatae ſunt, et ob eam rem tantum, vt facilius adpareat, qua ratione, pro quolibet incremento diſtantiae, tot valores formari poſſint, quot potentiae ſunt. Nam ex inſpectione ſolum huius tabulae lex formationis abunde perſpicitur, neque explicationem eius exhibere neceſſe eſt. Ad normam huius tabulae, quolibet caſu dato, pro quouis potentiarum numero, ſimilis facile componi poterit; quod ſequentibus exemplis illuſtrabitur.

Fig. 2. 12. Sint puncto O tres potentiae A, B et C adplicatae, et vocentur diſtantiae $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$; et anguli $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$; tum erit ex ſupra demonſtratis, retentis denominationibus dm et Φ,

$dp = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$	$dp = dm\,\text{coſ}\,(\Phi+\beta+\gamma)$	$dp = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma)$
$dq = dm\,\text{coſ}\,(\Phi+\alpha)$	$dq = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$	$dq = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma+\alpha)$
$dr = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta$	$dr = dm\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta)$	$dr = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$

quibus in aequatione canonica $A\,dp + B\,dq + C\,dr = 0$ ſubſtitutis prodibit

I. $A\,\text{coſ.}\,\Phi + B\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha) + C\,\text{coſ.}\,(\Phi+\alpha+\beta) = 0$

II. $B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta) + A\,\text{coſ.}\,(\Phi+\beta+\gamma) = 0$

III. $C\,\text{coſ.}\,\Phi + A\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma) + B\,\text{coſ.}\,(\Phi+\gamma+\alpha) = 0$

ſeu

I. $$\left.\begin{array}{l} A\,\text{coſ.}\,\Phi + B\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\alpha+\beta) \\ \quad - B\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha - C\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin}\,(\alpha+\beta) \end{array}\right\} = 0$$

II. $$\left.\begin{array}{l} B\,\text{coſ.}\,\Phi + C\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\beta + A\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\beta+\gamma) \\ \quad - C\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\beta - A\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\beta+\gamma) \end{array}\right\} = 0$$

III. $$\left.\begin{array}{l} C\,\text{coſ.}\,\Phi + A\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\gamma + B\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,(\gamma+\alpha) \\ \quad - A\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\gamma - B\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,(\gamma+\alpha) \end{array}\right\} = 0$$

Pona-

Ponatur $\phi = 0$, erit $\text{ſin.}\,\phi = 0$, et $\text{coſ.}\,\phi = 1$, tunc orientur:

$$\text{I. } A + B\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}(\alpha + \beta) = 0$$
$$\text{II. } B + C\,\text{coſ.}\,\beta + A\,\text{coſ.}(\beta + \gamma) = 0$$
$$\text{III. } C + A\,\text{coſ.}\,\gamma + B\,\text{coſ.}(\gamma + \alpha) = 0$$

Eſt vero propter $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, $\text{coſ.}(\alpha + \beta) = \text{coſ}\,\gamma$, $\text{coſ.}(\beta + \gamma) = \text{coſ.}\,\alpha$, et $\text{coſ.}(\gamma + \alpha) = \text{coſ.}\,\beta$, quibus ſubſtitutis habebitur:

$$A + B\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}\,\gamma = 0;\ B + C\,\text{coſ.}\,\beta + A\,\text{coſ}\,\alpha = 0;$$
$$C + A\,\text{coſ.}\,\gamma + B\,\text{coſ.}\,\beta = 0;$$

Eodem modo, poſito $\phi = \frac{1}{2}\pi$, propter $\text{ſin.}\,\phi = 1$, et $\text{coſ}\,\phi = 0$, obtinebitur:

$$B\,\text{ſin.}\,\alpha + C\,\text{ſin.}(\alpha + \beta) = 0;\ (\text{ſin}\,\beta + A\,\text{ſin.}(\beta + \gamma) = 0;$$
$$A\,\text{ſin.}\,\gamma + B\,\text{ſin.}(\gamma + \alpha) = 0;$$

Ex quibus prodit:

$$B\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\gamma;\ C\,\text{ſin.}\,\beta = A\,\text{ſin.}\,\alpha;\ A\,\text{ſin.}\,\gamma = B\,\text{ſin.}\,\beta;$$

Ex his aequationibus, valores ipſarum B, C et A in prioribus ſubſtituantur, et habebitur:

$$\text{I. } A\,\text{ſin.}\,\alpha + C\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}\,\gamma\,\text{ſin.}\,\alpha = 0$$
$$\text{II. } B\,\text{ſin.}\,\beta + A\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\beta + A\,\text{coſ.}\,\alpha\,\text{ſin.}\,\beta = 0$$
$$\text{III. } C\,\text{ſin.}\,\gamma + B\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\gamma + B\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\beta = 0.$$

Ex quibus oritur:

$$A\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\beta;\ B\,\text{ſin.}\,\beta = A\,\text{ſin.}\,\gamma;\ C\,\text{ſin.}\,\gamma = B\,\text{ſin.}\,\alpha;$$

13. Inuenimus igitur ſex aequationes ſequentes:

$$A\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\beta;\ B\,\text{ſin.}\,\beta = A\,\text{ſin.}\,\gamma;\ C\,\text{ſin.}\,\gamma = B\,\text{ſin.}\,\alpha;$$
$$B\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\gamma;\ C\,\text{ſin.}\,\beta = A\,\text{ſin.}\,\alpha;\ A\,\text{ſin.}\,\gamma = B\,\text{ſin.}\,\beta;$$

quarum, binae inter ſe conueniunt; ſed hoc in aliis caſibus,

caſibus, vbi plures potentiae conſiderantur, non fit. Lex, qua iſtae aequationes formantur, eſt talis: Numerando potentias ab A verſus dextram, hoc ordine A, B, C, priores tres aequationes obtinebis, ſi primam potentiam multiplices in coſinum anguli adiacentis ad dextram illius potentiae, illudque productum aequabis tertiae potentiae, in coſinum ſequentis anguli multiplicatae. Eodem modo formantur tres aequationes, numerando potentias in partem contrariam, ſecundum ordinem A, C, B. Si harum aequationum I et IV, II et V, III et VIta, combinentur, habebis tres aequationes, aequilibrii naturam continentes:

$$\text{I.}\quad A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\gamma) = (B + C)\,\text{ſin.}\,\beta$$

$$\text{II.}\quad B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,\alpha) = (A + C)\,\text{ſin.}\,\gamma$$

$$\text{III.}\quad C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin:}\,\beta) = (A + B)\,\text{ſin.}\,\alpha$$

Fig. 3. 14. Pro quatuor potentiis, vbi $AO = p$, $BO = q$, $CO = r$, $DO = s$, habebitur, exiſtentibus angulis $AOB = \alpha$, $BOC = \beta$, $COD = \gamma$, $DOH = \delta$;

$dp = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$	$dp = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \beta + \gamma + \delta)$
$dq = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha)$	$dq = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$
$dr = dm\,\text{coſ}\,(\Phi + \alpha + \beta)$	$dr = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \beta)$
$ds = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \alpha + \beta + \gamma)$	$ds = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \beta + \gamma)$

$dp = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \beta + \gamma + \delta$	$dp = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \gamma + \delta)$
$dq = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \gamma + \delta + \alpha)$	$dq = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \delta + \alpha)$
$dr = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$	$dr = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \delta + \alpha + \beta)$
$ds = dm\,\text{coſ.}(\Phi + \gamma)$	$ds = dm\,\text{coſ.}\,\Phi$

quibus valoribus ipſorum dp, dq, dr, ds in aequatione

$$A\,dp + B\,dq + C\,dr + D\,ds = 0$$

ſubſti-

ſubſtitutis, elicientur quatuor aequationes ſequentes:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} A\,\text{coſ.}\,\Phi + B\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + D\,\text{coſ.}\,\Phi\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) \\ - B\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}\,\alpha - C\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) - D\,\text{ſin.}\,\Phi\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} \text{coſ.}\,\Phi\,(B + C\,\text{coſ.}\,\beta + D\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + A\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta)) \\ - \text{ſin.}\,\Phi\,(C\,\text{ſin.}\,\beta + D\,\text{ſin.}(\beta+\gamma) + A\,\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} \text{coſ.}\,\Phi\,(C + D\,\text{coſ.}\,\gamma + A\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + B\,\text{coſ.}(\gamma+\delta+\alpha)) \\ - \text{ſin.}\,\Phi\,(D\,\text{ſin.}\,\gamma + A\,\text{ſin.}(\gamma+\delta) + A\,\text{ſin.}(\gamma+\delta+\alpha)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{VI.}\quad \left.\begin{array}{l} \text{coſ.}\,\Phi\,(D + A\,\text{coſ.}\,\delta + B\,\text{coſ.}(\delta+\alpha) + C\,\text{coſ.}(\delta+\alpha+\beta)) \\ - \text{ſin.}\,\Phi\,(A\,\text{ſin.}\,\delta + B\,\text{ſin.}(\delta+\alpha) + C\,\text{ſin.}(\delta+\alpha+\beta)) \end{array}\right\} = 0$$

ſit vti ſupra fecimus $\Phi = 0$, erit ſin. $\Phi = 0$, coſ. $\Phi = 1$, qui valor ipſius Φ dabit hos aequationes:

$$\text{I.}\quad A + B\,\text{coſ.}\,\alpha + C\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + D\,\text{coſ.}\,\delta = 0$$

$$\text{II.}\quad B + C\,\text{coſ}\,\beta + D\,\text{coſ.}(\alpha+\delta) + A\,\text{coſ.}\,\alpha = 0$$

$$\text{III.}\quad C + D\,\text{coſ.}\,\gamma + A\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + B\,\text{coſ.}\,\beta = 0$$

$$\text{IV.}\quad D + A\,\text{coſ.}\,\delta + B\,\text{coſ.}(\gamma+\beta) + C\,\text{coſ.}\,\gamma = 0$$

Item, poſito $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, prodibunt, propter ſin. $\Phi = 1$ et coſ. $\Phi = 0$, ſequentes:

$$\text{I.}\quad B\,\text{ſin.}\,\alpha = D\,\text{ſin}\,\delta + C\,\text{ſin.}(\gamma+\delta)$$

$$\text{II.}\quad C\,\text{ſin.}\,\beta = A\,\text{ſin.}\,\alpha + D\,\text{ſin.}(\delta+\alpha)$$

$$\text{III.}\quad D\,\text{ſin.}\,\gamma = B\,\text{ſin.}\,\beta + A\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)$$

$$\text{IV.}\quad A\,\text{ſin.}\,\delta = C\,\text{ſin.}\,\gamma + B\,\text{ſin.}(\beta+\gamma)$$

Multiplicentur quatuor priores aequationes reſpectiue per ſin. α, ſin. β, ſin. γ, ſin. δ et poſteriores per coſ. α, coſ. β, coſ. γ, coſ. δ; tandem in prioribus pro $B\,\text{ſin.}\,\alpha\,\text{coſ.}\,\alpha$, $C\,\text{ſin.}\,\beta\,\text{coſ.}\,\beta$, $D\,\text{ſin.}\,\gamma\,\text{coſ.}\,\gamma$ et $A\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{coſ.}\,\delta$ ſubſtituantur earum valores, ex poſterioribus deprompti. Et hic priores quatuor aequationes in ſequentes transformabuntur:

$$\text{I.}\quad A\,\text{ſin.}\,\alpha + C\,\text{ſin.}(\alpha+\gamma+\delta) + D\,\text{ſin.}(\alpha+\delta) = 0$$

$$\text{II.}\quad B\,\text{ſin.}\,\beta + D\,\text{ſin.}(\beta+\alpha+\delta) + A\,\text{ſin.}(\beta+\alpha) = 0$$

$$\text{III.}\quad C\,\text{ſin.}\,\gamma + A\,\text{ſin.}(\gamma+\alpha+\beta) + B\,\text{ſin.}(\gamma+\beta) = 0$$

$$\text{IV.}\quad D\,\text{ſin.}\,\delta + B\,\text{ſin.}(\delta+\gamma+\beta) + C\,\text{ſin.}(\delta+\gamma) = 0$$

 ex

ex quibus, quia $\text{ſin.}(\alpha+\gamma+\delta) = -\text{ſin.}\beta$, $\text{ſin.}(\alpha+\delta) = -\text{ſin.}(\beta+\gamma)$ etc., elicientur

$$A\,\text{ſin.}\alpha = C\,\text{ſin.}\beta + D\,\text{ſin.}(\beta+\gamma)$$
$$B\,\text{ſin.}\beta = D\,\text{ſin.}\gamma + A\,\text{ſin.}(\gamma+\delta)$$
$$C\,\text{ſin.}\gamma = A\,\text{ſin.}\delta + B\,\text{ſin.}(\alpha+\delta)$$
$$D\,\text{ſin.}\delta = B\,\text{ſin.}\alpha + C\,\text{ſin.}(\alpha+\beta).$$

15. Inuenimus igitur octo aequationes, quae ſimili modo formantur, vt et primum inuentae ſex; nempe ſi potentiam quamcunque A multiplices per ſinum anguli, inter eam et proxime ſequentem intercepti, hocque productum aequale ponas ſummae productorum, ex tertia potentia ab A numerando in ſinum anguli, inter eam et ſecundam intercepti, et ex quarta in ſinum angulorum inter eam et ſecundam iacentium: aequationes, quae hoc modo formantur, et quas iam ſupra paragrapho praecedenti elicuimus, ſunt:

$$\text{I.}\quad A\,\text{ſin.}\alpha = C\,\text{ſin.}\beta + D\,\text{ſin.}(\beta+\gamma)$$
$$\text{II.}\quad B\,\text{ſin}\,\beta = D\,\text{ſin.}\gamma + A\,\text{ſin.}(\gamma+\delta)$$
$$\text{III.}\quad C\,\text{ſin.}\gamma = A\,\text{ſin.}\delta + B\,\text{ſin.}(\delta+\alpha)$$
$$\text{IV.}\quad D\,\text{ſin.}\delta = B\,\text{ſin.}\alpha + C\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)$$
$$\text{V.}\quad A\,\text{ſin.}\delta = C\,\text{ſin.}\gamma + B\,\text{ſin.}(\gamma+\beta)$$
$$\text{VI.}\quad B\,\text{ſin.}\alpha = D\,\text{ſin.}\delta + C\,\text{ſin.}(\delta+\gamma)$$
$$\text{VII.}\quad C\,\text{ſin.}\beta = A\,\text{ſin.}\alpha + D\,\text{ſin.}(\alpha+\delta)$$
$$\text{VIII.}\quad D\,\text{ſin.}\gamma = B\,\text{ſin.}\beta + A\,\text{ſin.}(\beta+\alpha)$$

Ex quibus, combinando I cum V, II cum VI, III cum VII, IV cum VIII va, ſiunt quatuor aequationes,

aequi-

aequilibrii naturam potentiarum A, B, C et D continentes,

$$A(\text{ſin.}\alpha+\text{ſin.}\delta)=C(\text{ſin.}\beta+\text{ſin.}\gamma)+(D+B)\,\text{ſin.}(\beta+\gamma)$$
$$B(\text{ſin.}\beta+\text{ſin.}\alpha)=D(\text{ſin.}\gamma+\text{ſin.}\delta)+(A+C)\,\text{ſin.}(\gamma+\delta)$$
$$C(\text{ſin.}\gamma+\text{ſin.}\beta)=A(\text{ſin.}\delta+\text{ſin.}\alpha)+(B+D)\,\text{ſin.}(\delta+\alpha)$$
$$D(\text{ſin.}\delta+\text{ſin.}\gamma)=B(\text{ſin.}\alpha+\text{ſin.}\beta)+(C+A)\,\text{ſin.}(\alpha+\beta)$$

16. Sint quinque potentiae A, B, C, D, E puncto O adplicatae, quarum diſtantiae ſunt p, q, r, s, t; et anguli $AOB=\alpha$, $BOC=\beta$, $COD=\gamma$, $DOE=\delta$ et $EOA=\varepsilon$; erit ex ſupra demonſtratis Tab. X. Fig. 4.

$$dp=dm\,\text{coſ.}\Phi$$
$$dq=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$dq=dm\,\text{coſ.}\Phi$$
$$dr=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\beta+\gamma+\delta)$$

$$pq=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$pq=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{coſ.}\Phi$$
$$ds=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\gamma+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\delta+\varepsilon)$$
$$dq=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{coſ.}\Phi$$
$$dt=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\delta)$$

$$dp=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\varepsilon)$$
$$pq=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\varepsilon+\alpha)$$
$$dr=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta)$$
$$ds=dm\,\text{coſ.}(\Phi+\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma)$$
$$dt=dm\,\text{coſ.}\Phi$$

Subſtitutis his valoribus ipſorum dp, dq, ds etc. ſucceſſiue in aequatione

$$A\,dp+B\,dq+C\,dr+D\,ds+E\,dt=0$$

 elicien-

elicientur ſequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(A+B\cos.\alpha+C\cos.(\alpha+\beta)+D\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+E\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)) \\ -\sin.\Phi(B\sin.\alpha+C\sin.(\alpha+\beta)+D\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+E\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(B+C\cos.\beta+D\cos.(\beta+\gamma)+E\cos.(\beta+\gamma+\delta)+A\cos.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)) \\ -\sin.\Phi(C\sin.\beta+D\sin.(\beta+\gamma)+E\sin.(\beta+\gamma+\delta)+A\sin.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{III.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(C+D\cos.\gamma+E\cos.(\gamma+\delta)+A\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)) \\ -\sin.\Phi(D\sin.\gamma+E\sin.(\gamma-\delta)+A\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)+B\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha)). \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{IV.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(D+E\cos.\delta+A\cos.(\delta+\varepsilon)+B\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)) \\ -\sin.\Phi(E\sin.\delta+A\sin.(\delta+\varepsilon)+B\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha+\beta)) \end{array}\right\} = 0$$

$$\text{V.}\quad \left.\begin{array}{l} \cos.\Phi(E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\varepsilon+\alpha)+C\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\cos.(\varepsilon+\beta+\alpha+\gamma)) \\ -\sin.\Phi(A\sin.\varepsilon+B\sin.(\varepsilon+\alpha)+C\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)+D\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta+\gamma)) \end{array}\right\} = 0$$

17. Ponatur nunc $\Phi = 0$ vt ſupra, et erit ſin. $\Phi = 0$ et coſ. $\Phi = 1$, tumque orientur ſequentes aequationes:

$$\text{I.}\quad A+B\cos.\alpha+C\cos.(\gamma+\delta+\varepsilon)+D\cos.(\delta+\varepsilon) + E\cos.\varepsilon = 0$$

$$\text{II.}\quad B+C\cos.\beta+D\cos.(\delta+\varepsilon+\alpha)+E\cos.(\varepsilon+\alpha) + A\cos.\alpha = 0$$

$$\text{III.}\quad C+D\cos.\gamma+E\cos.(\varepsilon+\alpha+\beta)+A\cos.(\alpha+\beta) + B\cos\beta = 0$$

$$\text{IV.}\quad D+E\cos.\delta+A\cos(\alpha+\beta+\gamma)+B\cos.(\beta+\gamma) + C\cos.\gamma = 0$$

$$\text{V.}\quad E+A\cos.\varepsilon+B\cos.(\beta+\gamma+\delta)+C\cos(\gamma+\delta) + D\cos\delta = 0.$$

Item poſito $\Phi = \frac{1}{2}\pi$, fiet ſin. $\Phi = 1$ et coſ. $\Phi = 0$, ſicque prouenient iſtae aequationes:

$$\text{I.}\quad B\sin.\alpha = E\sin\varepsilon + D\sin.(\delta+\varepsilon) + C\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$$

$$\text{II.}\quad C\sin.\beta = D\sin(\alpha+\delta+\varepsilon) + E\sin.(\alpha+\varepsilon) + A\sin.\alpha$$

$$\text{III.}\quad D\sin.\gamma = E\sin.(\alpha+\beta+\varepsilon) + A\sin.(\alpha+\beta) + B\sin.\beta$$

$$\text{IV.}\quad E\sin\delta = A\sin.(\alpha+\beta+\gamma) + B\sin.(\beta+\gamma) + C\sin.\gamma$$

$$\text{V.}\quad A\sin.\varepsilon = B\sin.(\beta+\gamma+\delta) + C\sin(\gamma+\delta) + D\sin.\delta.$$

Multi-

Multiplicentur priores quinque aequationes per $\sin.\alpha$, $\sin.\beta$, $\sin.\gamma$, $\sin.\delta$, $\sin.\varepsilon$, et poſteriores per coſinus eorundem angulorum; tandem valores ipſarum $B\sin.\alpha\cos.\alpha$, $C\sin.\beta\cos.\beta$, $D\sin.\gamma\cos.\gamma$, $E\sin.\delta\cos\delta$ et $A\sin.\varepsilon\cos.\varepsilon$, in prioribus ſubſtituantur, et transformabuntur iſtae aequationes in ſequentes:

I. $A\sin\alpha = C\sin.\beta + D\sin.(\beta+\gamma) + E\sin.(\beta+\gamma+\delta)$

II. $B\sin.\beta = D\sin.\gamma + E\sin.(\gamma+\delta) + A\sin.(\gamma+\delta+\varepsilon)$

III. $C\sin.\gamma = E\sin.\delta + A\sin.(\delta+\varepsilon) + B\sin.(\delta+\varepsilon+\alpha)$

IV. $D\sin.\delta = A\sin.\varepsilon + B\sin.(\varepsilon+\alpha) + C\sin.(\varepsilon+\alpha+\beta)$

V. $E\sin.\varepsilon = B\sin.\alpha + C\sin.(\alpha+\beta) + D\sin.(\alpha+\beta+\gamma)$

quae naturam quinque virium, in aequilibrii ſtatu exiſtentium, exhibent.

18. In hoc caſu eadem lex deprehenditur, quam et ſupra in formatione aequationum obſeruauimus; neque opus eſt, vt plures caſus euoluantur, ex his iam tuto concludere licet, aequationes iſtas ſequentem in modum formari: Quaeuis potentia per reliquas ita determinatur, vt multiplicata in ſinum anguli, inter eam et proxime ſequentem intercepti, aequetur tertiae ab ea potentiae, ductae in ſinum anguli inter ſecundam et tertiam iacentis; plus quarta, ducta in ſinum angulorum, inter ſecundam et tertiam, tertiam et quartam interiacentium; plus quinta potentia, multiplicata per ſinum trium angulorum, inter eam et ſecundum iacentium; et ſic porro.

19. Si iam potentiae I et V; II et I; III et II; IV et III; V et IV combinentur, prodibunt ſequentes

tes aequationes, naturam aequilibrii quinque potentiarum continentes:

$$A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\varepsilon) = C(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}(\gamma+\delta)) + D(\text{ſin}\,\delta + \text{ſin.}(\beta+\gamma)) + (B+E)\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta)$$

$$B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,\alpha) = D(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}(\delta+\varepsilon)) + E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}(\gamma+\delta)) + (A+C)\text{ſin.}(\gamma+\delta+\varepsilon)$$

$$C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,\beta) = A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}(\delta+\varepsilon)) + E(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin}(\alpha+\varepsilon)) + (B+D)\text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\alpha)$$

$$D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,\gamma) = B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}(\varepsilon+\alpha)) + A(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}(\alpha+\beta)) + (C+E)\text{ſin.}(\varepsilon+\alpha+\beta)$$

$$E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\delta) = C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}(\alpha+\beta)) + B(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}(\beta+\gamma) + (D+A)\text{ſin.}\,\alpha+\beta+\gamma).$$

Fig. 5. 20. Sint itaque ſex protentiae A, B, C, D, E, F puncto O adplicatae, angulique ab iis comprehenſi α, β, γ, δ, ε, ζ; erit per regulam ſupra §. 18. traditam

$$A\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\beta + D\,\text{ſin}(\beta+\gamma) + E\,\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta) + F\,\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

$$A\,\text{ſin.}\,\zeta = E\,\text{ſin.}\,\varepsilon + D\,\text{ſin.}(\varepsilon+\delta) + C\,\text{ſin.}(\varepsilon+\delta+\gamma) + B\,\text{ſin.}(\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)$$

hinc

$$\text{I.}\quad A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\zeta) = D(\text{ſin.}(\beta+\gamma) + \text{ſin.}(\varepsilon+\delta)) + C(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}(\varepsilon+\delta+\gamma)) + (B+F)\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) + E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta))$$

Eodem modo inueniuntur

$$\text{II.}\quad B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,\alpha) = E(\text{ſin.}(\delta+\gamma) + \text{ſin.}(\varepsilon+\zeta)) + D(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\zeta)) + (A+C)\text{ſin.}(\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)) + F(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}(\varepsilon+\delta+\gamma))$$

$$\text{III.}\quad C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,\beta) = F(\text{ſin.}(\zeta+\alpha) + \text{ſin.}(\varepsilon+\delta)) + E(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}(\varepsilon+\zeta+\alpha)) + (B+D)\text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\zeta+\alpha) + A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}(\zeta+\varepsilon+\delta))$$

$$\text{IV.}\quad D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,\gamma) = A(\text{ſin.}(\alpha+\beta) + \text{ſin.}(\zeta+\varepsilon)) + B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}(\alpha+\zeta+\varepsilon)) + (E+C)\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta+\alpha+\beta) + F(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}(\zeta+\alpha+\beta))$$

$$\text{V.}\quad E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\delta) = B(\text{ſin.}(\alpha+\zeta) + \text{ſin.}(\beta+\gamma)) + A(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma)) + (F+D)\text{ſin.}(\zeta+\alpha+\beta+\gamma) + C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}(\beta+\alpha+\zeta))$$

$$\text{VI.}\quad F(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\varepsilon) = C(\text{ſin.}(\beta+\alpha) + \text{ſin.}(\gamma+\delta)) + B(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta)) + (A+E)\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}(\gamma+\beta+\alpha)).$$

21.

21. Hae ſex aequationes naturam aequilibrii ſex virium A, B, C, D, E, et F puncto O adplicatarum perfecte determinant. Et quouis dato caſu, pro quolibet numero potentiarum, facile inueniuntur, per regulas ſupra traditas. Veritas vero Theorematum, his aequationibus contentorum, ex eo etiam oſtendi poteſt, quod quaelibet harum aequationum euaneſcere debet, hoc eſt: omnes termini ſe deſtruere debent, ſi potentiae et anguli ab illis facti omnes fuerint inter ſe aequales. Sumamus ad hunc ſcopum, vnam ex ſuperiori paragrapho exhibitis ſex aequationibus, veluti VItam.

$$F(\sin.\zeta+\sin.\varepsilon)=C(\sin.(\beta+\alpha)+\sin.(\gamma+\delta))+B(\sin.\alpha+\sin.(\beta+\gamma+\delta))+(A+E)\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+D(\sin.\delta+\sin.(\gamma+\beta+\alpha)).$$

22. Quia $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=2\pi$, erit $\gamma+\beta+\alpha=2\pi-(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi-(\varepsilon+\zeta)$, quare $\sin.(\gamma+\beta+\alpha)=-\sin.(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=-\sin.(\varepsilon+\zeta)$, quibus ſubſtitutis fiet,

$$F(\sin.\zeta+\sin.\varepsilon)=C(\sin.(\beta+\alpha)+\sin.(\gamma+\delta))+B(\sin.\alpha+\sin.(\beta+\gamma+\delta)) -(A+E)\sin.(\varepsilon+\zeta)+D(\sin.\delta-\sin.(\delta+\varepsilon+\zeta))$$

Ponatur nunc $A=B=C=D=E=F$ et $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta$ et prodibit:

$$2\sin.\alpha=2\sin.2\alpha+\sin.\alpha+\sin.3\alpha-2\sin.2\alpha+\sin.\alpha-\sin.3\alpha$$

vbi omnes termini ſe deſtruunt.

DE

DE COMMODA ACVS DECLINATORIAE SVSPENSIONE DISSERTATIVNCVLA.

Auctore

S. KOTELNIKOW.

I.

Experientia docuit, acus magneticas non perforatas non ſolum maiorem vim magneticam accipere, ſed et id lucri adferre, vt facilius effici poſſit, vt acus duos tantum polos magneticos a puncto ſuſpenſionis aeque diſtantes adipiſcatur, quod in acubus in puncto ſuſpenſionis perforatis difficillime obtinetur. Nam praeter expectationem plures poli exoriuntur: quo fit, vt motus acus declinatoriae perturbetur, et ideo experimentis cum tali acu inſtitutis confidere non licet, quod iam Cl. *Zeiberus* in diſſertatione ante tradita annotauit. Verum pauciſſimae acus hoc defectu carentes fabricantur. Igitur non mediocria in ſcientiam rerum nauticarum totamque phyſicam redundabunt emolumenta, ſi iſte defectus commoda acus ſuſpenſione euitari poſſit. Cuius rei in gratiam contigit mihi incidiſſe in ſequens, non ſumptuoſum et ad praxin aptiſſimum, acus declinatorias ſuſpendendi artificium, vbi non eſt neceſſe, acum pertundere, vti adhuc factum eſt.

II.

II.

Deſcriptio.

1. Fabrefiat lamina chalybea, parallelopipedi figuram habens, in vtraque extremitate in cuſpidem abiens, perque totam longitudinem aequaliter craſſa, in qua centrum grauitatis determinetur, et notetur lineola transuerſa.

2. Lamina ad acum declinatoriam hoc modo fabrefacta induretur et imbuatur vi magnetica, ope duarum magneticarum laminarum, ſeu magnetum artificialium, ad laminam ita adplicatorum, vt ad partes contrarias inclinati angulum efficiant, verticem ad laminam habentem. Frictio ad centrum grauitatis lineola transuerſa notatum incipiatur, ibidemque finiatur, trahendo magnetes dextrorſum et ſiniſtrorſum ad extremitates vsque laminae. Hoc modo obtinebitur, vt lamina non ſolum duos tantum polos habeat, ſed et centrum eorum commune cum centro grauitatis laminae coincidat.

3. Fiat ex ligno conus truncatus, cuius baſis inferior habeat diametrum multo maiorem diametro baſis ſuperioris. In baſi ſuperiore huius coni fiat inciſura transuerſa, ad axem coni normalis, et quae ad laminam accuratiſſime quadret, ita vt lamina in eam impoſita cum cono firmiter cohaereat.

4. In baſi inferiore coni fiat ſecundum eius axem cauitas conica, cuius altitudo vix non adaequet altitudinem coni, propterea vt punctum ſuſpenſionis, quod eſt in fundo cauitatis, cadat ſupra commune centrum grauitatis acus et coni.

5. Lamina imponatur in inciſuram, in ſuperiore baſi coni factam, ita vt lineola transuerſa, centrum grauitatis laminae deſignans, per axem coni tranſeat, ſuſpendaturque in pixide, eodem modo, vti acus ordinariae ſuſpenduntur.

III.

Quodſi acus parum ſtabilitatis habeat, aut inuertatur, quod indicio eſt, centrum grauitatis eſſe ſupra centrum ſuſpenſionis, tum fiat annulus ex graui metallo, et ad inferiorem coni baſin adcommodetur. Poteſt etiam huic incommodo obuiam iri, ſi conus ita fabrefactus ſit, vt ex duabus partibus conſtet, ſuperior ex ligno, inferior vero ex metallo. Interim notandum eſt, pondus coni debere eſſe maius pondere acus. Attamen artifex curare debet, ne pondus coni ſit valde magnum reſpectu ponderis acus; hoc eſt: ne iuſto maius fiat, et ſuperfluo pondere acum ſegniorem reddat. Vt igitur inter pondus coni et acus deſiderata ſemper proportio obtineatur, ſequens problema ſubiungere placet.

IV.
Problema.

Dato pondere acus declinatoriae, determinare dimenſiones coni truncati, ſi illius pondus ad pondus acus habeat rationem datam.

Solutio.

Sit pondus acus $= p$; et pondus coni $= np$, denotante n numerum integrum. Ponatur pondus vnius digiti cubici chalybis $= b$; erit volumen acus declinatoriae $= \frac{1000p}{b}$ linearum cubicarum.

Sit porro grauitas ſpecifica chalybis ad grauitatem ſpecificam materiae, ex qua conus fabrefactus debet eſſe, vt i ad m; et ſoliditas coni $=$ S.

Erit $S = \frac{1000np}{mb}$

Sed ex geometricis conſtat, poſita diametro baſis inferioris coni $= x$; ſuperioris $= y$; altitudine b, et ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, fore S $= \frac{1}{12} \pi b \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \frac{1}{12} \pi b (xx + yx + yy)$; vnde obtinetur

$$xx + xy + yy = \frac{12000\,np}{m\pi bb}.$$

Quia ratio diametrorum baſium coni truncati eſt arbitraria, ponatur $x = \lambda y$, denotante λ numerum vnitate maiorem, et habebitur

$$yy(\lambda\lambda + \lambda + 1) = \frac{12000\,np}{m\pi bb}$$

vnde $y = \frac{20}{\sqrt{(1 + \lambda + \lambda\lambda)}} \sqrt{\frac{30\,np}{m\pi bb}}$

et $x = \lambda y$.

V.

Sumta igitur altitudine coni b pro arbitrio, baſium diametri ex traditis in praecedente paragrapho determinabuntur; oportet tantum numerum λ definire, vt $\frac{1}{4}b\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{3}{\lambda^3-1}\right)$ paruum valorem obtineat. Haec formula exhibet valorem diſtantiae centri grauitatis coni truncati, ab inferiore eius baſi. Sed quum debeat eſſe $\lambda > 1$, et ternarium non multum excedat, tum enim conus erit deformis; nam ſi ponas $\lambda = 3$, erit diſtantia centri ab inferiore baſi $> \frac{1}{3}b$. Sumamus ergo λ ita, vt diſtantia centri grauitatis ſit praeciſe $= \frac{1}{3}b$. Quam ob rem erit $\frac{\lambda}{\lambda-1}-\frac{3}{\lambda^3-1}=\frac{4}{3}$; vnde habetur haec aequatio:

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda - 5 = 0$$

cuius radices ſunt, 1; 1; $1+\sqrt{6}$; $1-\sqrt{6}$

VI.

Vt igitur diſtantia centri grauitatis coni cadat ad $\frac{1}{3}b$ ab eius baſi inferiore, ſumatur $\lambda = 1+\sqrt{6}$ et erit:

$$y = \frac{20}{\sqrt{(9+3\sqrt{6})}}\sqrt{\frac{30 \cdot np}{m\pi bb}} \text{ et } x = y(1+\sqrt{6}).$$

Sed quia $\sqrt{6} = 2.44949$, erit $\lambda = 3,44949$, quae fractio decimalis dat ſequentes fractiones pro λ:

$$\frac{3}{1};\ \frac{7}{2};\ \frac{31}{9};\ \frac{69}{20};$$

quarum poſtrema ſatis accurata eſt. Si ergo ſumatur
$x = 1$; $y = 3$ vel $x = 2$; $y = 7$ vel $x = 9$; $y = 31$;
vel $x = 20$; $y = 69$;

ſemper

ſemper centrum grauitatis coni erit ad $\frac{2}{3}$ eius altitudinis depreſſum. Hoc tamen notato, quod maiores numeri propius ad veritatem accedunt.

VII.

Si quis parum curet, vtrum pondus coni datam habeat proportionem ad pondus acus, nec ne; is poterit ex paragrapho praecedenti ſumere rationes diametrorum. Id tamen reſpicere debet, vt pondus coni ſit maius pondere acus. Sed propter eos, quibus proportio ponderum, acus et coni, curae eſt, ſunt ſequentes abſoluti valores diametrorum:

$$y = 15.283 \sqrt{\frac{np}{mbb}} \text{ et } x = 52.711 \sqrt{\frac{np}{mbb}}.$$

Quum lignum ad hunc vſum aptiſſimum ſit ebenum, propter ſuam duritiem et grauitatem; eſt enim illius grauitas ſpecifica ad grauitatem ſpecificam chalybis indurati vt 1. 177 ad 7. 204: erit $m = 01527777777$ et $\sqrt{m} = 0.39086$; ideoque $y = 39.19 \sqrt{\frac{np}{bb}}$; et $x = 135.16 \sqrt{\frac{np}{bb}}$; ſed ad ſtabilitatem acus obtinendam ſufficit altitudinem coni $= 6'''$ ſtatuiſſe, tum centrum grauitatis acus erit ad minimum adhuc ad $1'''$ infra punctum ſuſpenſionis depreſſum. Mox vero oſtendam, quomodo efficiatur, vt centrum grauitatis profundius cadat. Ponatur ergo $b = 6'''$, et erit

$$y = 16.06 \sqrt{\frac{np}{b}} \text{ et } x = 55.4 \sqrt{\frac{np}{b}}.$$

VIII.

Quia pes cubicus aquae ponderat $62\frac{1}{2}$ libras Amſtelodamenſes, ſeu 480000 grana, ideoque pollex cubi-

V.

Sumta igitur altitudine co ... ui. baſium diametri ex traditis in ... s vt determinabuntur; oportet tar ... 2140 vt $\frac{1}{4}b(\frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{3}{\lambda^3-1})$ par formula exhibet valorem truncati, ab inferiore ... vt eius cen- $\lambda > 1$, et ternarium ... duabus tertiis erit deformis; n ... plicetur, tum tri ab inferiore ... citer altitudinis diſtantia cen ... i grauitatis acus rem erit ... tribui debet, vt ... partes colligatur; ... obtinebitur: Fiat conus ſecun- cu ... ſiones, cuius pondus ſit aequale pon- ... , deinde ita tornetur, vt non tacta baſi infe- riore, ad partes ſuperiores multo gracilior reddatur. Tab. X. Fig. 6. (vti figura repreſentat) Tum ponderetur, vt ablata pars maſſae innoteſcat. Poſtea obducatur lamina auri-chalcea, pondere ablatae maſſae aequali, tam cauitas conica, quam baſis inferior coni. Lamina vero, qua baſis obducitur, debet craſſior fieri ea, qua cauitas conica obducetur. Ita obtinebitur, vt acus magnam ſtabilitatem habeat.

X.

Et quum in tornando difficile eſt obſeruare, vt conus ad datas dmenſiones exacte fabricetur, adhibea-tur

tur cautela: lamina aurichalcea baſin coni obducens fiat ponderoſior ablata ligni portione. Sed hanc proportionem ponderis et altitudinis coni tantum tum obſeruare licet, cum pondus acus ſit non infra 500 grana; in minoribus vero altitudo b minor, et pondus maius accipere conueniet, prout neceſſe erit. Formulae vero ad abſolutos diametrorum baſium valores determinandos adhibeantur ſequentes:

$$\left.\begin{aligned} y &= 39.19\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \\ x &= 135.16\sqrt{\frac{np}{2140\,b}} \end{aligned}\right\}$$ in partibus decimis pollicis Rhenani.

Exemplum I.

Sit pondus acus $= 2140$ grana; ſumatur pondus coni aequale ponderi acus, et altitudo $= 6'''$. Erit $n = 1$; $p = 2140$; $b = 6'''$. Vnde inuenitur $y = 16'''$; $x = 55'''$.

Exemplum II.

Sit pondus acus $= 535$ grana. Et fiat pondus coni aequale ponderi acus, altitudo vero $= b = 6'''$. Erit $p = 535$; $n = 1$.

Vnde fit diameter baſis ſuperioris $= y = 8'''$.
—— —— —— —— inferioris $= x = 27'''$.

Exemplum III.

Ponatur pondus acus $= 60$ grana; pondus coni duplum ponderis acus; altitudo $b = 4'''$. Erit $n = 2$;
$p = 60$;

tes aequationes, naturam aequilibrii quinque potentiarum continentes:

$$A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\varepsilon) = C(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,(\gamma + \delta)) + D(\text{ſin}\,\delta + \text{ſin.}\,(\beta + \gamma)) + (B + E)\text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta)$$

$$B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,\alpha) = D(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,(\delta + \varepsilon)) + E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,(\gamma + \delta) + (A + C)\text{ſin.}\,(\gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,\beta) = A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,(\delta + \varepsilon)) + E(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin}\,(\alpha + \varepsilon) + (B + D)\text{ſin.}\,(\delta + \varepsilon + \alpha)$$

$$D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,\gamma) = B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \alpha)) + A(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,(\alpha + \beta)) + (C + E)\text{ſin.}\,(\varepsilon + \alpha + \beta)$$

$$E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\delta) = C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,(\alpha + \beta)) + B(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,(\beta + \gamma) + (D + A)\text{ſin.}\,\alpha + \beta + \gamma).$$

Fig. 5. 20. Sint itaque ſex protentiae A, B, C, D, E, F punćto O adplicatae, angulique ab iis comprehenſi α, β, γ, δ, ε, ζ; erit per regulam ſupra §. 18. traditam

$$A\,\text{ſin.}\,\alpha = C\,\text{ſin.}\,\beta + D\,\text{ſin}\,(\beta + \gamma) + E\,\text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta) + F\,\text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$$

$$A\,\text{ſin.}\,\zeta = E\,\text{ſin.}\,\varepsilon + D\,\text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta) + C\,\text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta + \gamma) + B\,\text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)$$

hinc

$$\text{I.}\quad A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\zeta) = D(\text{ſin.}\,(\beta + \gamma) + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta)) + C(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta + \gamma)) + (B + F)\text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta))$$

Eodem modo inueniuntur

$$\text{II.}\quad B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,\alpha) = E(\text{ſin.}\,(\delta + \gamma) + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \zeta)) + D(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,(\delta + \varepsilon + \zeta)) + (A + C)\text{ſin.}\,(\gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)) + F(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta + \gamma))$$

$$\text{III.}\quad C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,\beta) = F(\text{ſin.}\,(\zeta + \alpha) + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \delta)) + E(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,(\varepsilon + \zeta + \alpha)) + (B + D)\text{ſin.}\,(\delta + \varepsilon + \zeta + \alpha) + A(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,(\zeta + \varepsilon + \delta))$$

$$\text{IV.}\quad D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,\gamma) = A(\text{ſin.}\,(\alpha + \beta) + \text{ſin.}\,(\zeta + \varepsilon)) + B(\text{ſin.}\,\beta + \text{ſin.}\,(\alpha + \zeta + \varepsilon)) + (E + C)\text{ſin.}\,(\varepsilon + \zeta + \alpha + \beta) + F(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,(\zeta + \alpha + \beta))$$

$$\text{V.}\quad E(\text{ſin.}\,\varepsilon + \text{ſin.}\,\delta) = B(\text{ſin.}\,(\alpha + \zeta) + \text{ſin.}\,(\beta + \gamma)) + A(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,(\alpha + \beta + \gamma)) + (F + D)\text{ſin.}\,(\zeta + \alpha + \beta + \gamma) + C(\text{ſin.}\,\gamma + \text{ſin.}\,(\beta + \alpha + \zeta))$$

$$\text{VI.}\quad F(\text{ſin.}\,\zeta + \text{ſin.}\,\varepsilon) = C(\text{ſin.}\,(\beta + \alpha) + \text{ſin.}\,(\gamma + \delta)) + B(\text{ſin.}\,\alpha + \text{ſin.}\,(\beta + \gamma + \delta)) + (A + E)\text{ſin.}\,(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + D(\text{ſin.}\,\delta + \text{ſin.}\,(\gamma + \beta + \alpha)).$$

21. Hae ſex aequationes naturam aequilibrii ſex virium A, B, C, D, E, et F puncto O adplicatarum perfecte determinant. Et quouis dato caſu, pro quolibet numero potentiarum, facile inueniuntur, per regulas ſupra traditas. Veritas vero Theorematum, his aequationibus contentorum, ex eo etiam oſtendi poteſt, quod quaelibet harum aequationum euaneſcere debet, hoc eſt: omnes termini ſe deſtruere debent, ſi potentiae et anguli ab illis facti omnes fuerint inter ſe aequales. Sumamus ad hunc ſcopum, vnam ex ſuperiori paragrapho exhibitis ſex aequationibus, veluti VItam.

$$F(\text{ſin.}\,\zeta+\text{ſin.}\,\varepsilon)=C(\text{ſin.}(\beta+\alpha)+\text{ſin.}(\gamma+\delta))+B(\text{ſin.}\,\alpha+\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta))+(A+E)\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+D(\text{ſin.}\,\delta+\text{ſin.}(\gamma+\beta+\alpha)).$$

22. Quia $\alpha+\varbeta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=2\pi$, erit $\gamma+\varbeta+\alpha=2\pi-(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\alpha+\varbeta+\gamma+\delta=2\pi-(\varepsilon+\zeta)$, quare $\text{ſin.}(\gamma+\varbeta+\alpha)=-\text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\zeta)$ et $\text{ſin.}(\alpha+\varbeta+\gamma+\delta)=-\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta)$, quibus ſubſtitutis fiet,

$$F(\text{ſin.}\,\zeta+\text{ſin.}\,\varepsilon)=C(\text{ſin.}(\beta+\alpha)+\text{ſin.}(\gamma+\delta))+B(\text{ſin.}\,\alpha+\text{ſin.}(\beta+\gamma+\delta))-(A+E)\,\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta)+D(\text{ſin.}\,\delta-\text{ſin.}(\delta+\varepsilon+\zeta))$$

Ponatur nunc $A=B=C=D=E=F$ et $\alpha=\varbeta=\gamma=\delta=\varepsilon=\zeta$ et prodibit:

$$2\,\text{ſin.}\,\alpha=2\,\text{ſin.}\,2\alpha+\text{ſin.}\,\alpha+\text{ſin.}\,3\alpha-2\,\text{ſin.}\,2\alpha+\text{ſin.}\,\alpha-\text{ſin.}\,3\alpha$$

vbi omnes termini ſe deſtruunt.

DE

PLANTARVM

ALIQVOT RARIORVM DESCRIPTIONES COMPLETAE. ADIECTAE SVNT DELINEATIONES III.

Auctore

IOH. CHRIST. HEBENSTREIT.

I.

MESSERSCHMIDIA. *Linn.* Hort. Vpſ. p. 36.
ARGVSIA. *Amman.* Stirp. Ruth. p. 29.
TOVRNEFORTIA foliis lanceolatis, floribus corymboſis, caule herbaceo. *Linn.* plant. p. 141. n. 7.

Circa initium Maii planta ex terra prouenit, turionibus copioſis forma capitulorum globoſorum, compactis ex foliolis conuolutis, anguſtis et pubeſcentibus. Incrementum cauliculorum et foliorum, primis, poſtquam ex terra prodiit, diebus, eſt admodum lentum et vix animaduertendum: augentur vero cunctae partes multo euidentius, ſi congelationes nocturnae ceſſant, et pluuia ſolum aliquoties irrigauit. Menſtruo ſpatio vtplurimum exacto, ad iuſtam in ea perueniunt ſingulae partes magnitudinem, et planta, omnibus ſuis partibus exornata, diſquiſitioni eſt aptiſſima. De radicis aetate primum quaedam praemittenda erunt, cum ea multum conferre videatur ad ſingularem illius conditionem diiudicandam. Viuacem admodum eſſe, diuque ſuperſtitem, exinde colligo, quia in adſignato ei loco

in horto per decennium iam creuit, et quotannis craſſitie, turionibus et pluribus gemmis nodoſis augetur, latiusque ſerpit. Aliquot vero annorum ſpatium requiri, antequam ſufficientem copiam ſuccorum colligat, et caules florentes et fructus perficientes proferat, hoc iam adnotauit *Ammanus* in Stirpium rariorum, in Imperio Rutheno ſponte prouenientium, deſcriptionibus, Petropol. 1739. 4. p. 30. III. *Linnaeus* in Hort. Vpſ. p. 36. caules plantae pedales vidit, nullum vero florem vel fructum, exinde etiam hanc ſtirpem genere dubio, *Meſſerſchmidia*, tradere coactus eſt. Eandem denuo in Spec. plantar. p. 141. inter incertas adhuc plantas *Tourneſortiae* generi adſociauit. Mihi itaque ſubnaſcitur ſuſpicio, in horto Vpſalienſi, aetatem iuſtam nondum adſecutam, aeque ac olim hic, flores fructusque ferre recuſare. Fructus, nec apud nos perficit, licet quotannis floreat, et eos promittat. Radix itaque depicta ad exemplar recens, eſt perennis, calami olorini craſſitie, tenax, extus ſpadicea, multis tuberculis ceu tot gemmis in omni ambitu praedita, horizontaliter repens, et copioſis fibrillulis capillaribus ad tubercula, et vbi finitur, inſtructa, intus alba et parum ſuccoſa. Caulis adſcendens eſt firmus, inflexus tamen aliquantum ad terram, inferius rotundus, ſuperius, vbi rami ex alis foliorum exeunt, anguloſus, hiſpidus, foliis copioſis, et ramis ad cacumen vsque, vbi flores collocantur, veſtitus. Folia caulina et ramea ſunt anguſta, lanceolata, integra, tenuibus et copioſis pilis obſita, in auerſa parte ex albido virentia et ſericea quaſi facie, in aduerſa profundius virore perfuſa, neruis

et

et venis aliquot inſtructa, et breui petiolo cauli alternatim adhaerentia. (Per negligentiam pictoris factum eſſe moneo, quod in ſuperficie folii ſuperiori multae venae excurrentes, quae tamen abſunt, delineatae exhibeantur). Singulare quid obſeruaui in incremento foliorum, nempe augmentum horum durare per omnem aeſtatem, et folia, quae primo vere conſpiciuntur, lineari-lanceolata, pubeſcentia, rigida, etiam confertim poſita, ſi caules perfectos conſideras aeſtate cadente, nunc triplo maiora eſſe, viridiora, flaccida et rara, dimenſione etiam ſua vtplurimum conuenientia. Integritatem caules et folia conſeruant ad primum gelicidium vsque, quo, ſi laeduntur tantisper, protinus corrugantur, nigreſcunt, non tamen decidunt, ſed vna cum caulibus pereunt. Rami plures in ſuperiori caulis parte ad alas foliorum oriuntur, alterni, palmares, quibus dein ſuccreſcunt alii in medio et inferiori loco, minores et tenuiores. In ſummitate plantae et ramorum ſuperiorum, pedunculo communi elongato et ſubdiuiſo in aliquot ramos, pedicellis breuiſſimis flores tres quatuorue inſiſtunt ita, vt corymbum quaſi forment. Calyx eſt monophyllus, quinquifidus, laciniis lanceolatis, hiſpidis, conniuentibus, dimidiam tubi partem haud attingentibus. Corolla eſt monopetala, regularis, infundibuliformis, tubo cylindrico in fundo globoſo, limbus quinquifido, ſegmentis ad horizontem directis, ſulco longitudinali excauatis, in ambitu ſinuatis, apicibus extremis deorſum flexis. Color corollae in limbo in vtraque ſuperficie penitus eſt albus, in tubo interius flauus, exterius viridis, et in fundo, vbi calyce tegitur,

tur, flaueſcit. Stamina adſunt quinque in medio tubi, filamenta breuiſſima et antherae ſubulatae erectae flauae; piſtillum ſtaminibus breuius, ſtigmate globoſo ſcabro, quod extremitati globoſae tubi clauis inſtar infixum eſt. Semina adhuc fruſtra exſpectaui. Et ne parte primaria deſtituta prodeat haecce deſcriptio, eam ſupplere in animo habebam Clar. *Meſſerſchmidii* expoſitione, data ab *Ammano* in ſtirpibus rarioribus Ruthenicis. Sed mutanda fuit ſententia, ideo, quia in nonuullis emendanda eſt inuentoris de ſemine huius plantae enucleatio. Forte fortuna inueni in ſeminario horti nonnulla huius plantae ſemina vetuſta, et perſpexi clare, ea eſſe duas capſulas oſſeas, ſubſtantia ſpongioſa exterius veſtitas, ſecundum longitudinem leuiter cohaerentes, quarum quaelibet in parte exteriore conuexa, ſi transuerſim diſſecatur, duos nucleos oblongos, incuruatos, angulatos, in loculamentis ſeparatis includit. Capſulae totius, ex duobus hemiſphaeriis coalitae, figuram, loculamenta, et nucleos, tabula adiecta repraeſentat.

Ex characterum genericorum diuerſitate diiudicandas et denominandas eſſe omnes plantas, ſententia tam certa tamque firma eſt, vt probatione nulla indigeat. Quodſi itaque perluſtramus plantam, et ſingularem fructificationis ſtructuram ab omnibus adhuc cognitis plane diuerſam deprehendimus, neceſſario quoque ei, ad euitandam in diſcernendo ab aliis confuſionem, nouum imponendum erit nomen genericum. Ad haſce autem plantas, charactere ſingulari donatas, referendam eſſe *Meſſerſchmidiam*, omnes iam perſpexerunt, quotquot eam diſquiſiuerunt, nec reliqui refragabuntur, quibus

bus in poſterum occaſio dabitur, eam propius contemplandi. De varia denominatione illius pauca tantum addam. B. *Meſſerſchmidius*, primus inuentor, eam in Xenio Iſidis Sibiricae, quod in tabulario Academiae adſeruatur, a loco natali penes Argunum fluuium, *Arguniam* vocauit. Hoc nomen et deſcriptionem, in loco natali concinnatam, ſtirpibus ſuis Ruthenicis Clar. *Ammanus* inſeruit. Sed neſcio, cur mutata compellatione illam dixerit *Arguſiam*? Optime tamen inſimul monet, poſſe etiam in poſterum vocari *Meſſerſchmidiam* ab indagatore. Ill. *Linnaeus* in Hort. Vpſal. 1748 in 8vo emiſſo, equidem *Meſſerſchmidiae* genus condiderat ex hac noua, de qua ſermo eſt, planta: in ſpeciebus vero plantarum Anno 1753. editis, illam ad *Tournefortiae* genus retulit. Si vero conferimus cum *Meſſerſchmidia* characteres genericos, a *Linnaeo* in generibus plantar. edit. quint. 1754. *Tournefortiae* adſcriptos, cognoſcimus, in quam plurimis, praeſertim in fructificatione, diſcrimen ſane maximum. Praecipuas differentias allegare ideo neceſſarium erit, quia exinde diſcrepantia vtriusque generis comprobabitur. Differt itaque *Meſſerſchmidia* ab eo 1) filamentis, quae non ſunt longitudine tubi corollae, ſed breuiſſimae; 2) ſitu antherarum, quae non in fauce corollae, ſed profundius, et quidem in medio tubi, haerent; 3) ſtylo, qui ſtaminibus eſt breuior; 4) fructu, qui eſt ſiccus, omni pulpa deſtitutus, ex duobus hemiſphaeriis coalitus, quorum ſingulum duo loculamenta diſtincta habet, ſemen vnicum includentia, ſeu nucleos oblongos, angulatos albidosque. Ad memoriam igitur renouandam et conſer-

vandam

vandam viri optimi, *Danielis Gottliebii Meſſerſchmidii*, Gedanenſis, Med. Doctoris, qui ab anno 1719 ad 1727 omnem diligentiam et ſtudium indefeſſum impendit, colligendis et deſcribendis naturae theſauris regni Sibiriae, plantam hanc ab ipſo denominare minime improbandum erit, cum idem honor et aliis exhibeatur, quorum merita in rem botanicam videntur alicuius momenti. Exſpectamus in poſterum, adhibita vlteriori cultura, ſemina matura ab hac planta, quae communicari poterunt cum iis, qui delectantur cultura et propagatione plantarum, nuper detectarum. Vt vero aliquam interea ſibi acquirere poſſint huius vegetabilis ideam, adieci iconem, confectam ad plantam in horto academico florentem, et quam Cel. *Ammanus* olim deſcriptioni ſuae, cum tantum plantas iuniores poſſidebat, addere non potuit. Dum *Ammanianae* deſcriptionis mentionem iniicio, quae bona et completa eſt, ſi fructum excipias, inſimul etiam reprehenſionibus forte nonnullorum, qui me actum egiſſe putabunt, data alia deſcriptione, obuiam ire debeo. Declinare vero has commode potero, rationem adducens non ſpernendam; quia incongruum mihi videbatur emittere iconem ſolam ſine expoſitione aliqua, vel et lectores amandare ad librum, quo forte plures carent, ſi plantam, nunc demum delineatam, inſpiciunt.

Tab. XI.

Explicatio Tabulae I.

A. Planta in naturali magnitudine.

B. Radix repens cum turionibus.

a. Calyx cum piſtillo.

b. Corolla absque calyce.

c. Eadem

c. Eadem tubo diſſecto, vt ſtamina cum piſtillo in conſpectum veniant.
d. Capſula integra.
e. Hemiſphaerium fructus ab interiori facie expoſitum.
f. Fructus integer transuerſim diſſectus, vt quatuor hemiſphaeriorum loculamenta appareant.
g. Hemiſphaerium, ſubſtantia exteriori ſpongioſa orbatum, oſſeum, cum duobus loculis, vt monſtrentur ſemina, ab interiori facie apertis.
h. Semen.

II.

AESCHYNOMENE caule hiſpido, foliolis acuminatis, leguminum articulis ſuborbiculatis. *Royen.* Flor. Leyd. Prodr. p. 384. *Haller.* Hort. Goett. 1753. p. 265. *Linn.* Spec. plant. pag. 713. n. 2.

HEDISARVM caule hirſuto mimoſae foliis alatis, pinnis acutis minimis gramineis. *Sloan.* Iourn. to Iamaica Tom. I. p. 186. tab. 118. fig. 3.

Inter ſemina, ante triennium ex Anglia huc miſſa, reperi Hedyſarum quoddam americanum minus mimoſae foliis Sloan. inſcriptum, quodque ſatum, ſpatio decem dierum elapſo proueniebat, et laeto incremento ſumto, poſt duos menſes flores exhibuit, quos ſequebantur ſemina matura, ſiliqua articulata incluſa. Periit tum planta frigore tacta, quae ex ſtructura ſua, et celeri omnium partium euolutione, videtur annua. Quae de ea notaui, dum vigebat, breui hac expoſitione referam, et commemorationem horum anguſtioribus limitibus circumſcribere potero, quia planta, de qua dicturus ſum, ſuperiori ſaeculo iam inuenta et delineata, et ante aliquot annos denuo ab Ill. *Hallero* in Enumeratio-

ne horti Regii et agri Goetting. 1753. in 8. edito, quoad partes praecipuas, florem nempe et fructum, deſcripta eſt. Deficit vero illius exacta icon: ea enim, quam dedit *Sloaneus* in Hiſt. Iamaic. Vol. I. pag. 186. tab. 118. fig. 3. minime tolerari poteſt, et a Cel. *Royenio* Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. iure mala adpellatur, hinc meliorem, et ad viuam plantam factam, exhibeo. Vegetationis hiſtoriam paucis dilucidabo. Plantulae ex terra prouenientes, perſiſtentibus aliquamdiu cotyledonibus, ex cauliculo, tenui, terete, hiſpido emittunt folia pinnata, ſolitaria, alterna. Si planta pedis altitudinem attigit, in inferiore loco ad latera foliorum emittit ramos procumbentes, in ſuperiori adſurgentes. Exporrigitur tum caulis ad pedes duos et vltra, neque tamen multum volumine augetur: craſſities enim eius vix ad duas lineas pariſinas, vbi maxima eſt, accedit. Rami numero, quo altior fit planta, augentur ita, vt habitu externo fruticulum quaſi, ramis vndique obſitum, repraeſentent. Nunc ad ſingulas partes ſeorſim deſcribendas, progrediendum eſt. Radix eſt vnica, fibroſa, fibrillis albis donata. Caulis adſurgit vnicus, rectus, ruſeſcens, totus hiſpidus, pilis inferius rutilis paucioribus, ſuperius viridibus et copioſioribus, veſtitus, parum lignoſus, teres, emittens plures vndique ramos; ſuperiores adſurgentes, inferiores vero terrae horizontaliter incumbentes. Folia pinnata, foliolis alternis denſe poſitis, et ex parte ſibi quaſi incumbentibus, lanceolatis, acuminatis, in extremitate ciliatis, ſuperficie prona laete viridibus, ſupina glaucis, 25 - 30 paribus, ſeu pinnis. Coſtae adhaerent foliola breuiſſimo petiolo

tiolo ita, vt pars poſterior, oblique quaſi dedolata, appreſſa ſit coſtae, et ſi decidunt, fouea rotunda in coſta, vbi adhaeſerunt, conſpicitur. Folia perfecta figuram equidem habent lanceolatam, coſta tamen ſemper non nihil arcuata, reclinatum ſiſtit folium. Si tanguntur manu, foliola complicantur ad coſtam immotam, ſed tardius, ac in mimoſa ſic dicta pudica, neque facile ante aliquot horas iterum explicantur, hinc etiam difficillimus eſt labor exſiccare ramum, ob celerem collapſum et contractionem partium. Omni veſpere, et dum pluuia cadit, folia quoque complicantur et dependent. Duratio et vigor eorum breuis admodum eſt; hinc caules et rami adultiores foliis fere orbati et denudati apparent, cacumina vero ramorum defluuium, ſuccreſcentibus ſemper aliis, abunde ſupplent. Stipulae ad finem petioli poſitae ſunt ex duabus partibus conſtantes, quarum vna, folio contigua, maior eſt, altera vero, pedunculo communi axillari adſtans, minor deprehenditur. Figuram habent lanceolatam et in ſuperficie externa nonnullas rubicundas venas, quae diſparent paullatim. Pedunculus florum communis, ad latera foliorum poſitus, ſitu parallelo cum iisdem extenditur, his tamen eſt longior, filiformis, piloſus, irregulariter ramoſus, bracteis amplexicaulibus ouato-acuminatis ad ſingulum pediculum florum poſitis, Flos vnicus ſuſtinetur pedunculo proprio, vnciali fere, cincto duobus foliolis ouato-lanceolatis oppoſitis, in ambitu ciliatis, et calyci arcte appreſſis. Calyx eſt monophyllus bipartitus, parte altera poſt vexillum maiore, reflexa, leuiter bifida, in nonnullis ſpeciminibus

integerrima obſeruata, altera carinam ſuſtentante minore, canaliculata, et in extremitate ciliata: tridentatam prout Ill. *Hallerus* eam eſſe indicat, non inueni. Flos eſt papilionaceus: vexillum ſubcordatum, patens, reflexum, luteſcens, (iſabellinus eſt color) venulis rubicundis longitudinalibus et macula aurea rotunda ante vnguem variegatum, alis paullo breuius: alae ex ouato-oblongae, obtuſae, rectae, vexillo longiores et limbo laterali exteriori deflexae, lineae purpureae veſtigio vix apparente in medio: carina alis breuior, dipetala, foliolis lunulatis exterius purpuraſcentibus. Stamina decem in duobus diſtinctis corporibus ad baſin vsque fiſſis, quorum quodlibet in filamentis, altitudine ſucceſſiue decreſcentibus, quinque antheras ſuſtinet, luteas, paruas et rotundas. Stamina cum piſtillo et ſtigmate ſubulato in carina abſcondita latent: ſuccedit legumen inflexum, articulatum, ſcabrum, articulis poſt maturitatem ſolubilibus, numero variantibus: ſemen reniforme vnicum luteo-fuſcum, in quolibet leguminis articulo ſuborbiculato incluſum. Ex datis huc vsque characteribus quilibet cognoſcit, a Cel. *Royenio* ſuo iure noſtram plantam ad genus Aeſchynomenes eſſe relatam, et ab eo in Flor. Leyd. Prodr. pag. 384. denominatam: Aeſchynomene caule hiſpido, foliolis acuminatis, leguminum articulis ſuborbiculatis, quem et ſecuti ſunt Ill. *Hallerus* et *Linnaeus*, retenta Royeni denominatione; iſte in Hort. Goetting. pag. 265, hic vero in Spec. plantar. pag. 713. n. 2. Inuentionis gloria debetur Ill. *Sloaneo*, qui eam in locis meridionalibus inſulae Iamaicae ſponte creſcentem legit, et in catalogo plantarum, quae

quae in inſula Iamaica ſponte proueniunt, Lond. 1696. 8. pag. 74. vocat: Hedyſarum caule hirſuto mimoſae foliis alatis pinnis acutis minimis gramineis. In hiſtoria Iamaicae Vol. I. pag. 186. eam vlterius expoſuit, et iconem quoque dedit, ſine dubio ad exemplar ſiccum concinnatam, quia folia et flores quoad maximam partem deficiunt; hinc Cl. *Royenii* iudicio omnino mala.

Explicatio Tab. II. Tab. XII.

A. Plantae ramus in naturali magnitudine.
a. Flos ab antica facie.
b. Idem a poſtica.
c. Idem a latere expoſitus.
d. Staminum faſciculus.
e. Ouarium.
f. Calyx bilabiatus cum ſtaminibus et legumine foecundo.
g. Legumen maturum.
h. h. h. h. Leguminis articuli, quorum ſingulus ab aliis diſtinctus, vnicum ſemen continet.
i. Semen.

III.

VERBESINA foliis oppoſitis ouato-acutis integerrimis, ſcabris, pedunculorum ſummitatibus incraſſatis et folioſis.

RVDBECKIA foliis oppoſitis hirſutis, ouato-acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis piſtillatis. *Zinn.* Catal. plant. hort. acad. et agri Goetting. p. 409. c. icon.

Radix huius plantae eſt fibroſa, vnica, recta. Ex corpore, pollicem longo, in extremitate obtuſo et quaſi truncato, oriuntur radiculae plures quaqua verſum repentes, tenaces, albentes, in radice euulſa paulo poſt rufeſcentes, fibrillulis pluribus donatae. Superiores

riores radiculae, ex capite radicis et reliquo eius ambitu prouenientes, inferioribus, paullo ante deſcriptis, ſunt tenuiores et numero pauciores. Caulis eſt inferius ſimplex, rectus, duos vel tres pedes altus, inferius glaber et teres, ſuperius molli et tenui lanugine veſtitus, calami olorini craſſitie, hinc verſus ſupremam partem attenuatus, vbi et folia ſibi propius adſtant, quodam modo angulatus, vnico flore, inter ramos exorto, terminatus, et ſibi relictus, inclinatus. Folia radicalia adſunt nulla, ſed tantum caulina et ramea. Haec in parte caulis inferiori, et paullo etiam altiori, ſemper ſunt bina, oppoſita; minora, pauciora et anguſtiora ſuperioribus, quae numero terna, volumine maiora et copioſiora, ouato-acuta, ſeſſilia, ſcabra, pallide viridia, integerrima, in ſuperficie prona venoſa, in ſupina tribus vel quinque neruis prominentibus donata, et ratione ſitus, ſemper deflexa apparent. Ex alis foliorum ſingulis proueniunt rami, foliis eiusdem formae et ſitus, ac in caule, ornati, oppoſiti, erecti primum, poſtea patuli, altitudine inter ſe diſcrepantes. Interdum eo in loco, vbi alias ramus exſurgit, petiolus tantum aliquot linearum, duo vel tria folia proferens, oritur, pro imperfecto ramo habendus. Rami per paria in caule a radice ad dimidiam plantae altitudinem creſcunt, ex aduerſo ſibi oppoſita, numero incerto; in ſuprema vero parte, vbi tria folia caulem ambiunt, ibi etiam tres rami conſpiciuntur, flores citius, ac inferiores rami, exhibentes, quod alias minus ſollemne in floreſcentia, prout etiam illud, quod rami proximi, infra florem, qui caulem terminat, poſiti,

dum

dum increſcunt, hunc altitudine multum ſuperant. Longitudo, ſeu potius altitudo, iſtius partis, quae ex ſquamis rigidis, imbricatis, conſtat, et communiter calyx vocatur, in planta, quam deſcribo, erat nouem lineas pariſinas, licet interdum et in maius volumen excreſcat: figura eius eſt cylindrica, antequam iam nominatae ſquamae a ſe inuicem diſcedunt, et flosculos tubuloſos et lingulatos emittunt; poſtea refert figuram coni inuerſi. Magnitudo earum primum deſcribenda erit, antequam ad ſitum, colorem, ſtructuram, figuram et numerum progrediar. In inferiore parte calycis poſitae ſunt ſquamae duplo minores reliquis, in media et ſuprema parte collocatis; augentur enim volumine ſemper, quo altius adſcendunt, et ſupremarum limbis reclinati flores radiati incumbunt. More imbricum denſe ſibi imponuntur, et quidem ita, vt dimidia pars, imo duae tertiae, vnius ab altera obtegatur. Textura earum fere eſt cartilaginea; nullum enim parenchyma laminas diſtendit, et tantum ſunt membranae laeues, elaſticae et concauae, lineis longitudinalibus nonnullis exaratae. Color, quo nitent, in parte exteriore eſt pallide viridis, punctis nigris quaſi coagmentatis factus, in interiore luteo-virideſcens; in apice ſummo, ſubrotundo et molliori, exterius eſt linea fuſca et profunde viridis. Figuram obuerſe ouatam equidem omnes habent: attamen cum inferiores duas lineas, mediae et ſupremae quatuor et ſex lineas, altae ſunt, facie externa diuerſae non nihil apparent. Ab vnguibus anguſtis ſenſim ampliantur, donec in parte paullo ſupra medium latiſſimae factae, denuo anguſtantur; apex vero eſt ſubrotundus,

tundus, membrana molliori, antea indicata, quaſi coronatus. Numerum foliolorum calycis inſimul adponere, ſuperfluum videri poſſet nonnullis: attamen ideo omittere nolui, quia conſtantem illum eſſe cognovi; in multis enim floribus diſſectis eum ſemper ex 22 et 24 foliolis conſtare comperi. Poſtquam calycem expoſui, tranſeo nunc ad flores. Hi duplicis generis ſunt: alii in radio ſic dicto lingulati et piſtillati tantum, alii in diſco, tubuloſi et hermaphroditi. Radii floſculi in flore, cui nihil ex omnibus ſuis partibus deeſt, duodecim ſemper numerantur, et lingulam ſiſtunt ouatam, in apice crena vna vel altera emarginatam, octo lineas longam, quinque ad ſex latam, nitidam, deflexam, duabus luteis venis ſecundum longitudinem excurrentibus et multis aliis transuerſalibus notatam. Colorem luteum flores iſti habent, ſed ideo prae reliquis huius claſſis notabiles, quia in flore adultiori et ſemina matureſcente perſiſtunt immarceſcibiles, et exiguam alterationem coloris patiuntur. Continuus eſt floſculus iſte lingulatus cum ſemine triquetro, *ſtriato*, cinereo, incuruo, nec vmquam ab eo ſeparatur. Ex meditullio floſculi exit piſtillum vnicum, diuiſum in duas tubas luteas, incuruatas, duas lineas longas. Alterius generis flores, hermaphroditi nempe, poſiti ſunt in thalamo conico paleaceo, lineam craſſo et fungoſo, quorum ii, qui centrum diſci occupant, citius reliquis efflоreſcunt; conſtantes autem ex corolla monopetala tubuloſa, tubo breui in fine globoſo et quodam modo compreſſo, limbo in quinque ſegmenta linearia, extus ferruginea, intus lutea et tomentoſa, diuiſo.

Stamina

Stamina quinque in medio tubi, diſtincta habent filamenta breuiſſima et antheras cylindraceas, tubuloſas, parum inter ſe cohaerentes, licet cylindrum forment. Piſtillum per florem deſcendit ad ſemen vsque, et in extremitate altera, ex tubo exporrecta, diuiditur in duas tubas, prout in lingulatis. Semina inuoluuntur paleis lanceolatis, omnem ambitum illorum vaginae inſtar circumdantibus, in apice prominente colore pullo infectis, et ſunt angulata, anguſta, coronata duobus denticulis ſubulatis, altero breuiori, altero longiori, quamquam nonnunquam alter, vel deficiat, vel vix conſpicuus ſit. Abſoluta nunc partium ſingularum expoſitione, progredior ad conſtituendum characterem genericum, ex florum et ſeminis conditione petendum. Secundum methodum a Cel. *Ludwigio* elaboratam, quam ſequor, pertinebit ad claſſem florum compoſitorum mixtorum, et ſi adtendimus ad reliquas notas characteriſticas, pro conſtitutione generum adſumtas, quales ſunt calyx ſquamoſus, thalamus paleaceus et ſemina anguloſa, ad genus Verbeſinae planta iſta, tamquam ſpecies genuina, referenda eſt. Differentiam ſpecificam in foliorum ſitu oppoſito, et pedunculo florum breui ac incraſſato, tribus foliis conſtanter veſtito, facillime inueniri poſſe credo. Reliquis itaque Verbeſinae ſpeciebus adiungatur nomine ſpecifico: Verbeſina foliis oppoſitis ouato-acutis, integerrimis, ſcabris, pedunculorum ſummitatibus incraſſatis et folioſis. Nondum octennium effluxit, ex quo rarior haec planta ex *Gallia* in Germaniam miſſa, non nullis innotuit. Quantum recordor, Cel. *Bernh. de Iuſſieu* eam ex

America meridionali accepit, et nomine Bidentis ſaponariae folio Lipſienſibus communicauit. In viridario inſtructiſſimo Cel. *Ludwigii* ante aliquot annos primum floruit, et ex illo a me 1755 primum ſemina Petropolin miſſa: tum vero 1757 cum aliis rarioribus cultam et florentem deſcripſi et delineandam curaui. Repetii vero ſationem hoc anno ideo, vt de vegetatione illius, aetate et perduratione in climate boreali certi quid notare valerem. Dum iam confecta eſſet delineatio, et deſcriptio compoſita, offertur mihi Catalogus plantarum horti academici et agri Goettingenſis, conſcriptus a Clar. *Zinnio*, Botan. Prof. Goetting. (Goetting. 1757. 8.), in quo haec Verbeſina ex ſeminibus, Lipſia quoque acceptis, ab auctore catalogi *Rudbeckiae*, tamquam noua ſpecies, adnumeratur, inſcripta: *Rudbeckia* foliis oppoſitis hirſutis ouato-acutis, calyce imbricato cylindrico, radii petalis piſtillatis, et icone illuſtratur, in qua vnicus flos, vna cum ſingulis partibus floris et ſeminis ſiſtitur. Quia vero totus habitus plantae ſingularem quamdam formam prae ſe fert, et rami erecto-patuli, caulem ipſum ſuperantes, venuſtatem ſpecioſam ſtirpi conciliant; non auocari potui a propoſito, quod ceperam, iconem iam confectam, omnem habitum denuo repraeſentantem, hic tradere, quod minime diſplicebit iis, qui plantam nouam, habitu et forma prorſus peculiarem, inſpicere cupiunt, vsque dum vulgatior ſit, quod proxime futurum, cum quotannis copiam ſeminum exhibeat, et non adeo magna cura vbique proueniat.

Expli-

Explicatio Tab. III. T. b. XIII.

A. Plantae natiua magnitudine expoſitae pars ſuperior.

a. Calyx cum diſci floribus.

b. b. b. Squamae calycinae variae magnitudinis.

c. Radii floſculus ab interiori facie cum ſemine triangulo nudo.

d. Diſci floſculus cum palea vaginali ſemen obuoluente.

e. Vagina, ſeu palea eiusdem floſculi.

f. Semen, diſci floſculum ſuſtinens.

g. Diſci floſculus cum ſuo pedicello.

h. Semen diſci bidentatum.

IV.

BRASSICA foliis oualibus, ſubintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. *Linn.* Cent. I. Plant. Vpſ. 1755. n. 54.

Radix annua, caulescens, lignoſa, emittit vndique radiculas plures albas, ſucculentas, fibrillis copioſis inſtructas. Folia radicalia copioſa, quae in capitulum colliguntur, antequam caulis ex radice protruditur, vtplurimum pedem longa, et dimidium lata, oblonga, obuerſe ouata, in margine vndulata et dentata, denticulis apice calloſo inſtructis; ſuperficie prona viridia, rugoſa, glabra, ſupina glauca, laeuia. Neruus folii penitus albus, in baſi vnciam latus, in aduerſa parte laeuis et depreſſus, in auerſa vero exſtans et ſulcatus, ex quo ſecedunt etiam vtrimque plures venae albentes, ſubſtantiam folii perreptantes. Caulis in planta florente et ſemina maturante, circa terram duos pollices craſſus, canaliculatus, glaucus, quaqua verſum plures ramos alternos emittit: ſuperius glaber et quodammodo

anguloſus, tres quatuorue pedes altus. Folia in caule et ramis ſunt ſeſſilia, amplexicaulia, cordato-lanceolata, denticulis minoribus et rarioribus inſtructa, ſuprema vt plurimum integra. Flores in pedunculo communi ante floreſcentiam denſius collecti, vmbellam quaſi ſiſtunt; poſtea vero diſſiti in ſpica elongata ſucceſſiue aperiuntur, prout in reliquis ſiliquoſis ita fieri ſolet: propius pedicellus ſex lineas longus florem ſuſtinet. Calycis foliola ſunt quatuor, ſublutea: duo exteriora baſi gibba et latiora, duo interiora anguſtiora, omnia ſubulata, concaua, canaliculata, erecta, poſt decidua; ſuperant altitudine vngues petalorum, et eminent inter petala, vbi ſtamina breuiora poſita ſunt, hinc etiam petala oppoſitum ſitum, non cruciatum, habent. Petala ſunt ſubrotunda, concaua, in apice vnica crena emarginata, lutea, terminata vngue breui, lato-lanceolato-albido. Glandulae quatuor virides: ſtamina ſex filamentis linearibus teretibus, quorum duo breuiora extrorſum flexa, quatuor altiora erecta, columnam tetragonam formant: his inſiſtunt antherae oblongae, acuminatae, biloculares, extrorſum flexae, ſeu diſtantes, puluerem luteum diſpergentes. Stylus vnicus, ſtigma capitatum minimum. Siliqua biualuis, linearis, lateribus compreſſa, duos pollices longa, nodoſa, propter valuulas tenues, per quas ſemina, in thalamo fungoſo haerentia, tuberculorum inſtar extus conſpiciuntur; ſeptum valuularum prominens dimidium pollicem longum. Semina matura rotunda, ſubfuſca, ſplendentia, guſtu acria. Huius plantae ſemina, vnde ad nos delata ſint, paucis indicare non ſuperfluum erit, praeſertim

tim hanc etiam ob rationem, quia peregrinator quidam, qui Chinam haud ita pridem viſitauit, adſeruit, ac ſi in regno ſinenſi braſſicae et ſinapi ſua ſponte non creſcerent. Huius vero opinionis vanitatem non ſolum indices plantarum antiquiores, qualis eſt immortalis *Boerhauii*, qui in indice altero II. p. 12. Braſſicam ſinenſem folio lactucae, flore luteo, quae forte noſtra eſt ſpecies; et p. 13. Sinapi chinenſe folio acanthi, inter plantas tunc temporis iam notas, enumerat: ſed etiam omnis futura dubitatio plane tolletur, ſi certiores facio curioſos, aeque in China ac in aliis regionibus, braſſicam quamdam eſſe indigenam. Sciant itaque exteri, commercium litterarum Acad. Scient. Petropolitanam diu iam cum R. P. Societ. Ieſu Pekini commorantibus habere, illosque ſubinde ſemina varia inſimul nobis tranmiſiſſe. Talem collectionem ſeminum etiam 1756 per mercatores ruſſicos Pekino Academia Scient. impetrauit. Inter ea faſciculi duo erant, alter Braſſica ſinenſis, alter Caules ſinici maximi, inſigniti. Vtrumque ſemen ſatum, et ex terra prouenìens, protulit vnius eiusdemque ſpeciei plantas, hanc nempe, quam expoſui, braſſicam. Niſi me inſtigaſſet curioſitas et experiendi deſiderium, an differrent etiam characteribus ſpecificis ab huc vsque cognitis braſſicae ſpeciebus indicatae, omiſiſſem forte horum ſeminum ſationem, quia iam ex commercio litterarum anteceſſorum meorum cognoueram, plus vice ſimplici non ea ſolum ſemina transmiſſa eſſe, quae Sinarum regno indigena ſunt, ſed et alia, ex aliis prouinciis ſenſim illata. Simile quid et nunc factum fuiſſe, intel-

lexi perſpicue: adpoſita enim erant alia braſſicarum ſemina, nullo peculiari titulo inſignita, quae dederunt braſſicam ſic dictam oleraceam eiusque varietates omnibus cognitas; hinc colligo, coli plures ibidem pro vſu oeconomico. Sed redeamus ad noſtram. Plantas iuniores, ſi obiter inſpiciuntur, nemo ad braſſicas referret; exacte enim habitum Lactucae ſatiuuae, romanae dictae, referunt. Menſem circiter adultae folia in capitulum colligunt, molle et oblongum; tum breui interiecto temporis ſpatio caulis protruditur, et rami copioſi et patuli excreſcunt. Altero menſe poſt ſationem, ſi tempeſtas coeli fauet, iam flores profert, et quarto menſe exacto ſemina maturantur. Frigus ſeptemtrionale, quod exeunte menſe Auguſto iam ingruit, minime ob texturam mollem et ſuccoſam perferre valet. Si coniectura non inprobabilis locum inuenire poteſt, braſſica forte noſtra, ea ipſa eſt planta, ex cuius ſemine premitur oleum illud, quod Sinenſes adhibent in cibo et lucerna, prout refert *Anonymus*, Suecus, in Oeconomia Sinarum Holm. 1757. 8. plantam, ſcribens, ex qua depromuntur ſemina pro conficiendo oleo, raphano eſſe ſimilem, et florem habere luteum. Experimenta tum capi poterunt, cum ſufficiens copia ſeminum collecta fuerit, neque illa irrita fore praeuideo, cum iam alia ſpecies braſſicae radice cauleſcente fuſiformi, ſeu Napus ſilueſtris, oleum ſuppeditet, ad multos vſus familiare. Antequam vero finio diſſertationem, probandum mihi incumbit, genuinam etiam eſſe ſpeciem braſſicae, eique inſimul imponendum nomen ſpecificum, quo ab aliis ſui generis clare diſtingui poſſit.

Super-

Superfluum vero foret denuo hic enumerare notas characteriſticas, quas pro ſtabiliendo genere Braſſicae adſumſerunt methodorum auctores. Conferantur modo datae a nobis ſuperius deſcriptiones, et notatae in ſingulis partibus conuenientiae, cum genere braſſicae; comprobabit tum, et ſimilitudo, et aequalis fabrica partium, huic, nec alii generi, adnumerandam eſſe in poſterum. Accedit ſententiae noſtrae non leue robur etiam exinde, quod Ill. *Linnaeus* in Centur. Plant. I. Vpſal. 1755. n. 54. adſignauit ei etiam iam locum inter braſſicas. Attulit enim b. *Osbeck*, redux ex China, ſemina, hinc vegetantem, florentem et fructus ferentem diſquiſiuit et denominauit. Retinemus hinc datum ab eo nomen ſpecificum immutatum: Braſſica foliis oualibus, ſubintegerrimis, floralibus amplexicaulibus, lanceolatis, calycibus vnguibus petalorum longioribus. De noua planta vna cum deſcriptione exhibere iconem, omnibus numeris abſolutam, minime ſuperfluum eſſe reor: attamen, ſi adumbratio exacta, ſecundum omnes partes datur, et hic labor omitti poteſt. Curaſſem certo conficí iconem, niſi me auocaſſet a propoſito diuulgatio iam facta plantae alibi. Obſtitit mihi et hoc, cum dubius haerebam, annon icon *Pauli Hermanni*, in Paradiſo batauo pag. 250. data, et quae Sinapi indicum maximum, lactucae folio, ſiſtit, aeque noſtrae plantae, ac Sinapi, conueniat. Quodſi enim cuiquam volupe eſt, conferre datam loco indicato deſcriptionem et iconem cum braſſica hac florente, cognoſcet ſtatim, calycem, florem et fructum omnimodam conuenientiam inter ſe habere, nec meliorem et

accu-

accuratiorem, ſi folia excipias, de nouo fieri poſſe iconem. Sed qua fiducia tu allegas hanc iconem, obiiciet aliquis? Num te latet, illud Sinapi, quod *Hermannus* deſcripſit, et delineatum dedit, a *Boerhauio*, *Linnaeo* et aliis omni tempore ad Sinapi relatum eſſe? Fateor hoc inſolens eſſe, praeſertim ſi deſcriptionem Ill. *Linnaei* de hoc Sinapi in Hort. Vpſ. pag. 191. datam, curatius perpendo, et cum planta hac confero; multa enim indicantur ibi ſigna, quae diſſuadent confundere Sinapi illud cum braſſica: feci illud tantum, ob florem et fructum, braſſicae noſtrae ſimillimum. Quantae difficultates ſeſe obiiciunt ei, qui plantam, quam pro noua habendam eſſe credit, cum denominationibus incompletis et iuſto breuioribus antiquorum conferre ſtudet, ii tantum norunt, qui hunc laborem in ſe ſuſcepere. Quodſi enim adfirmamus, a nemine huc vsque mentionem factam eſſe plantae a nobis diſquiſitae, incumbit nobis inſimul probare, iſta loca, vnde accepimus ſemina, a nullo botanico adhuc eſſe perluſtrata, neque etiam illinc vmquam ad exteros miſſa eſſe ſemina. Poſterius de Sinarum regno non valet. Cum enim commercium exterorum cum Sinis ſat longo abhinc tempore iam inſtitutum ſit, pluresque peregrinatores attulerint inde plantas indigenas, nunc vbique cognitas; non improbabile eſt, et huius plantae ſemina olim eſſe exportata. Huius aſſerti veritatem exinde probari poſſe contendo, quia *Boerhauius* in indice altero II. pag. 12. recenſet Braſſicam ſinenſem lactucae folio, flore luteo. Si nudum illud nomen accipio, prout plantae inditum eſt, quid impedit, quo minus

credam,

credam, eſſe noſtram ſpeciem, cum folia radicalia, prout ſupra monui, habitum lactucae ſatiuae exacte referant.

Occaſione hac opportuna, dum Sinapi ſpeciei mentionem inieci, non incongruum erit, quaedam hic addere de quadam ſpecie, hactenus dubia. Notum enim eſt, in indice *Boerhaauii* pag. 12. inter Sinapi ſpecies haberi etiam aliquam, quam acanthi folio vocat. Citat hoc ſynonymum Ill. *Linnaeus* ad ſpec. 2. Hort. Vpſal. pag. 191; in Speciebus vero iterum omiſit, ſubſtituendo ſolum Sinapi indicum lactucae folio *Hermanni*. Cl. *Zinnius* in Catalogo horti et agri Goettingenſis vtrumque ſynonymum ſimul adducit. In ſeminario horti academici adſeruabatur quoque Sinapi acanthi folio inſignitum, quod ſatum, minime ſpeciem *Linnaei* Spec. plant. n. 4. indicatam dedit, ſed eam potius, quam Ill. *Hallerus* Hort. Goett. pag. 250 retento nomine Sinapi orientale maximum rapi folio *Tourn*. I. R. H., quoad florem et fructum deſcripſit. Folia illud habet pinnata, pinnis tribus irregulariter dentatis, impari maxima; reliqua ex deſcriptione allegata *Halleri* petenda. Eodem tempore ſeueram Sinapi, ex China 1756. acceptum, ideo celebratum apud Sinenſes, prout in capſula adſcriptum legitur, quod „illius radices coctae cum raphani maioris radicibus „crudis commixtae et maceratae per aliquot horas in „vaſe clauſo habeant ſaporem fortiſſimum„ collatis vero vtriusque foliis, floribus et ſiliquis, nempe eius,

quod acanthi folio acceperam, et huius ex China accepti, cognoui, minime differre ſpecie, ſed nomine tantum. Nemo itaque a me exigere poteſt vlteriorem de hac ſpecie relationem, quia eam iam Ill. *Hallerus*, et *Linnaeus* Cent. Plant. I. n. 55. nomine ſpecifico Sinapi ſiliquis retrorſum hiſpidis, apice ſubtetragonis compreſſis, exhibuere.

DE

DE GRADIBVS FRIGORIS SVMMIS, QVOS CERTA FLVIDORVM GENERA FERRE POSSVNT, ANTEQVAM FIANT SOLIDA, IN GLACIEM ABEVNTIA; ATQVE GRADIBVS SVMMIS CALORIS, QVOS ACCIPERE POSSVNT, DONEC BVLLIRE INCIPIANT, ET IN IPSA BVLLITIONE CONTINVATA, DISSERTATIO EXPERIMENTALIS.

Auctore

I. A. B R A V N.

Scalam graduum frigoris et caloris inſignes afferre vtilitates, ad naturam fluidorum pariter atque firmorum corporum, adeo quoque ipſius ignis, melius cognoſcendam, dubio caret. Publicauit primum, quod ſciam, eiusmodi ſcalam graduum caloris et frigoris magnus *Newtonus* in Actis Societatis Regiae Londinenſis menſe Aprili 1701. N. 270. Nomen Auctoris hic quidem additum non legitur, tribuitur tamen illi in Opuſculis, vbi haec ſcala opuſculum XXI conficit Tomi II.

Scalam graduum frigoris perficiendi occaſio procul dubio in locis ſeptentrionalioribus maior eſt, quam in minus ſeptentrionalibus, in primis hiemibus ſaeuioribus. Quum igitur hiemem anni 1757 et 1758 vehementiorem hic Petroburgi experti ſimus, hac oppor-

portunitate vtendum cenſui, variis experimentis inſtituendis ſcalam, frigoris potiſſimum, perficiendi et amplificandi.

Antequam ad ipſa experimenta exponenda progrediar, quaedam de Thermometris praemonenda videntur, quibus in capiendis experimentis vſus ſum. Scala Deliliana a me eſt adhibita, qua etiam in obſeruationibus meteorologicis faciendis vtor, vbi ſcilicet cifra gradum caloris aquae ebullientis, et numerus 150 gradum aquae in glaciem abeuntis, et aquae ſub glacie notat, ſiue niuis regelaſcere incipientis. Nullam enim differentiam vnquam obſeruare potuimus inter gradum niuis regelari incipientis, glaciei recens natae, et aquae ſub glacie, quamuis innumera experimenta in hunc finem inſtituerimus. Hinc quoque non dubitauimus in thermometris noſtris ſaepius Punctum congelationis ope aquae ſub glacie determinare, quia minimo tempore haec methodus indiget, quod commodiſſimum tunc inprimis eſt, quando thermometri puncta fixa paullum loco mota videntur, quod nonnumquam contingere poteſt et ſolet pluribus experimentis inſtitutis.

Non ignoramus quidem quibusdam hanc determinationem puncti congelationis ope aquae ſub glacie dubiam videri poſſe, quia experimenta quaedam probare videntur aquam maiorem frigoris gradum nonnunquam recipere poſſe, quam niuis regelaſcere incipientis, vel glaciei recens genitae.

At enim vero nihil tale obſeruare potuimus, quamuis omni diligentia adhibita in hunc finem experimenta

rimenta ceperimus atque repetierimus plurima. Teximus vitra cera, et aliis operculis ex vitro et ligno, porro varia olea, lini, cannabinum, oliuarum, nucum et eſſentialia aquae ſuperfudimus, in omnibus hiſce experimentis ſub eodem gradu ſcilicet 150 glacies in aqua oriri coepit. In quolibet vitro thermometrum a me immerſum erat. Aqua circa bulbum thermometri congelata retinebat ab initio eundem gradum niuis regelascere incipientis, ſed tota aqua in vitro congelata adſumebat paullatim gradum frigoris aeris ambientis, 170 et 180 etc.

Ratione temporis, quo in diuerſis vitris aqua gelaſcere coepit, omnino differentia mihi eſt notata. Nam primum aqua in vitro aperto eſt gelata, cum nondum veſtigium glaciei, neque in vitris tectis, neque in iis, in quibus oleum aquae innatabat, deprehenderetur, et in his quoque congelatio diuerſo tempore contigit, licet omnis aqua, quum aeri frigido exponeretur, eiusdem fuerit temperiei, quod etiam de oleis ſuperfuſis eſt intelligendum. Non igitur valet conſequentia, hoc vel illud fluidum minori tempore ad congelationem, quam aliud, indiget, ergo ſub minori gradu quoque gelaſcit, quum conditiones eſſe queant, tam reſpectu vaſis, quam naturae fluidi aliaeque, quae efficiant, vt fluidum citius, tardius, temperiem aeris adſumat; hinc quoque in omnibus experimentis noſtris ad tempus non attendimus, intra quod in quolibet fluido congelatio contigit, ſed tantum ad gradum thermometri immerſi.

Punctum fixum alterum more conſueto aqua bulliente eſt determinatum, ſed ſub certa et determinata barometri altitudine ſcilicet 28 poll. pedis regii pariſienſis, quum conſtet thermometra variari, ſi ſub diuerſa barometri altitudine aqua bulliat, cui immerguntur. Ad eandem profunditatem quoque aquae ebullienti ſunt immerſa, nimirum 6 pollicum paris. Bulbus in omnibus thermometris erat ſphaericus, elegimus autem hanc figuram ideo, quod minor portio fluidi explorandi requirebatur, quam ſi formam cylindraceam, aut aliam bulbus haberet. Hydrargyrum erat idem purum, quo thermometra ſunt impleta, et hac ratione thermometra ſatis concordantia obtinuimus, quibus gradus frigoris et caloris fluidorum adcurate explorare potuimus. Pars inferior tubi thermometrici ad duos pollices nuda plane erat, nulli tabulae adfixa, vt eo commodius et adcuratius immergi potuerint in fluida exploranda.

Vti ſolemus non minus termino poſitiuo in adſignando frigore, quam calore ex conſuetudine loquendi, quamuis frigus mera ſit caloris priuatio et diminutio, ita vt caloris gradus minores reſpectu caloris graduum maiorum, gradus frigoris dici poſſint. Ita gradus frigoris 200 ſcalae noſtrae ſatis magnus eſt reſpectu graduum frigoris in regionibus calidioribus, ſed paruus reſpectu maiorum frigoris graduum e. g. 280. 300 etc. quo reſpectu igitur caloris gradus eſt et dici poteſt, vti in terminis et ideis relatiuis, quales et frigoris et caloris ſunt, fieri ſolet. Nullus igitur terminus caloris deſinentis, et frigoris incipientis abſolute indicari poteſt; mere arbitrarium eſt in thermometris frigoris gradus

ab eo caloris gradu numerare incipere, quo aqua in glaciem abire ſolet, quamuis hoc non inconuenienter fieri poteſt. Multo minus caloris augmenta et decrementa vltima, ſeu caloris et frigoris terminos vltimos, adſignari poſſe, per ſe patet. Hinc facile intelligitur, terminum materiae frigorificae nihil poſitiui inuoluere, et inuoluere poſſe. Sunt enim materiae frigorificae ſic dictae nihil aliud niſi materiae calorem aliorum corporum minuentes, vt eſt ſpiritus nitri, vitrioli, ſalis, quin ſpiritus vini glaciei contuſae et niui adfuſa. Item ſalia niui mixta et alia. Neque hae materiae frigefacientes in omnibus corporibus calorem diminuunt, et frigus producunt, vt potius in aliis calorem augeant, et producant, vt idem ſpiritus nitri et alii ſpiritus acidi et vinoſi, qui reſpectu niuis ſunt frigefacientes, reſpectu aquae ſunt calefacientes. Sed haec hactenus; veniendum ad ipſa experimenta eſt. Materiae, circa quas experimenta inſtituimus, fuerunt potiſſimum 1) Solutiones ſalium, 2) Vina et ſpiritus vini, 3) Olea, potiſſimum expreſſa, 4) Metalla quaedam.

Ad ſolutiones ſalium quod attinet, quarum phaenomena primum proponemus, notandum eſt, in omnibus ſolutionibus eandem aquae quantitatem eſſe adhibitam, ſcilicet calycem vitreum, ex quo vinum bibi ſolet, aqua fere plenum.

Calor aquae fere erat gradus 60, quo cera fundi ſolet. Sales ipſi eundem gradum caloris tenebant. Solutio ad punctum ſaturationis facta eſt. Gradus caloris vltimos, quos in ſtatu fluiditatis, et initio firmitatis

mitatis ferre hae ſolutiones potuerunt, notaui, quando ſuperficies aquae ſalſae glacie obduci coepit.

En ipſos frigoris gradus, quos in ſtatu fluiditatis vltimo tulerunt diuerſorum ſalium ſolutiones, ſiue ſub quibus in glaciem abiere.

Solutio ſalis communis in glaciem abiit ſub gradu				182
Solutio ſalis ammoniaci	-	-	-	181
Solutio ſalis digeſtiui Syluii	-	-	-	165
Solutio ſacchari	-	-	-	161
Solutio cinerum clauellatorum	-	-	-	161
Solutio ſalis alcali depurati	-	-	-	160
Solutio ſalis Ebſon.	-	-	-	156
Solutio nitri depurati	-	-	-	155
Solutio ſalis ſedlicenſis	-	-	-	154
Solutio aluminis	-	-	-	153
Solutio vitrioli veneris	-	-	-	152
Solutio vitrioli communis	-	-	-	152
Solutio boracis venetae	-	-	-	152
Solutio ſalis Sibirici	-	-	-	152
Vrina	-	-	-	152
Solutio arcani duplicati	-	-	-	151
Solutio tartari albi	-	-	-	151

Ex comparatione diuerſorum frigoris graduum, ſub quibus diuerſae hae ſalium ſolutiones in glaciem abire coeperunt, adparet, ſolutiones ſalium communis et ammoniaci omnium maximos frigoris gradus ſuſtinere poſſe, antequam ex ſtatu fluiditatis in ſtatum ſoliditatis vel firmitatis tranſeant.

Hinc

Hinc ſi intereſt, tempore hiemis aquam in ſtatu fluiditatis manere, ſale communi in aquam iniecto obtineri potiſſimum poteſt, quum hic ſal maxime congelationem aquae impediat, atque ſal ammoniacus.

Vtrum vero ptoportio a me indicata inter gradus frigoris ſolutiones ſalium congelantes ſemper obtineat, adfirmare non auſim, quum, ſi etiam caetera omnia ſint paria, eorundum ſalium diuerſa bonitas et puritas eſſe poſſit. Non igitur in his et ſequentibus quoque experimentis adcuratio geometrica requiri poteſt, ſed et haec et ſimilia cum latitudine intelligenda eſſe facile conſpicitur.

Differentia graduum frigoris procul dubio pendet vel a maiore ſalis copia, quam diuerſae ſolutiones recipere et continere poſſunt, vel etiam a diuerſa ſalium natura atque textura.

Nam quum eadem aquae quantitas, quam in experimentis noſtris adhibuimus, non eandem ſalis diuerſi copiam ſoluere ſoleat, ſed admodum diuerſam, ſequitur, vt in diuerſis ſolutionibus diuerſa quoque inſit ſalis quantitas. Quantitatem hanc diuerſam ſalium in diuerſis ſolutionibus determinare multis experimentis non infeliciter ſtuduit *Ellerus* in Commentariis Academiae Berolinenſis anni 1750. Iam maior ſalis copia vtplurimum maius quoque impedimentum congelationi obiicere poteſt et ſolet, hinc mirandum non eſt, aquam maiore ſalis copia impraegnatam maiorum quoque frigoris graduum eſſe capacem, magisque congelationi reſiſtere poſſe. Aqua igitur marina circa littora multo facilius congelatur, quam in locis a littoribus remotiori-

bus, quoniam circa littora aqua marina minus ſalſa eſſe ſolet, potiſſimum ob fluminum influxum; hinc nonnulli ſtatuerunt, vltra viginti milliaria ab ora maritima maria non congelari, quod tamen experientiae repugnat. vid. *Muſſchenbroekii* Eſſai de Phyſique § 925. Maiorem ſalis copiam in aqua ſolutam, congelationem quoque magis impedire, illa quoque experimenta demonſtrant, quibus diuerſi generis ſales in eadem aquae quantitate ſoluuntur; conſtat enim eandem aquae quantitatem, ſi vnius generis ſalem non amplius ſoluat, ſoluere tamen alterius generis adhuc poſſe et ſolere. Quae in hunc finem experimenta inſtitui, in poſterum cum aliis huius generis communicabo. Interim diſſimulandum non eſt, deprehendi tamen ſolutiones maiorem ſalis ſoluti copiam continentes, minus tamen aliis, minorem ſalis copiam continentibus, congelationi reſiſtere, quod igitur a diuerſa ſalium natura et ſpeciali textura generatim pendere debet, ſed ſpecialius hoc diſquirere huius loci non eſt., nec inſtituti. Caeterum monendum adhuc eſt, cauendum eſſe, ne ſalium praecipitatio fiat in congelationibus ſolutionum ſalinarum, quod impediui, dum vehementiſſimo frigori eas expoſui, vt congelatio quam breuiſſimo tempore contingeret. Hac ratione obtinui glaciem aequaliter ſalſam, in quantum guſtu percipere potui.

Quas ſalium ſolutiones frigori expoſui, vt congelarentur, easdem igni quoque ſubieci, vt ebullirent, tam ad initium ebullitionis determinandum, quam ad eos gradus caloris definiendos, quos in continuata bullitione adſumerent.

Conſtat

Conſtat gradum caloris aquae bullientis eſſe conſtantem. Conſtantes gradus in ſolutionibus noſtris non eſſe, nec facile eſſe poſſe, haud difficulter praeuidi. Sunt enim fluida maxime heterogenea, quae naturam et texturam durante bullitione non poſſunt non mutare. Variationes tabula ſequens indicabit.

Solutio ſalis communis bullire plene coepit circa 5. infra o. continuata vero ebullitione adſcendit ſupra o ad gr. 20 thermometri mercurius.

Solutio ſalis ammoniaci, vti aqua, bullire coepit circa o. continuata ebullitione attigit gr. 15.

Solutio cinerum clauellatorum iam plene bullire coepit circa gr. 15. infra o.
continuata bullitione peruenit ad gr. 20 ſupra o.

Solutionis ſacchari initium plenae ebullitionis infra o. 2 contigit; in continuata ebullitione ſpiſſior facta notauit grad. ſupra o. 25 thermometrum.

Solutionis ſalis alcali depurati initium bullitionis infra o. 5. continuata bullitione ſupra o. 8. adſcendit mercurius.

Solutio ſalis ſedlicenſis plene bullire coepit infra o. 3; dein ſpiſſior facta adſcendit ſupra o. 15 thermometrum.

Solutio vitrioli communis et veneris plene bullire incepit infra o. 3; et in continuata bullitione fere eundem gradum retinuit, ad 1 enim ſupra o tantum adſcendere viſum eſt thermometrum.

Solutio ſalis Sibirici conſtantem fere gradum quoque in ebullitione retinuit, nam ſupra o. 1 tantum adſcendit thermometrum immerſum.

Solutio aluminis ſupra o. 1 bulliit
Solutio boracis venetae ſupra o. 2.
Arcani duplicati ſolutionis initium o. continuata bullitione, ſupra o. 3. mercurius adſcendit.
Solutio ſalis Ebſon, infra o. 3 coepit, dein ſpiſſior facta ſupra o. 20. thermometrum adſcendit.

Quod ſi hi gradus caloris, quos ſolutiones ſalium indicatae, vel ſub initium ebullitionis, vel in continuata ebullitione, adſumſerunt, inter ſe comparentur; conſpicitur vel circa o, vti aqua ſimplex ſolet, bullire coepiſſe, vel infra cifram, vti pleraeque, adeoque ſub minori gradu, quam aqua ſolet. Et aqua marina ſub multo minore gradu quoque bullire incipere dicitur, ſcilicet ſub 22 infra o. Sed proportio certa et conſtans graduum caloris, quam hae ſolutiones inter ſe ſeruent, ex his ſaltem experimentis erui poſſe non videtur. Videri quidem poſſet ſolutionem, quo plus contineat ſalis, eo ſub minore gradu bullire incipere debere, ſed ex comparatione experimentorum non patet, et diuerſae ſalium naturae ratio hic quoque eſt habenda. Plura igitur hic ſunt experimenta inſtituenda, ad explorandum, vtrum aliqua ratio et proportio forſitan erui poſſit circa initia ſaltim ebullitionis plenae. Caeterum ſolutionem cinerum clauellatorum minimo caloris gradu ad ebullitionem indigere conſpicitur.

Plenae ebullitionis initium poſui, quia aqua quoque conſtantem gradum non nanciſcitur et retinet, niſi omnis aqua plene bulliat.

Ad ebullitionem continuatam quod attinet, facile patet in ea nihil conſtans et perpetuum facile determinari

nari poſſe. Nam quo longius continuatur ebullitio, eo plures vapores aquei abeant in aera neceſſe eſt, eo magis igitur quoque conſiſtentia fluidi mutetur oportet. Continuauimus in noſtris experimentis ebullitionem donec manifeſto ſolutio in quibusdam ſpiſſior facta eſt, in aliis vero donec fere dimidia aqua fuerit euaporata. Quae ſolutiones fere eundem caloris gradum in ebullitione retinuerunt, eas ab aqua communi parum aut nihil omnino hoc reſpectu differre, manifeſtum eſt. Caeterum in eiusmodi experimentis omnia ad punctum determinari non poſſe, ſed cum latitudine quadam eſſe intelligenda, iam ante monuimus, quum et materiae ratione bonitatis differre queant, et vix ſub iisdem circumſtantiis ſemper repeti poſſint.

Haec hactenus de ſolutionibus ſalium, plures in poſterum communicabo, ſed nunc ad alia experimenta progrediendum eſt, ſcilicet ad ea, quae de vinis et ſpiritibus vini cepimus. Vina varia varios frigoris gradus in vltimo fluiditatis et primo firmitatis ſtatu tulerunt, nimirum ſub ſequentibus frigoris gradibus in glaciem tranſiere.

Vinum Hiſp. et illud, quod Sect dicitur, abiit in glac. ſub gr.	167
Vinum Tinto dictum - -	167
Madera Maluaſier - - -	167
Vinum Hungaricum vetus - -	165
Madera vinum - - -	163
Vinum Burgundicum - - -	162
Vinum Florentinum - - -	161
Vinum Roquemor - - -	161
Vinum Margaux - - -	161

Vinum Francicum album vetus	-	-	160
Vinum Campanenſe	-	-	160
Vinum d'Ermitage dictum	-	-	160
Vinum Rhenanum	-	-	159
Vinum Hoogbrion	-	-	159
Cereuiſia anglicana, Ale dicta	-	-	159
Vinum rubrum Francicum	-	-	155
Acetum vini optimum	-	-	155
Cereuiſia ordinaria, vti hic haberi ſolet	-		152

Ad ſpiritus vini quod attinet, ſequentia phaenomena frigori expoſiti monſtrarunt. Spiritus vini rectificatus ſub gradu frigoris 197 nullum congelationis veſtigium oſtendit, multo minus ſpiritus vini rectificatiſſimus. Sed ſpiritus vini gallicus, vti hic vendi ſolet, iam ſub gradu 194 particulas glaciales conſpiciendas praebuit. Spiritus vini Ruſſicus optimus ſub gradu 192 et vulgaris ſub gradu 190 in glaciem abire coepit.

Quod circa ſolutiones ſalium monuimus, id hic quoque valet, ſcilicet haec experimenta adcurationis geometricae non eſſe capacia, ſed cum latitudine quadam eſſe capienda. Quis enim ignorat, vina eiusdem generis, etiam, quae pro optimis haberi ſolent, non eundem ſemper bonitatis gradum habere ſolere? Nos quae potuimus optima nanciſci vina, in experimentis adhibuimus.

Ex comparatione frigoris graduum, quos thermometra in vina immerſa monſtrarunt, dum in glaciem abire coeperunt, manifeſtum eſt, vina dulcia maiores caeteris frigoris gradus ſuſtinere poſſe, donec congelen-

gelentur, quod patet ex experimentis de vino hiſpanico, et ſicco, vel Sect, vino Tinto, Madera Maluaſier et vino hungarico, quod vltimum tamen tantum frigoris gradum in ſtatu fluiditatis vltimo perferre non potuit, quantum quatuor priora, illa enim 167, hoc autem 165 tantum ſuſtinuit. Minimum frigoris gradum tulit vinum rubrum ordinarium francicum, quamuis pro optimo ſui generis haberetur, quo vſus ſum. Vtrum hae proportiones frigoris graduum, quas indicauimus, adcurate ſemper ita in experimentis ſe habiturae ſint, quaeſtio eſt, quam pro certo adfirmari non poſſe quilibet perſpicit, qui tantum conſiderat eundem bonitatis gradum ſemper haec vina habere nec ſolere, nec facile poſſe.

Vina et ſpiritus vini, et generatim fluida ſpirituoſa, procul dubio eo magis congelationi reſiſtunt, adeoque eo maiores frigoris gradus, qua fluida, ferre poſſunt, quo maiorem ſpiritus copiam pro dato volumine continent. Hinc ſequitur, quod eiusmodi experimenta indicia quantitatis ſpiritus in fluidis eiusmodi contenti praebere queant. Quo inſigniores enim frigoris gradus eiusmodi fluida ſpirituoſa, qua fluida, ſuſtinere poſſunt, eo maiorem ſpiritus copiam; quo minores, eo minorem ſpiritus quantitatem continebunt. Salis contenti tamen ratio quoque erit habenda, quem congelationi magis minusque, pro varia eius natura et copia in fluido contenta, reſiſtere, ex ſuperioribus patet, vti quoque ex ſpiritibus ſic dictis acidis elucet, de quorum congelatione in poſterum agam. Argumentum igitur ſemper rite procedet: quo maior ſpiritus copia in dato fluido continetur, eo magis fluidum congelationi reſiſtet, ſed for-

ſitan

ſitan omni exceptione maius argumentum non erit, ſi inuertatur: quo magis congelationi fluidum ſpirituoſum reſiſtit, eo maiorem ſpiritus quantitatem habeat neceſſe eſt, niſi oſtendi dato caſu poteſt, rationem ſalis contenti negligi poſſe.

Porro ex his experimentis intelligi poteſt, quando fluida ſpirituoſa a congelatione libera futura ſint, quando contra conglaciationis periculo expoſita, ſi conſiderentur frigoris gradus, ſub quibus congelari coeperunt. Sed facile conſpicitur, hoc tantum valere poſſe, ſi in ipſo fluido, thermometro immerſo, frigoris gradus exploretur. Nam aer ambiens maiorem ſaepius frigoris gradum diu habere poteſt et ſolet, quam fluidum in vaſe contentum. Aqua ipſa in medio diu fluida manet, quamuis gradus 160 et amplius in aere regnet; quae tamen in media glacie contenta retinet nihilo minus gradum 150, quod et ex ſuperioribus manifeſtum eſt, et alias ſatis conſtat.

Caeterum cautionis adhuc mentio eſt facienda, quam in hiſce experimentis inſtitutis adhibui, et quae in inſtituendis eſt adhibenda. Notum enim eſt, eiusmodi fluida ſpirituoſa, quum ſint heterogenea, in congelatione inſignem pati mutationem, et eadem non permanere, dum partes ſpirituoſae in medio fluido congregantur, et hinc maioris frigoris gradus capaces fiant neceſſe eſt, quin ſolo frigore et congelatione ex vino ſpiritum vini fieri poſſe conſtat. Vt igitur euitetur et euaporatio, et mutatio fluidi, quantum fieri poteſt, haec experimenta tunc demum ſunt capienda, quando

in

in aere atmoſphaerico multo maius frigus regnat, quam fluidum, vt congelaſcat, requirit. Sic enim congelatio breuiſſimo tempore contingit, vti contigit in noſtris experimentis, ita vt ſenſibilem differentiam fluidorum obſeruare non potuerimus, quando particulae glaciales conſpiciendas ſe praebere coeperunt in hiſce fluidis, et nos punctum congelationis notauimus.

Progredimur ad phaenomena exponenda, quae et vina et ſpiritus vini, tam ſub initium ebullitionis, quam in continuata ebullitione monſtrarunt. Nos hic tantum initium plenae ebullitionis notauimus, quia facile adparet in progreſſu ebullitionis fluida eiusmodi ſpirituoſa ob euaporationem perpetuam inſigniorem, inſigniter quoque mutari, ita vt eo propius ad naturam aquae accedant, quo diutius bullitio continuatur.

Hinc ſemper maioris quoque caloris gradus capacia fieri ſolent et debent, donec tandem gradum caloris aquae bullientis attingant ea, quae ſunt minus ſpirituoſa, adeoque ab aqua parum aut nihil omnino amplius differant.

Spiritus vini rectificatiſſimus ſub gradu thermometri noſtri 32 infra o plene bullire coepit, et hic gradus quoque in progreſſu ebullitionis conſtans manſit, vti aquae bullientis.

Spiritus vini gallicus bullire coepit infra o ſub gradu 20, ſed eundem caloris gradum in progreſſu non obtinuit, ſed calor aliquot gradibus auctus eſt, idem quoque dicendum eſt de ſpiritu vini rectificato, qui ſub eodem gradu bullire coepit.

Vina ſub initium bullitionis gradus caloris ſequentes monſtrarunt in thermometro immerſo.

Vinum hiſpanicum plene ebullire coepit notante thermometro noſtro immerſo infra o gradus 15

Vinum Tinto dictum	-	-	-		15
Vinum rhenanum	-	-	-		15
Vinum d'Ermitage	-	-	-	-	15
Vinum Madera	-	-	-	-	15
Madera Maluaſier	-	-	-	-	12
Vinum vetus hungaricum	-	-	-		12
Vinum burgundicum	-	-	-	-	12
Vinum campanenſe	-	-	-	-	12
Vinum gallicum vetus optimum	-	-			12
Vinum Sect dictum	-	-	-	-	10
Cereuiſia anglicana Ale dicta	-	-	-		10
Vinum rubrum ordinarium	-	-	-		3
Acetum vini, vti aqua	-	-	-		0

Quod ſi hi gradus caloris diuerſi, ſub quibus ſpiritus vini et vina ebullire coepere, inter ſe comparentur; adparet primum ſpiritum vini rectificatiſſimum ſub minimo caloris gradu bullire incepiſſe, ſcilicet notante thermometro immerſo 32 infra o. Porro perſpicitur ſolum ſpiritum vini rectificatiſſimum gradum conſtantem in progreſſu ebullitionis retinuiſſe. Ratio huius phaenomeni facile perſpicitur, quum ſpiritus vini rectificatiſſimus fluidum minime heterogeneum omnium, quae tentauimus experimentis, procul dubio ſit, adeoque in ebullitione parum aut nihil omnino mutetur.

Quum

Quum ſpiritus vini rectificatiſſimus minimum caloris gradum ad ebullitionem requirat, ſequi omnino videtur, fluida eo minori caloris gradu ad ebullitionem indigere, quo propius ad naturam ſpiritus vini rectificatiſſimi accedunt, adeoque eo maiorem, quo longius ab ea recedunt. Quo maiorem igitur ſpiritus puri copiam continet fluidum, eo minori ad ebullitionem gradu opus habet, contra eo maiori egebit calore, quo minor ſpiritus copia erit in fluido contenti.

Hinc ex gradibus caloris maioribus ſub initium bullitionis, et minoribus adcurate notatis, de minore et maiore ſpiritus in fluido dato contenti copia quoque iudicari poſſe adparet. Sed non adeo facile eſt, punctum initii bullitionis adcurate notare, nos initium bullitionis tunc demum ſtatuimus, quum tota fluidi ſuperficies ebullire inciperet, haec ratio eſt, cur initium plenae ebullitionis adpellauerimus. Initium autem bullitionis primae ab initio plenae ebullitionis eſſe diſtinguendum, vel ipſa aqua monſtrare poteſt, quae ſemper aliquot gradibus a prima et partiali bullitione ad plenam differt, maior vero haec differentia in vinis mihi eſt obſeruata, ſcilicet 10 graduum et amplius. Quum autem ſtatim poſt initium ebullitionis calor creſcat, difficultas adcurate initium bullitionis obſeruandi ſatis patet. Pondus atmoſphaerae non ſolum in aquam, ſed etiam in reliqua fluida bullientia, influere, atque differentiam quandam producere, me non monente quoque facile perſpicitur. Nos fluida noſtra ſpirituoſa ebullitioni expoſuimus, notante barometro 28 pollices pedis regii pariſienſis, aut quam proxime.

Denique ex comparatione graduum caloris, quos fluida ſpirituoſa in ebullitione adſumere ſolent, iudicari poteſt, vtrum punctum fixum v. g. per ſpiritum vini vulgarem in thermometris ſpiritu vini impletis determinari poſſit. Satis patet nullum ſpiritum vini calorem aquae bullientis adſumere poſſe, quamuis etiam viliſſimus ſit, et certe ille ſpiritus vini, qui gradum caloris aquae ebullientis adſumere in ebullitione poteſt, parum aut nihil omnino ab aqua differat oportet. Solus ſpiritus vini rectificatiſſimus huic ſcopo ſeruire poteſt, quoniam gradus caloris in ebullitione conſtans eſt.

Sed ſatis pro ſcopo praeſenti de ſpiritibus vinoſis et vinis, ad olea veniendum eſt, quae frigore et calore nobis quoque ſunt explorata.

Olea quum ſucceſſiue frigore ſpiſſiora fiant, donec in maſſam firmam et duram abeant; punctum congelationis eodem modo, ac in praecedentibus fluidis, determinari non potuit. Nam in antecedentibus fluidis congelationis punctum definiuimus, quando fluidum frigori expoſitum, vel glacie obduci incipiebat, vel particulae glaciales adparebant, vt in ſpiritibus vini fieri ſolet; in oleis methodus paullum mutanda erat. Immerſimus ſcilicet thermometrum oleis, vti antecedentibus fluidis, et attendimus ad gradum frigoris thermometri immerſi, quando fluiditatem omnem non ſolum amiſit oleum, ſed ita durum fieri coepit, vt cera, calori non expoſita, eſſe ſolet. Gradus frigoris, ſub quibus in diuerſis oleis hoc factum eſt, fuere ſequentes.

Oleum

Oleum oliuarum in maſſam firmam abiit ſub gradu frigoris, quem thermometrum immerſum notabat, 165.

Oleum nucum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis tranſiit, thermometro immerſo monſtrante gradum frigoris 171.

Oleum lini in glaciem abiit ſub gradu 197.

Oleum cannabinum ſub eodem gradu 197 corpus firmum ex fluido factum eſt.

Explorauimus praeterea alia adhuc olea, tam expreſſa, quam deſtillata, ſeu eſſentialia, quae alii tempori ſeruamus, pluribus circa ea experimentis inſtitutis.

Ex comparatione diuerſorum frigoris graduum, quibus olea recenſita congelarunt, patet, oleum oliuarum minimum frigoris gradum requirere, vt ex fluido fiat ſolidum et firmum corpus, quum iam ſub gradu 165 durum factum ſit; contra oleum lini, quocum cannabinum conuenit, maximum frigoris gradum, quum demum ſub gradu 197 in glaciem abierit.

Olea frigore firma corpora facta veram et proprie dictam glaciem eſſe, nemo, opinor, dubitabit, qui conſiderat, aquam fieri glaciem, dum ex ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis ſolo frigore tranſit. Omnia igitur corpora firma, quae ſolo frigore generantur, glaciem veri nominis eſſe et dici proprie poſſe, dubitari non poteſt, vt cera dura, vitrum, quin ipſa metalla, quum aqua nil aliud ſit, quam fuſa glacies.

Oleum lini frigore non indurari, ad hoc vsque tempus, quod ſciam, exiſtimatum eſt. Quum in diuerſis regionibus diuerſi frigoris gradus regnent; miran-

dum non eſt, fluida eſſe in hac vel illa regione incongelabilia, quae tamen in altera, vbi maiores frigoris gradus obſeruari ſolent, congelari ſolent. Reſpectiue igitur ſemper intelligendum eſſe, reſpectu ſcilicet loci et temporis, quando fluida quaedam incongelabilia pronunciata ſunt, et pronunciari ſolent, per ſe patet. Habent igitur regiones borealiores praerogatiuam inſignem in capiendis experimentis ad frigus pertinentibus, prae aliis minus borealibus.

Ex dictis porro intelligitur, quid de thermometris oleo lini repletis ſit ſentiendum. Nam quum iam ſub frigoris gradu 197 in maſſam duram abire ſoleat oleum lini; thermometrum oleo lini repletum ad inſigniores gradus frigoris obſeruandos eſſe ineptum, facile conſpicitur, neque contractio et dilatatio proportionalis in maioribus frigoris gradibus obtinere videtur, dum ſenſim ſenſimque ſpiſſius fit, quam vt gradus frigoris adcurate indicare poſſe videatur.

Olea frigori et congelationi magis minusque reſiſtere, non aliunde, niſi a diuerſa eorum puritate eſſe omnino videtur. Conſtat olea eſſe corpora mixta et heterogenea, continere particulas terrenas, ſalinas et portionem aquae maiorem minoremque. Quo igitur oleum erit purius, eo magis quoque congelationi reſiſtere poſſe cenſendum erit. Olea igitur deſtillata, quae et aetherea, et eſſentialia, adpellari ſolent, quum ab expreſſis non niſi puritate et ſubtilitate differant; frigori et congelationi magis reſiſtere debere, quam expreſſa, facile generatim iudicari poteſt. Et ſpiritus vini quid aliud ſunt, quam olea ſubtiliora et puriora?

Eadem

Eadem haec olea expreſſa ad ebullitionem perduximus, ad explorandum, ſub quo caloris gradu bullire inciperent, et vtrum conſtantem, an inconſtantem caloris gradum in continuata ebullitione thermometrum mercuriale immerſum monſtraret. Phaenomena nominatim in oleo nucum ſequentia obſeruauimus. Fumum iam emittere coepit, thermometro immerſo monſtrante gradum caloris 160, ſiue calorem aquae bullientis. 2) circa gradum 360 ſupra o ſpuma et quaedam partium agitatio circa parietes vaſis eſt conſpecta. 3) non ita multo poſt plena ebullitio coepit. 4) Aliquot minutis ſecundis poſt plenam ebullitionem, mercurius in thermometro immerſo bullire coepit, et continuo oleum flammam quoque concepit, hinc obſeruationes nullae amplius locum habere poterant.

Reliqua quoque olea, vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo poſt, mercurium in thermometro bullientem effecerunt, adeoque obſeruationi finem impoſuerunt. Sub diuerſo quidem caloris gradu ea bullire inceperunt, quam diuerſitatem tamen ob fumos ſpiſſos emiſſos adcurate notare non potui.

Caeterum in ebullitione oleorum probe duplex bullitio eſt diſtinguenda. Prior ebullitio cum ſtrepitu fit, et procul dubio ab admixta aqua eſt, poſterior genuina placida, ſine ſtrepitu, ſecundum noſtras obſeruationes contigit. Patebit hoc euidentius ex ſequentibus experimentis. Primum butyrum purgatum bulliens effecimus. Prior bullitio cum ſtrepitu coepit iam, thermometro immerſo mercuriali 160 ſupra o, calorem ſcilicet aquae bullien-

bullientis monſtrante. Sed non diu durauit, ita vt nullum amplius ebullitionis veſtigium mox adpareret.

Dein lente et placide bullire coepit, quo facto mercurius in thermometro ſtatim bullire coepit: butyrum hoc poſt ebullitionem frigefactum in maſſam duriſſimam inſtar lapidis abiit coloris nigricantis.

Ceram praeterea ad ebullitionem coegimus, phaenomena mihi obſeruata huc redeunt.

1) Cera liquefieri coepit circa gradum 60 infra 0. 2) Spuma cum ſtrepitu circa gradum 25 infra 0 eſt orta. 3) Ceſſauit haec ſpuma et ſtrepitus circa gradum 35 circiter ſupra 0. mox fumus ſpiſſus ſequutus eſt, et 4) paullo poſt vere bullire coepit, quo facto 5) hydrargyrum in thermometro quoque bullire incepit. Flammam cera non concepit, mercurio bullire incipiente.

Ex hiſce phaenomenis recenſitis circa ebullitionem oleorum expreſſorum et corporum oleoſorum patet primum, gradum caloris mercurii bullientis iis generatim tribui poſſe, quia vel in initio plenae ebullitionis, vel paullo poſt, mercurium in thermometro bullientem effecerunt.

Deinde adparet in ebullitione gradum caloris conſtantem non manere, qui vero thermometro mercuriali in continuata ebullitione explorari nequit, quoniam ipſe mercurius ad bullitionem cogitur. Ratio, cur eiusmodi olea gradum caloris conſtantem non retineant, neque retinere poſſint, vel ex eo facile intelligitur, et praeuideri poteſt, quod ſint corpora admodum heterogenea, quae in bullitione conſiſtentiam ſuam et indolem

dolem mutent oportet, vti experimenta quoque docent. In oleo raparum feruente pyrometro ſuo *Muſſchenbroeckius* obſeruauit, calorem illius aequalem fuiſſe 714 gradibus ſcalae *Fahrenheitiane*.

Quum hic gradus multo maior ſit, quam ille, qui mercurio bullienti tribui ſolet, ſcilicet 600. ſcalae *Fahrenheitianae*; operae pretium exiſtimaui, gradnm caloris hydrargyri bullientis de nouo, quam adcuratiſſime fieri poteſt, explorare, vna cum quibusdam aliis metallis, quatenus ſub certo caloris gradu fundi, fluereque incipiunt, atque rurſus firma fieri corpora, et in ſpeciem quandam glaciei abire.

In praeſenti thermometro mercuriali ſequentia corpora metallica explorauimus.

Primum plumbum liquefieri coepit circa gradum 320 ſupra o ſcalae noſtrae, qui conuenit cum gradu 596 ſcalae *Fahrenheitianae*; alias 550 gradus *Fahr.* initio liquefactionis et fuſionis tribui ſolent.

Stannum purum ex ſtatu firmitatis in ſtatum fluiditatis abire coepit, monſtrante thermometro immerſo 170 gradus ſupra o. qui numerus conuenit cum 416 *Fahr.* Tribui ſolet gradus caloris 420 *Fahr.* alias ſtanno fundi incipienti, adeoque differentia parua eſt, vix vllius momenti, quoniam initium fuſionis quam adcuratiſſime adnotari quoque nequit, in progreſſu autem calor continuo inſigniter creſcere incipit.

Bismuthum fundi coepit ſub gradu ſupra o. 235 = 494. *Fahr.* Attribui bismutho liquefieri incipienti alias 470 *Fahr.* ſolent.

Zincum quoque thermometro mercuriali explorare conatus fui, ſed conatus fuit irritus.

Nam mercurius in thermometro prius bullire coepit, quam hoc corpus metallicum liquefieri inciperet. Plura circa metalla tentamina, quae firma in ſtatu ſolito adparent in noſtra tellure, ſimplicia et mixta in poſterum communicabo.

Ex hiſce tentaminibus igitur adparet diuerſitas graduum caloris, ſub quibus metallorum mihi in praeſenti exploratorum ſtatus firmitatis cum ſtatu fluiditatis, et rurſus ſtatus fluiditatis cum ſtatu firmitatis commutari incipit. Quum enim metalla ſub eodem fere gradu caloris ſolida fieri, quo fundi ſolent, incipiant; iidem gradus initii fuſionis et liquefactionis, erunt quoque gradus initii ſoliditatis, vel firmitatis. Nam vti aqua in glaciem abire ſolet ſub gradu 150, ſic rurſus ſub eodem fere gradu regelaſcere et fluidum fieri incipit. Aqua enim et glacies recens genita eundem thermometri gradum habere ſolent.

Metalla igitur firma pro congelatis reputari debent, et hinc pro glaciei ſpecie, quae autem multo minorem frigoris gradum, quam glacies aquae, requirere ſolet. Scilicet ſecundum noſtra obſeruata quam proxime plumbum 320 gr. ſupra 0. ſcalae noſtrae; ſtannum 170 ſupra 0, bismuthum ſupra 0. 235, qui gradus omnes alias inſigniores caloris eſſe ſolent, frigoris tamen reſpectiue dici poſſunt, quatenus metalla dicta congelant.

Hydrargyrum perpetuo adhuc in ſtatu fluiditatis adparuit, nunquam in ſtatu firmitatis. Summi frigoris natu-

naturalis gradus in omnibus regionibus obſeruati e ſtatu fluiditatis in ſtatum firmitatis eum tranſferre non potuerunt.

Habet quidem Academia obſeruationes in Sibiria factas, quae congelationem mercurii indicare videntur, quum tam in thermometris et barometris ſolidus viſus fuerit. Quoniam autem ſub gradibus frigoris multo inſignioribus, in aliis barometris et thermometris mercurius fluidus perſtiterit; non credibile eſt, mercurium fuiſſe tunc temporis congelatum, et forſitan nullus frigoris naturalis gradus illum figere et congelare poterit, forſan frigus artificiale magnum praeſtare hoc poterit. Mercurius igitur fluens aeque ac alia metalla in ſtatu fluiditatis, pro metallo, certo caloris gradu fuſo, habendus videtur, qui vero ſub multo minori caloris gradu, quam reliqua metalla, fundi ſolet, contra maximum frigoris gradum, vt fiat firmus, requirere, caeterum eandem naturam quam reliqua metalla, habere omnino videtur. *

Veniendum tandem eſt ad ebullientis mercurii phaenomena. Monenda hic quaedam prius ſunt de thermometris, quibus gradus caloris mercurii bullientis explorani et explorari debet. Contingere nimirum ſolet, et ſaepius mihi contigit, vt mercurius in thermometro, creſcente calore, et inſigniores gradus 250 et 300 ſupra 0. adquirente, diuidi ſoleat, et non continuus perſtet, quo ipſo obſeruatio vitioſa fiat neceſſe eſt. Vt hoc caueatur, mercurius, quantum fieri poteſt, ab

 omni

* Confirmata haec vide in Diſſertatione mea: De congelatione mercurii a me detecta, praelecta in ſolemni Academiae conuentu Sept. 6, 1760.

omni aere eſt purgandus, et thermometrum ita implendum, vt nullum aeris veſtigium in bulbo thermometri adpareat.

Quae cepimus circa ebullitionem mercurii experimenta adnotata, omnia ita comparata fuere, vt mercurius in thermometro non diuiſus, ſed continuus permanſerit ad terminum ebullitionis, reliqua, tanquam vitioſa, reiecimus experimenta.

Vſi ſumus in his tentaminibus duplici methodo, ordinaria, qua calor bullientis alicuius fluidi immerſo thermometro explorari ſolet, et alia propria, qua thermometrum carbonibus candentibus impoſui, et ita attendi, donec primum ebullitionis ſignum adpareret. In hac methodo poſteriore cautione et attentione non mediocri opus eſt. Cautione, vt calor carbonum candentium iuſto maior non ſit, alias adſcenſus mercurii regularis non fit, et mercurius quoque ob hanc cauſſam interrumpi incipit. Talis igitur calor eſſe debet, vt adſcendat mercurius non nimis celeriter, adeoque, quantum fieri poteſt, lente.

Attentione magna opus eſt, vt primum ebullitionis ſignum notari poſſit, quod conſiſtit in primo ſubſultu mercurii, adeoque prima commotione irregulari. Hic primus ſubſultus circa eundem thermometri gradum adcurate ſemper factus non eſt, termini ſunt inter numeros 414 et 424 ſupra 0.

Quod ſi igitur medium ſumatur inter hos numeros; initium ebullitionis mercurii figi poſſe videtur circa gradum 419 = 715 *Fahr*. Plurima experimenta inſtituimus

ſtituimus in hunc finem hac methodo, et eundem ſemper euentum obſeruauimus.

In altera methodo, qua thermometrum mercuriale mercurio in vaſe aeneo ad ebullitionem perducto immerſimus, differentia quaedam mihi eſt obſeruata. Scilicet hydrargyrum iam bullire in vaſe coepit, quum thermometrum immerſum notaret gradum 395 et 400. Sed in continuata ebullitione in vaſe, paullo poſt mercurius in thermometro quoque ebullire coepit, ſub gradu 414, 420 et 424. Non igitur priores gradus 395 et 400 pro initio plenae ebullitionis mercurii haberi poſſunt, ſed poſteriores, quoniam tunc demum aequalis calor mercurii bullientis in vaſe, et in thermometro immerſo exſiſtere coepit. Nam quum thermometrum mercuriale vnum pollicem circiter ſupra bulbum tantum immerſum eſſet; facile intelligitur, calorem omnem mercurii in vaſe bullientis continuo cum mercurio communicari non potuiſſe. Satis igitur experimenta vtraque methodo inſtituta concordant. Caeterum in repetitione horum experimentorum omnia ad punctum conſentire non poſſe, facile concedet, qui conſiderat differentiam mercurii bonitatis, ponderis atmoſphaerae, forſitan quoque vitri thermometrorum, aliarumque circumſtantiarum, quando experimenta capiuntur. Nos mercurium purum adhibuimus, non quidem reuiuificatum, qui pro puriſſimo haberi ſolet, ſed ita tamen purgatum, vt impuritatis omnis nota abeſſet.

Experimenta ipſa inſtituimus, monſtrante barometro 28 pollices Pariſ. aut quam proxime. Nam pondus atmoſphaerae in calorem mercurii bullientis

aeque influere, ac in calorem bullientis aquae, dubium eſſe nequit.

Vtrum mercurius in ebullitione continuata conſtantem retineat gradum, thermometro *mercuriali* decidi poſſe non videtur, vt ex experimentis nobis captis patet. Nam licet calor mercurii in thermometro ſenſim creverit, continuata in vaſe hydrargyri ebullitione, ita vt videri poſſit, eundem caloris gradum hydrargyrum in vaſe bullientem non retinuiſſe; tamen inde euidenter concludere non licet, calorem mercurii in vaſe bullientis etiam auctum fuiſſe. Nam fieri potuit, vt idem caloris gradus perſiſteret, qui tamen non continuo, ſed ſucceſſiue, cum mercurio in thermometro immerſo communicari potuit.

Hoc igitur phaenomenon, vtrum calor in mercurio bulliente ſit conſtans, an non, aliis inſtrumentis ac thermometris mercurialibus explorandum eſſe facile conſpicitur.

Caeterum ebullitio omnino effectus caloris *particulas* maſſae in vapores diuidentis, et ſubito dilatantis potius videtur, quam dilatationis aeris incluſi, aut alterius fluidi elaſtici in vniuerſo exſpanſi; et vti mercurius ebullitionis eſt capax, ita reliqua metalla ſub certis conditionibus illius quoque eſſe capacia, cum ratione dubitari nequit. Vid. Leçons de Phyſique expérimentale par Mr. *Nollet* Tom. IV. pag. 453.

CAVTE-

CAVTELAE CIRCA OBSERVATIONES METEOROLOGICAS ADHIBENDAE

Auctore

PETRO van MVSCHENBROEK.

Meteora obſeruaturi, ſolemus vti Barometro, Thermometro, Hyetometro, Euaporatorio, Notiometro, Anemometro, et ſi quaedam alia ſint inſtrumenta, quibus ſtatum atmoſphaerae praeſentem, praecedentem aut futurum aliquomodo cognoſcere aut explorare licet. Neceſſe igitur eſt, vt eiusmodi inſtrumentis vtamur maxime perfectis, vt obſeruationibus fidere queamus, atque ex iis probas colligere ſequelas. Memorata inſtrumenta ſunt admodum vulgaria, ſaepius deſcripta, ſed raro tam bona ac perfecta, quemadmodum deſiderantur, ideo obſeruationibus cum iis inſtitutis fidere non licet: operae pretium igitur erit, ea deſcribere, vt omnino perfecta a perito et ſolerti fabrefiant.

Incipiam a Barometro, quo pondus vel preſſum atmoſphaerae aereae inueſtigamus, eiusque augmentum vel decrementum variis temporibus comperimus. Ab experientia edocti ſumus ſimplex Barometrum eſſe praeſtantiſſimum ad obſeruationes certas capiendas et memoriae tradendas. Conſtat id tantum ex tubo vitreo, recto, cylindrico, vltra 30 pollices Rhenolandicos longo, longitudo maior nequaquam nocet, praeſtat tubus

40 pollicum breuiori et tantum 30 poll. Altera huius tubi extremitas in rotundam deſinat fornicem, quae hermetice (vt dici ſolet) clauſa ſit. Altera extremitas ſit aperta, ſed oblique inſtar cunei deſinat, vt cum inſtiterit mercurio, ex cauitate tubi facile mercurius effluere, et ex vaſe in cauum influere poſſit, niſi tubus a fundo vaſis, de quo mox agam, aliquantum diſtiterit, tum enim tubi extremitas plana eſſe poteſt, patulaque eſt mercurio via. Diameter cauitatis tubi ſit ad minimum $\frac{4}{10}$ pollicis Rhenol. maior capacitas non nocet. Craſſior hic tubus vulgaribus eſt; qualiscunque fuerit, menſuranda accurate et memoriae tradenda eſt: nam in tubo amplo mercurius ad maiorem ſubit altitudinem, quam in anguſto, diſcrimen interdum eſt 2 linearum pollicis. Quoniam huc vsque ratio amplitudinis cauae habita non fuit, nec ab obſeruatoribus adnotata, nullis hactenus deſcriptis obſeruationibus barometricis fidere licet. Craſſities vitri vix diſcrimen afferre viſum eſt: notandum etiam eſt genus vitri, tum in qua regione, et in qua officina vitraria tubus factus ſit; vtinam eius vitri ingredientia notare ſimul poſſemus! ſed artifices haec celant; idque cauſa eſt, cur nunquam Philoſophus de vera altitudine mercurii in barometro ſit certior, vitro vno maiorem vim trahentem et repellentem poſſidente altero.

Antequam mercurio impleatur tubus, mundanda et polienda eſt cauitas interna; nam haec in officina vitraria, dum recoquebatur lento refrigerio, contraxit fumum, et ſordes a vitrario inflatas: praeterea ſuperficies aliquantum inaequalis et aſpera eſt; niſi omnis

aſperi-

aſperitas politura tollatur, nunquam accuratiſſime tubus mercurio impleri poteſt: tollitur aſperitas hoc pacto. Capiatur filum ferreum craſſitudinis ac eſt acus textilis, purum, nulla rubigine aut ſordibus infectum, longius tubo, et in capitulum craſſius deſinat vnum extremum; circa extremum hoc conuoluatur puriſſimum cotoneum, idque filo puro albo lineo in duobus locis firme circumligetur, adeo vt medium cotonei, ventris inſtar inflatum, aliquantum difficilius ingrediatur tubi cauitatem; elaſticitas cotonei efficit, vt adimpleat partes anguſtiores et ampliores tubi, et ſuperficies interna abradi polirique poſſit. Tum cotoneum humectetur alcohole vini, et circumſpargatur in rotundum calx ſtanni tenuiſſima, et prius a craſſioribus partibus mundata et lota in aqua; hac calce teratur interna tota tubi capacitas aliquot horis; niſi hoc taedium quis deuorauerit, nunquam opus habebit abſolute perfectum. Peritus in arte videre poteſt a priori vtrum tubus intrinſecus quidem probe laeuigari queat, ſi non, reiſciendus eſt; idem internoſcet, an tubus ſit ſatis laeuigatus et politus. Hoc cognito omnis calx ſtanni eſt ex tubo eluenda, quod tantum ſaepius repetitis fit nouis cotoneis, tandem probe ſicca calce ſtanni, aut alio poliente puluere iniecto, cauitas vlterius ſiccatur et politur; quod ſi aeſtate, coelo ſereno, in ſole nitente tubum caleſeceris et poliueris memorato modo, certior eris cauitatem eſſe omnino ſiccam. Praeſtat tubum in ſole caleſacere, quam prope ignem prunarum, quia hic ſemper fumum eiaculatur, qui aerem inficit. Ideo barometra ſunt aeſtate, coelo ſereno et ſicciſſimo, con-

ficienda, nunquam hyeme, multo minus tempeſtate humida, aeris humore cauum tubi irrepente et ſuperficiei extemplo obhaereſcente.

Deinde eligatur mercurius Tyrolenſis nouus, mundiſſimus, qui in phiala chemica longioris colli infuſus, ſtet in vaſe ferreo cum arena et a ſubditis ignibus ebulliat, vt orbetur omni humore et aere, ideo continuanda eſt ebullitio, donec in phiala nullam bullam inter vitri et mercurii ſuperficiem ſupereſſe videamus; quo viſo committatur refrigeſcere.

Iam aliquis tubus vitreus amplior intrinſecus et extrinſecus probe mundetur ab omnibus ſordibus, tradatur Encauſto, qui ex eo in flamma lampadis liquefacto formet infundibulum cum roſtro capillaris anguſtiae, parum longiori tubo barometrico: formetur tubus capillaris vt intrinſecus nihil fumi conceperit, extrinſecus tamen denuo cotoneo et ſtanni calce eſt abſtergendus, ne quid oleoſi fumi aliarumue ſordium adhaereſcat, inferius tubi orificium ſit adeo anguſtum, vt exigua guttula mercurii lente effluere poſſit.

In inuerſum tubum barometricum immittatur roſtrum capillare vsque ad fornicem: ponatur hic apparatus in ſole, vt incaleſcat ad gradum 70 vel 80, mercurius in phiala paris caloris ſit; qui tum effundatur in infundibulum, lente ex ora inferiori effluxurus. Sollicite curandum, vt infundibulum ſemper multum mercurii capiat, nec vnquam ante tubi plenitudinem euacuetur: ſi enim id contigerit, poſteaque impleretur

denuo

denuo infundibulum mercurio, aer, qui in tubum capillarem vacuum ingreſſus deliteſcit, deorſum preſſus, pelleretur per mercurium, qui aliquousque tubum barometricum iam implet, et hinc inde in eo haereſcens corrumperet omnem exantlatum laborem, adeo vt euacuandus tubus, et omnis impletio ab ouo inchoanda foret. Ex Tubo iam impleto lente extrahatur infundibulum cum roſtro capillari. Prudentia opus eſt, ne frangatur. Tum vero in tubo oritur inanitas, quae affuſo mercurio facile impletur, praecipue ſi breuioris roſtri tubo capillari vtamur. Sed circumſpiciendum eſt, an ibi loci bulla aerea adhaereſcat; haec immiſſo filo ferreo ſurſum tolli poteſt.

Hoc pacto habebitur tubus barometricus perfecte impletus mercurio, et vehementius lucem extrinſecus allabentem reuerberabit, quam vllum ſpeculum vitreum; nec vllibi locorum bullae aereae comparebunt: ne quidem in inuerſo poſtea tubo. Capiatur nunc vas vitreum cylindricum, diametri 6. poll. Rhenol. et 1½ poll. altum, cui infundatur mercurius: eius orae conveniat operculum ligneum, in quodam loco exſciſſum, vt tubum capiat: ſeruit hoc obtegendo mercurio adverſus ſordes in aere natantes: Sublato operculo claudatur extremitas aperta tubi barometrici digito, inuertatur tubus, et extremitas vna cum digito deprimatur ſub ſuperficie mercurii in vaſe, remoto digito effluet mercurius ex parte ſuperiore tubi, donec, quod reſtet, eſt in aequilibrio cum pondere vel preſſu atmoſphaerae.

Vas cylindricum, cui barometrum inſiſtit, tam amplum capiendum eſt, vt mercurius, qui in tubo

varietatem trium pollicum in altitudine ſentit in Belgio, effluens, altitudinem mercurii in vaſe ſenſibiliter non augeat, accuratam obſeruationem turbaturus: poſita igitur diametro cauitatis in tubo $\frac{1}{10}$ poll. et vaſis diametro 6 poll. erit varietas in altitudine mercurii in vaſe tantum $\frac{2}{15}$ lineae, quae propter paruitatem internoſci nequit, adeoque absque vllo ſenſibili errore omittitur, cum in ſummo adſcenſu et deſcenſu mercurii in tubo duntaxat tanta ſit, in omni intermedia altitudine minor, nec vllo modo diſtinguenda.

Totus hic apparatus imponendus aſſeri, ligni probe ſicci, cuius parti inferiori adnexa eſt capſa, quae vas cylindricum concludat; aſſeris pars media excauetur, vt in ea tubus barometricus capiatur vsque ad dimidium craſſitiei; lignum ebenum eſt laudatiſſimum, cum nec calorem, nec frigus, ſentiat, et vix humorem aereum ſorbeat: ſi alio vtamur ligno, neceſſe eſt, vt ab omni parti adlinatur oleum lini aliquoties, a quo pori obturantur. Scala iam affigatur ad latus tubi, et quidem ad vtrumque, in Belgio menſura Rhenolandica vtimur, incipiatque a pollicibus 27 a ſuperficie mercurii in vaſe, et deſinat in 30 pollices. Scalae latitudo loco obſeruatoris reſpondeat; alia enim conuenit locis ſub aequatore, vti regno Peruano; alia locis polaribus.

Oportet, vt quotide aliquoties altitudinem mercurii in barometro obſeruemus; ſufficit id mane, ipſo meridie, et noctu feciſſe, quibusdam ſemel electis pro arbitrio, et deinde ſtatis horis, atque ordine obſeruationes hae ſunt notandae: cum autem atrox coorta eſt tempeſtas, qualibet hora, vel ſemihorio, inſpiciendum eſt barome-

trum,

trum, vt minima cognoſcatur mercurii altitudo durante tempeſtate; quae ſi diligenter memoriae ſint tradita, vt et in aliis adiacentibus regionibus, vel et diſtantibus, latitudo tempeſtatis, limites, progreſſus, directio, et quo in loco maxime ſaeuierit, cognoſcetur.

Notentur quoque celeres adſcenſus vel deſcenſus mercurii in tubo, aut diuturna requies.

Menſe elapſo altitudines mercurii omnes obſeruatae in ſummam addantur, quae diuidatur per numemerum dierum multiplicatum prius in 3, quia tres obſeruationes quotidie ſunt factae, quotiens mediam altitudinem mercurii indicabit; haec ſcribatur inter maximam et minimam altitudinem; quo pacto fere omnia intelliguntur, quae obſeruationes barometricas ſpectant in eo loco, vel vrbe et regione, in quibus factae ſunt; et notata altitudo ſoli ſupra maris ſuperficiem.

Quod ſi verum pondus vel preſſum atmoſphaerae obſeruator in ſua ſede ex barometri altitudine eruere cupiat, ratio caloris etiam eſt habenda. Eſt enim tubus barometricus etiam ſpecies thermometri, mercurio a calore rareſcente, a frigore condenſato, ideo aeſtate mercurius eiusdem ponderis eſt altior in tubo, hyeme humilior. Si hyeme, quando aqua in glaciem verti incipit, mercurius ſteterit in tubo ad altitudinem 29 pollicum Rhen. aeſtate regnante aeſtu 90 grad. paris ponderis ſtabit ad altitudinem 29 poll. $4\frac{4}{10}$ linear. *Amontonſius* in Gallia a maximo frigore ad ſummum aeſtum in coelo regnantem Pariſiis $\frac{1}{115}$ volumine increſcere tradidit in *l'Hiſtoire de l'Acad. Roy. des Sciences An.* 1704, *pag.* 224 *et* 364. Propter aſperitatem ge-

In Petropoli diſcrimen altitudinis maius erit: ſcala accurata eum in finem ſemel eſt condenda.

Quia pes Rhenolandicus cubicus mercurii eſt ponderis Tricaſſini ℔ 859. ℥ 8. ex altitudine mercurii in barometro ſciri poteſt, quo pondere atmoſphaera pedis quadrati ſuperficiem corporum premat, quae in ſolo iacent: lubet hoc in ſequenti Tabula exhibere: pollex diuiſus eſt in 12. lineas.

Altitudo mercurii.		Pondus.		Altitudo mercurii.		Pondus.	
Poll.	Lin.	℔.	Vnc.	Poll	Lin.	℔	Vnc.
27 —	0 —	1933 —	14.	28 —	7 -	2047 -	4½
	1 —	1939 —	13½.		8 -	2053 -	4.
	2 —	1945 —	13.		9 -	2059 -	3½
	3 —	1951 —	12½		10 -	2065 -	3.
	4 —	1957 —	12.		11 -	2071 -	2½
	5 —	1963 —	11½	29 —	0 -	2077 -	2
	6 —	1969 —	11.		1 -	2083 -	1½
	7 —	1975 —	10½.		2 -	2089 -	1.
	8 —	1981 —	10.		3 -	2095 -	½.
	9 —	1987 —	9½.		4 -	2101 -	0
	10 —	1993 —	9		5 -	2106 -	15½
	11 —	1999 —	8½.		6 -	2112 -	15
28 —	0 —	2005 —	8.		7 -	2118 -	14½
	1 —	2011 —	7½		8 -	2124 -	14
	2 —	2017 —	7		9 -	2130 -	13½
	3 —	2023 —	6½.		10 -	2136 -	13
	4 —	2029 —	6		11 -	2142 -	12½
	5 —	2035 —	5½	30 —	0 -	2148 -	0½.
	6 —	2041 —	5.				

Altius in Belgio barometrum non eſt, quam 30 poll. neque infra 27 pol. Rhenol. obſeruatum huc vſque.

Ali-

Aliqui Philoſophi omni induſtria altitudinem barometri obſeruaturi, ex ligno leui, parum lato, ſcalam fabrefecerunt, cuius inferiori extremo affixerunt orbem planum ex ſubere, leuem, diametri 2 vel 3 pollicum, Lignea haec ſcala vix deſcendit in mercurium, ob leuitatem ei innatans; attamen adſcendente mercurio in vaſe, adſcendit ſcala, deſcenditque deſcendente mercurio. Hoc pacto vera altitudo mercurii in tubo videri poteſt, eſtque haec ſatis laudanda methodus, quando inferius vas cum mercurio eſt anguſtius. Scala natans appellata fuit.

Alii diuiſionem Nonnii applicuerunt, diuidentes pollicem in 10 partes aequales, et applicantes ſupra hanc laminam mobilem ope cochleae, diuiſam in 11 partes aequales, quo pacto conuerſione cochleae attollentes vel deprimentes laminam, et attendentes quaenam lineae conuenientes vnam efficiant, pollicis centeſimas partes diſtinguunt.

Oportet, vt obſeruator attendat ad mercurium in tubo, qui tangit ſuperficiem vitri, ſiue vbi ora ſuprema attactus eſt: haec enim ſola pro vltimo limite altitudinis haberi poteſt, reliqua ſuperficies mercurii in tubo rite diſtingui nequit. Hoc incertam facit omnem obſeruationem: nam quando mercurius in tubo incipit deſcendere, ſuperficies ſuperior rotunditatem amittit, planior fit, immoto adhuc annulo, qui vitrum attingit; adeoque axis columnae mercurii primum deſcendit, mox partes, quae ambiunt axin, tum quae ſucceſſiue maiori interuallo ab axe abſunt, iam, ſuperficie ſuprema fere plana, deſcendit mercurius, qui ſuperficiem vitri attingebat. Quando mercurius in tubum

tubum altius adſcendet, axis columnae primum adſcendit, mox partes axi vicinae, eumque in rotundum ambientes, quamuis hae minus in altum ſurgant; ideo ſuprema columnae in tubo ſuperficies fit admodum convexa, mercurio, qui vitrum attingit, adhuc immoto, nec hic adſcendit, niſi conuexitas columnae magna euaſerit, et ad latera defluxerit; leuis concuſſio id accelerat. Prolixior fui in Barometro deſcribendo, quin hoc inſtrumentum transportari ex regione in regionem nequit, ſed oportet, vt concinnetur in loco obſeruatoris.

Alterum inſtrumentum calori et frigori coeli obſeruandis ſeruiens eſt Thermometrum: laudatiſſimum eſt, quod mercurium continet, et fabrefactum eſt a ſolertisſimis Fabris, *G. Fahrenheitio*, aut *H. Prinſio*, Amſtelodamenſibus. Quomodo huiusmodi thermometra conſtruenda ſint, olim prolixe deſcripſi. Ad ea maiori peritia, quam ad barometra, opus eſt, tum vt quis in arte encauſtica verſatus ſit. Poſſunt autem facile et tuto tranſportari ex Amſtelodamo ad quascunque regiones: modo iaceant in capſula ferrea, ſint inuoluta adipi refuſae, prius tamen cincta leuiuscule foeno, vt medium in liquefacta adipe teneant locum. Capſulam clauſam ambierit largum ſtramen, atque apparatus thecae ligneae includatur, quae hoc pacto omnes iniurias carrorum toleret; et poſtea ex capſula ferrea, aquae calenti immiſſa, a qua adeps refunditur, integrum tollitur thermometrum. Oportet, vt ſcala *Fahrenheitii* ad latus thermometri vtrumque ſit adſcripta; ſurſum ad gradus 120 ſupra 0, infra 0 ad gradus 60; ſed haec deorſum longior ſit neceſſe foret, ſi in Sibiria frigus aſperrimum

rimum explorandum eſſet, quale expertus eſt 126 grad. ſub o Nobil. *Gmelinus*. Quoniam Thermometrum ſcalae inſidens iniuriis aeris eſt exponendum, oportet, vt ſcala ſit caelata in lamella aenea, quae ab omni parte bene ſit inaurata. Caeteroquin orichalcum ab aereo ſale intra 20 annorum ſpatium eſt eroſum, imo in nonnullis regionibus ocyus.



Suſpendatur ſub dio, obuerſum plagae ſeptentrionali, ne vnquam directe a ſole, aut a radiis repercuſſis illuſtretur, attamen ſit in loco patente et vmbroſo; vmbroſi enim aeris calor tantum eſt notandus, quia eſt conſtantior illo, qui a ſole communicaretur cum Thermometro, multis varietatibus propter aduolantes recedentesque et abactas nubes ſubiectus. Tum ne hyeme a grandine frangatur, vel a niue refrigeretur, pendeat ex aſſerculo viridi, et ſub tecto ampliori, vti in ſchemate videri poteſt. Quotidie ter iisdem horis notetur calor, quibus Barometri altitudo obſeruata fuit.

Finito menſe graduum, calorem indicantium, numeri in ſummam addantur, quae diuidatur per numerum obſeruationum, ita calor medius eius menſis innoteſcit, ex quo, vtrum hoc menſe coelum calidum, an frigidum, an temperatum fuerit, colligitur: inter maximum et minimum calorem menſis ſcribatur medius calor.

Si menſis hyemalis fuerit et gelet, glaciei craſſities qualibet nocte in aqua ſtagnante vel lacu formatae notetur, tum quanta craſſities currente menſe contige-

 rit;

rit; quando inceperit regelari, quo tempore penitus refuſa ſit glacies; quomodo glacies in flumine fuerit comparata, quo tempore vtramque ripam iunxerit, et reliquerit. Attendatur ad gradum frigoris, quando ſolum pruina correptum fuerit, quando linteum madeſcens ſub dio ſuſpenſum, congelari coeperit: an ſemper gelet ſtante mercurio in gradu 32, an ſemper regelet mercurio maiorem calorem quam 32 gr. indicante? An venti gelu accelerent, minuant, vel retardent, et quinam? An concuſſio aquae in vaſe congelationem acceleret? An aqua congelet aeque cito in vaſis aequalibus, in eodem loco poſitis, ex quacunque materia vaſa fuerint formata? Sed et ad Lunae phaſes attendere oportet, et explorare, an vbiuis terrarum idem, quod in Belgio conſtanter, euenit. Quotiescunque fit nouilunium, prima quadratura, plenilunium, vel vltima quadratura gelante tempore, aſperitas gelu aliquantum remittit, et quidem vel ipſo die phaſium, vel pridie, aut poſtridie, adeo vt nunquam perſtet idem gelu vigor duarum ſeptimanarum decurſu, quamvis poſt vnum alterumue diem recapeſſat vires, aſperiusque quam antea increſcat: contingit etiam vt multo modeſtius pergat, imo fiat regelatio quae totam refundat glaciem. Gelare in Belgio incipit, regnante vento orientali, non cum auſtrali vel occidentali, quamuis in diu durante gelu et hyeme, gelu quidem cum hiſce ventis perſtet.

Quibus horis memoriae traditur Barometri et Thermometri altitudo, iisdem obſeruentur venti: qui ſi ex vexillo in turri non recte ſpectari poſſint, vti

ſaepe ſit, praecipue nocte illuni, aut omnino ſerena et ſine vllis nubibus, tum ſequenti modo notentur: Modo obſeruator in loco patenti, et bene perflabili degat, nec montes, turres, aedes vicinae altiores decurſum ventorum turbauerint, tum excelſiſſima pars tecti eligatur, ex qua emineat vexillum a ventis regendum; affixum ſit firme longae virgae ferreae, qualis ſeruit cortinis, virga tranſeat foramen in tecto, in quo capiatur laxe ab annulo aeneo, qui aperiri claudique ope articuli poſſit, vt in hoc annulo libere ſit verſatilis inſtar axiculi rotae in anſa; inferius virgae extremum fulciatur palo, inſiſtenti pauimento, cui inſidet concauum aeneum excipulum, vnctum oleo, vt lubrica fiat virgae perpendicularis ad ſolum ſitus, verſatio in rotundum; ad arbitrariam diſtantiam ab hoc extremo, ſurſum, ſit affixus tenuis ſtilus, qui index erit, et parallele ad ſolum verſetur circumacta virga; tum ex ligno formetur circulus amplus, per cuius centrum tranſit virga verſatilis, affigaturque tecto vel contabulationi, parum ſupra indicem, ſitque ad ſolum parallelus, vt index circulum percurrendo ventum regnantem deſignet, qui in oculos ſpectatoris, ſurſum tollentis vultum, incurrat. Planities circuli diuidatur in octo partes aequales, quibus nomina octo ventorum inſcribantur; licet eum partiri in plures partes, ſi maiori accuratione ventos notandos iudicauerimus; oportet circulum ita affigere contignationi, vt Septentrio et Auſter apprime congruat cum linea meridiana terreſtri, ab Aſtronomo in eo loco deſcripta: non autem ex di-

directione acus magneticae, cui fidi nunquam poteſt, quia eſt omni momento temporis irrequieta.

Hoc modo noctu et interdiu ventorum plaga obſeruari poteſt: ſed praeterea notandum eſt, an ventus fuerit nullus, lenis, violentior, an ſaeuiat procella? Interdiu hoc vtcunque detegitur ex motu ramorum in arboribus, aut ex velociori motu alarum, quae in molis a vento agitantur, et vel penitus obteguntur velis a molitore, vel interdum duo vela parum obvoluuntur regnante violentiori vento: vel quatuor vela aliquantum conuoluuntur: vel duae alae non obducuntur velo, aliis duabus obtectis: vel nulla vela ſunt expanſa in alis: vento magis ſaeuiente molitor alas firmat et eas ad aduerſam venti plagam circumuertit, ne a vento laedantur; interdiu ſic ſatis ventorum impetus patet diuidendus in partes 8 notandus 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Si molae, quae a ventis agitantur, ibi loci non ſint, tum poteſt dolium aliquot lapidibus oneratum ex fune 20 pedes longo ſuſpendi ex palo cum longe eminenti brachio, qui ſteterit in loco patenti. Ventus in dolium incurrens, id in oſcillationes agitat, eo maiores, quo vi maiori afflauerit, ex minoribus maioribusue oſcillationibus obſeruator breui ventorum impetus diſtinguere diſcit. Caeteroquin in vſum vocari poteſt Anemometrum quale *Nob. Chr. Wolfius* in Elem. Math. deſcripſit, aut ſimile aliquod *Leutmannus* in Tr. de Meteorog. vel in l'Hiſt. de l'Acad. Roy. des Scienc.

Neceſſe

Neceſſe eſt; vt venti velocitas obſeruetur, quantum ſpatii dato tempore percurrat: id huc vsque a nullo Philoſopho praeſtitum eſt ea accuratione, qua opus eſt, quamuis multorum problematum ſolutiones inde pendeant. Ab experientia enim compertum eſt, omnes modos magnis defectibus eſſe ſubiectos, nullisque fidi poſſe.

Praeterea ope inſtrumenti explorandum eſt, an quocunque anno eadem quantitas venti ſupra eundem flet locum, an diſcrepet, tum quantum, et an periodis ſit copiae ventorum aliquo annorum decurſu? Non exiguam in hoc themate nauaui operam, machinam quandam et obſeruationes breui in lucem editurus. Interim ex hiſce intelligitur, quaenam ad obſeruanda meteora adhuc deſiderentur; nullus dubito, quin alii ſolertes Philoſophi animum intenſuri ſint ad omnes defectus ſupplendos.

Magnae vtilitatis eſt Hyetometrum, quo copia pluuiae quotidie labentis menſuratur; hoc inſtrumento itaque detegitur, quantum pluuiae quolibet menſe, quolibet anno in ea regione cadere ſoleat. Ita dies humidiſſimus anni, eiusque menſis humidiſſimus notatur, et multos annos ſecum comparando annus humidiſſimus, ſicciſſimus, mediique humoris ſcitur; quod nouiſſe magni refert, quoniam annorum et menſium fertilitas a pluuia largiori, parcioriue, nonnullis menſibus labente, pendet, tum et aquarum in fluminibus intumeſcentia, et exundationis periculum, aut aggerum fractura praeuidetur, cui in tempore ſuccurri poteſt.

Hyetometrum, Belgicis obſeruationibus idoneum, ſequenti eſt forma: Ex aere fuluo fiat vas quadratum, cuius quodlibet latus ſit vnius pedis Rhenolandici; ſit fundus decliuis tanquam infundibuli, latera quadrata ſint octo pollices alta, vt niuem largius deciduam capiat vas: fundo decliui afferruminatus deorſum ſit tubus aeneus, 8. poll. longus, conicae figurae, vt aliquousque phialae gulam ingrediatur, eamque accurate oppleat, ne illapſa in phialam pluuia euolet ſub vaporis forma.

Capiatur deinde phiala vitrea quadrata, cuius latus planum adamante diuidatur in aliquot partes, quae hoc pacto eruantur: Cognitum eſt pondus pluuiae in pede cubico Rhenolandico ℔ 63. Vnc. 3. drach 7. gran. 9. ponderis Tricaſſini, quo tempore coelum 50 gradibus calet. Hoc pondus diuiſum per 199, dabit quotum, indicantem pondus pluuiae in pede quadrato et altitudine vnius lineae, id proxime eſt 3373 granorum. Vaſculum mundum, in accurata ſtans bilance, capiat hanc quantitatem aquae, quae in phialam infundatur, noteturque in latere altitudo aquae: vel ipſa phiala ſtet in lance, ad ſacoma in aequilibrum redacta, infundaturque aqua, donec 3373 granis euaſerit ponderoſior. Infuſio et adnotatio continuetur donec phiala omnino ſit plena: effuſa aqua adamante non ſcindente, ſed radente, ducatur ad quamlibet diuiſionem in vtroque latere factam, linea recta, et numeri albo pigmento lateri inſcribantur: ampliores huiusmodi phialae 30 diuiſiones capiunt, quae omnes deſignant altitudinem lineae pollicis. Hoc pacto manifeſto videri

poteſt

poteſt quantitas pluuiae, quae pedis quadrati lineae altitudinem facit: imo peritus facile diſcernet partes lineae, qualis accuratio ſufficit. Si quolibet menſe effundatur pluuia ex phiala, nouo menſe fit noua numeratio; ſi currente menſe plus pluuiae ceciderit, in tempore effundatur pluuia, et in annalibus ſigno notetur, effuſam eſſe pluuiam, denuo delapſa addatur numero praecedenti, et humoris decidui copia hoc menſe cognoſcetur.

Hyetometri pars ſuperior aenea emineat ſtylobatae, cui inſiſtit: ſtylobata ſit thecae inſtar caua, lignea, $2\frac{1}{2}$ pedes alta, parte ſuperiori in medio perforata, vt tubus vaſis aenei libere tranſeat, et maxima pars fundi nuda ſit: in cauitate ſtylobatae ponatur phiala, iam diuiſa, quae inſiſtat aſſeri, ſeu potius ſit pauimentum pro altero mobili aſſeri, in priore iacenti, et cui cum inſiſtit phiala, huius gula roſtrum tubi aenei capiat; hoc mobile aſſerculum ſubtus remoueri poteſt, tumque tantundem deſcendit phiala, quantum gulam ingrediebatur tubi roſtrum; deinde phiala depleatur, mox iterum in ventrem ſtylobatae reponenda et aſſerculo fulcienda. Hyeme aqua in phiala congelatur; obſeruato gelu eximatur phiala, et vacua ſeruetur in alio loco aedium, ita tamen, vt quotidie in ea fieri poſſit menſura niuis vel grandinis delapſae et refuſae. Subſtituatur eius loco vaſculum aeneum in ventre ſtylobatae ſub roſtro tubi. Si itaque ningat, vel grandinet, raro tanta niuis labitur copia, quae ſuperat altitudinem 8 poll. qualem pars aenea capit. In ventre ſtylobatae ponatur prope fundum vaſis teſta cum prunis, vt nix re-

fundatur, refuſa excidit ex roſtro tubi in vaſculum aeneum, liquida funditur et menſuratur in phiala vitrea: ſi ningere deſierit, et euaporationem aquae arcere voluerimus, aeneum operculum imponatur Hyetometro, et prunas iniiciamus operculo, quo modo et a prunis ſuperioribus et infra fundum poſitis celeris fit niuis aut grandinis refuſio; et ſimul obſeruari poteſt raritas niuis deciduae, quae in magna altitudine parum aquae ſuppeditat.

Hyetometrum huiusmodi in medio areae patentis, aut ampli horti, vel in excelſo loco, ſed ad quem facilis eſt acceſſus, ponendum eſt, optima in obſeruatorii aſtronomico ſedes eſt: non enim pluuia ſemper recta labitur, ſed a vento variis agitur directionibus: ſiſtitur a turribus, templis, excelſis aedibus, altis arboribus; ideo ſi bina accuratiſſime fabrefacta ſint Hyetometra, quae in variis locis eiusdem vrbis ponantur, pluuiae quantitates non ſemper concordes comperientur.

Si niualis aquae aut pluuiae variis temporibus deciduae grauitatem ſpecificam ſcire cupiamus, attendendum eſt ad calorem aquae ope inmiſſi Thermometri mercurialis, deinde fiat penſio, inmittendo bulbum vitreum ſolidum, pendulum ex filo equino, et ex accurata bilance hydroſtatica, et obſeruando quantum de pondere in aqua amittat: Haec enim methodus eſt omnium accuratiſſima, nec, quantum ſcio, defectibus vel vitiis inquinata, eſtque prolixe deſcripta a Cl. *s'Graveſandio* in Elem. Phyſicae.

Exami-

Examini chemico pluuia, diuerſis menſibus decidua, ſubiiciatur, vt partes componentes, ſalia, olea, terrae etc. innoteſcant, quae omnia ſunt adnotanda: pluuiae enim impuritates multis diſcrepant modis; nec niſi chemica analyſi cognoſcuntur.

Diebus humidis ter quotidie pluuiam notaſſe ſufficit, exinde enim quantum labente menſe ceciderit, conſtat. Neceſſe etiam, vt figurae floccorum niualium et grandinis microſcopio ſpectentur, et delineatae accurate adnotentur.

Notare etiam oportet, quantum aquae quolibet die, menſe, et anno, in vaporem verſae in auras euolet. Hoc inueſtigatur Euaporatorio, ſiue Exatmoſcopio, quod eſt vas ex aere fuluo, cauum, forma parallelepipedi, ſesquipedem altum, cui quodlibet latus orae apertae ſuperius eſt 6 pollicum; ergo 36 pollicum quadratorum eſt apertura. Deinde in regula aenea mobilique inſculpantur pollices 18, vt fundo vaſis inſiſtens apponi interiori lateri poſſit, et exemta ex vaſe appareat altitudo aquae in vaſe. Vaſi infundatur aqua ad altitudinem pedis, ſuperius mane relinquitur, vt capiat pluuiam, nec haec exeat: ponatur prope Hyetometrum in patenti area, vel loco medio horti, aut, quod melius eſt, in obſeruatorio aſtronomico, vt a ſole in rotundum illuſtretur, incaleſcatque in eo aqua, et a vento perfletur. Ex comparata altitudine pluuiae in Hyetometro, et altitudine aquae in Euaporatorio, ſupputatur facile, quantum ſub forma vaporis in ſublime exiuerit. Praeterea fabrefiat craticula ex filis tenui-

bus aeneis, magnis quae diſtant interuallis; haec orae vaſis imponatur, ne auiculae aduolantes aquam potant, quod caeteroquin contingere ſolet: haec ſita nec euaporatione obſunt, nec illabenti pluuiae. In diario itaque notari poteſt, quantum aquae nuctemeri ſpatio in vaporem fuerit conuerſum, quantum ventus et ſolis calor operati fuerint in aquam, ita ventorum ſiccorum operationes intelliguntur; praecipue menſibus aeſtiuis. Diſcrimen obſeruabitur, quando vas minoris maiorisue altitudinis fuerit: ex vaſe enim altiori plus vaporis exſpiratur; ſi vas in loco vmbroſo ſteterit, nec a vento lambatur, multo minus vaporis expellitur. Ideo probe notentur altitudo vaſis, locusque in quo ſteterit. Attamen hyeme in regionibus frigidis hoc vas ſub dio relinquendum non eſt, quia ab aqua in glaciem conſtricta et ſe expandente rumperetur. Tum glaciei euaporatio eſt menſuranda, vt poſtea quantum vaporis toto anno in altum adſcenderit, ſupputetur. Capiatur ex glacie parallelepipedum, pedem altum, cuius quodlibet latus eſt 6 pollicum, quod circiter eſt ℔ 16. Si tanta glaciei moles comparari nequeat, prioris loco ſubſtituatur maſſa quadrata, cuius quodlibet latus 4 pollicum, craſſities ſemipollicis, vel integri pollicis, pro arbitrio et regionis coelique conſtitutione, tantum diligenter notetur, quantae craſſitiei maſſa fuerit; iniiciatur lanci ſtaterae Romanae, cuius ſcapus breuior ex feneſtra emineat: altera longior, in quo aequipondium vagatur, ſit in conclaui, pendeatque ſtatera ex trabe. Omnibus in aequilibrium reductis, notetur pondus, quod quotidie adſcribatur: ſed ſi ningere aut grandinare coeperit, ſta-

tera

tera eſt ſub tecto ponenda; nam flocculi niuales et grandines a ventis appulſae in lancem glaciemque inciderent, nec remedium arcendi hucusque comperi, niſi lanx cum glacie amplo laxoque ſacculo, ex ſerico admodum raro, et ſub forma tecti ſuperius expanſo, tegeretur, ex quo nix et grando facile excuterentur.

Nunc ordo exigit, vt de Notiometro agerem, cuius beneficio conſtaret, an aer ſiccus humidusue ſit, quantum humoris ſub dato volumine caperet, quando dies humidiſſimi, quando ſicciſſimi in anni ſpatio euenerunt: ſed ingenue confiteor, me nec vllum Notiometrum, quod recte huic ſcopo ſatisfaciat, in vllo auctore inueniſſe, nec me aliis hucusque machinis voti compotem factum eſſe. Quisque ſuos deperit foetus, encomiisque extollit, vtinam rigidiori facto examine vitia et defectus ſimul notaſſet. Quaedam ſunt Notiometra, quae noua primis menſibus ab humore aereo bene afficiuntur, ſequentibus menſibus minus, peritque ſemper temporis ſucceſſu mobilitas, nec durante anno valent amplius.

Indicant autem modo maiorem minoremue aeris humorem, minime quantum humoris aeri ſub dato volumine inſit. Praeterea Notiometrum vel ſub dio ponendum eſt, vel in conclaui. Hoc plus minusue perflabile erit, aeremque ſicciorem capiet clauſum, quam apertum; ſub dio etiam in loco perflabili ponendum erit, ſed tum a radiis ſolis non parum turbatur. Hae et aliae difficultates tantae ſunt, vt quorſum me vertam neſcius, potius de Notiometris ſileam, quam longo

ſermone taedium creem. Scribo haec omnia, quae ab experientia poſt inanes impenſas didici.

Interim alia notanda ſunt, quae ad hiſtoriam meteororum ſpectant.

Obſeruetur quibus diebus, horis matutinis, veſpertinis, nocturnis, labatur ros, et quanta copia collecta ſit in corporibus, quibus vſi, in eo capiendo, fuimus; tum in quaenam corpora labatur? An in omnia ex triplici regno, an in quaedam tantum, tum in quae corpora? An ros tantum ex ſolo et aqua in altum adſcendat? An vero et adſcendat, et relabatur? Haec enim omnia differre comperi in variis regionibus, adeo vt ros, veluti omnia alia meteora ſunt ſuis regionibus propria, diſcrepet in quolibet loco.

Obſeruetur an quoque ros melleus cadat, et quibus temporibus? Solet in Belgio cadere in ſolum et aquam, pinguitudine afficere vtrumque, cum ſit tantum oleum, ex foliis arborum ab aeſtu expulſum, aliquantum volatile, ſed igne orbatum ocyus relabitur in terram. Tantum magno regnante aeſtu comperitur, plerumque cadit ante meridiem, et notabili copia: hinc, ſi diuturnus fuerit aeſtus, folia celeriter orbantur oleo, flaueſcunt, et aduentante autumno decidunt, quae aliis annis vltra menſem adhuc perſtitiſſent viridia et in arboribus.

Notandi quoque ſunt dies nebuloſi, quibus horis inceperit aut aduentauerit nebula, quonam tempore claruerit coelum, quot anni diebus regnauerint nebulae, an

an rarae, an denſae fuerint, vt lucem penitus ademerint, quod bis ipſo meridie eueniſſe vidi; an foeteant, an noxiae, vel innocuae fuerint; qualem humorem praebuerint collectae in ſpeculis vitreis, vel patinis porcellaneis, tum quales excitauerint morbos; nam anno 1732 nebulae ex Polonia ortae, aduentantes in Belgium, atroces excitarunt et periculoſas Peripneumonias.

Spectentur ſaepe nubes in coelo ſublimi; notetur, quot ordines diuerſarum altitudinum compareant, quaenam inſiſtant, quaenam moueantur, an ſtrictae a ſole adſcendant, deſcendant, vel eiusdem altitudinis et diſtantiae a ſolo fuerint.

Dies, quibus fulminauerit, et tonuerit, in ea regione notentur; an fulmina noxia, an bruta fuerint? Quasnam intulerint calamitates? Sunt enim regiones, in quibus nunquam fulminat, ſunt in quibus crebra fulmina, ſunt in quibus vehementes ſunt fragores, et plerumque damnoſi; ſunt in quibus rara et fere nunquam aerumnoſa noxiaque ſunt fulmina, nec magnum eſt locorum interuallum, in quibus tanta fulminum diſcrimina eueniunt. Quoties igitur toto anno fulminauerit, aut et fulgurauerit, ſupputetur ſub finem anni.

Notetur numerus procellarum, et quibus diebus tempeſtates furibundae violentaeque fuerint, et quas intulerint rebus humanis iniurias.

Quoties grandinauerit, et quando in granis grandinis aliquid inſolens ſpectatum ſit, quas aerumnas attulerint.

Quoties ninxerit, quantum niuis deciderit, quo die maxima copia, an inſolentis figurae? Notetur, quot dies humidi, ſicci, nubiloſi, praenubili, ſubnubili, ſereni, toto anno fuerint; quot noctes ſerenae, quot nuctemera ſerena.

Quibus noctibus et quoties aurora borea fulſerit, et cum quibus phaenomenis.

Quoties et quando Iris ſolaris lunarisque apparuerit.

An fulſerint coronae circumnectentes Solem, Lunam, Planetas, et quaenam tum coeli conſtitutio fuerit.

An Bolides, vel alia ardentia meteora in coelo fuerint viſa; deſcribatur horum curſus, claritas, magnitudo, fragor, et an calamitatibus affecerint res humanas.

Notandum etiam eſt quolibet menſe vernali, quando arbores, quae ſunt vnius ſpeciei, quando aliarum ſpecierum, quando herbae nonnullae, quae ſingulae ſuis nominibus ſunt appellandae, inceperint protrudere gemmas, emittere folia, flores; quonam tempore folia fuerint perfecta et adoleuerint, quando flores marceſcentes petalis orbabantur, an infeſtati ab inſectis, et a quibusnam? Quomodo gramina et fruges creuerint, ſatae ante hyemem, vel vernali tempore; an aeſtate fruges bene maturuerint, an copioſe collectae, an arborei fructus maturi, ſaporis grati fuerint, an minus arriſerint palato, veluti ſunt ceraſa, pruna, poma, pyra, amygdalae, mori, vuae etc. an laete creuerint legumina, quibus homines veſci ſolent, aut quid nocuerit incremento? an boues, oues, capri, ſues, laete luxurient

luxurient in paſcuis, vt niteant? an morbis infeſtentur et quibusnam?

Notentur quoque ſedulo morbi, qui quolibet menſe homines inuaſerint, morborum decurſus, cauſa, curatio ſimul addatur.

Quando haec omnia accurate et ordine memoriae traduntur, hiſtoria meteororum multum increſcet; ita enim conſtabit, quaenam hyemes ſint modeſtae, quaenam aſperae, earumque periodus; quinam anni fertiles, quinam ſint infertiles, et ita appellandi: non quod omnes ſpecies frugum, fructuum, leguminum, eodem anno laete et magna copia prouenerint, id enim nunquam eueniſſe vidi, ſed quod maxima pars frugum ad vitam neceſſariarum abundanter collecta fuerit.

Nullus dubito, quin poſteritas alia meteora ſit detectura, quorum potior ratio erit habenda, quod ſi in his adnotandis diligentes ſaeculi ſpatio fuerint Philoſophi, magnas vtilitates pro genere humano colligent, et ſcientiam rerum naturalium multum promouebunt: ſi autem, hiſce, vti rebus inutilibus, neglectis, ſocordes euaſerint, et potius ſe exercere in inutilibus ſpeculationibus et hypotheſibus fingendis voluerint, poſt multa molimina et herculeos exantlatos labores, comperient, ſe profeciſſe nihil: ſolae enim obſeruationes, ſola experimenta ſunt verae firmaeque baſes Philoſophiae naturalis.

HALO-

HALONVM
EXTRAORDINARIARVM PETROPOLI VISARVM DESCRIPTIO.

Auctore

F. V. T. AEPINO.

1)

Admodum frequens eſt apud nos halonum ſolarium apparitio, quod colligere exinde facile poterunt lectores, ſi accipiant, annotaſſe me in aduerſariis, inde a die 23. Aprilis 1758, vsque ad diem 20 Septembris, eiusdem anni, viginti ſex halones a me conſpectas, minimum vero duplo plures hoc interuallo a me viſas eſſe, ob ſummam enim phaenomeni frequentiam negligentius iſta annotaui.

2) Circumſtantiae huius phaenomeni apud nos fere conſtanter eaedem ſunt, quae et alibi comitari iſtud ſolent. Apparent nempe halones iſtae, coelo neque penitus ſereno, neque penitus nubibus obſcurato, ſed tenuibus nebulis obducto, quae hebetant quidem ſolaris lucis vigorem, atque peculiari quodam pallore, ab adſueto facile diſtinguendo, ipſius radios inficiunt, non vero omnem ipſis tranſitum denegant. Vnicus, ſub his circumſtantiis, conſpici ſolet circulus, ſolem tanquam centrum cingens, diametrum habens 45 circiter graduum, et latitudinem diametro ſolari proxime aequalem, intus rubens, exterius vero ex albo coeruleſcens,

ſeſcens, areaque a circulo iſto comprehenſa, reliquo coelo obſcurior eſſe ſolet.

3) Rarius occurrit Parheliorum phaenomenon, etſi et hoc apud nos frequentius conſpiciendum ſe praebeat, quam in Germania, aliiſque terrae regionibus auſtralioribus. Vidi hoc phaenomenon anno ſuperiori 1758 quater, die nempe 23 Aprilis, 13 Maii, 19 Auguſti, et menſis Octobris, niſi fallor, d. 15. ſemel autem d. 19 Aprilis huius anni 1759, atque aliqua obſeruaui, quae, vt orbi erudito innoteſcant, admodum digna videntur, vnde exactam eorum deſcriptionem Academiae tradere conſtitui.

4) Die 23 Aprilis, Anni 1758, id, quod Fig. 1. exhibet, conſpiciendum ſe mihi dedit phaenomenon. Solem S, tanquam centrum, cingebant circuli bini. Prior eorum CFED, eiusdem erat diametri et latitudinis, atque ſimiliter coloratus, prouti eſſe ſolent halones ſimplices conſuetae, de quibus §. 1. locutus ſum, aſt id peculiare habebat, quod area elliptica albeſcente, cuius axis maior horizonti parallelus, CGEH, cinctus eſſet. Erat nempe, area quidem CFED, a circulo hoc comprehenſa, reliquo coelo aliquantum obſcurior, aſt ſpatia lunularia CGEFC et CHEDC, arcu elliptico exterius, circulari interius, terminata, viuido albore reſplendeſcebant. Secundi circuli infra Solem non niſi pars quaedam IK, quadrantem non adaequans, videbatur. Erat circuli huius diameter 90 fere graduum, latitudo diametro ſolari circiter aequalis, atque colores prorſus iidem, qui in circulo Soli pro-

Tab. XL. Fig. 1.

propinquiore. Interius nempe rubicundo, exterius ex albo coeruleſcente, colore tinctus erat. Tertius tandem circulus, SLMN, completus erat, totus albeſcebat, perque Solem ipſum tranſiens, horizontali ductu coelum cingebat, atque itidem latitudinem habebat, ſolari diametro proxime aequalem.

5) Conſpectui porro ſe dabant parhelii duo, in annuli horizontalis SLMN, cum perimetro areae ellipticae, CGEH, interſectione ſiti, ad G et H. Vividam ipſi ſpargebant lucem, aſt figuram non habebant rotundam, ſed irregulariter quadrilateram. Verſus Solem rubro colore tincti erant, ex parte vero a Sole averſa, ex coeruleo albeſcentem colorem exhibebant. Coronae horizontalis arcus G*m*, H*n*, parheliis propinqui, vegetiori lumine quam caeterae annuli huius partes reſplendeſcebant, qui tamen ſplendor, recedendo a parheliis, magis magisque languidus euadebat, unde caudarum, horizontaliter exporrectarum, pſeudo-ſoli G atque H annexarum, apparentia oriebatur.

6) Circa halonem intimam, CFED, adhuc ſequentia annotabam.

a) Arcus ipſius ſummus, *pq*, et infimus, *rs*, in verticali AB reperiundi, tantum prae ſe ferebant fulgorem, quem oculus perferre vix poterat. Pro parheliis tamen fulgentes has areas ſumere, oblonga ipſarum figura non permittebat; nullam enim, quoad figuram, cum Solis imagine habebant ſimilitudinem.

β) Li

β) Loca F, D, vbi annulus horizontalis albicans ſecabat halonem CFED, neque parhelios exhibebant, neque vegetiori lumine, quam caeterae halonis partes, praedita erant.

γ) Videbatur mihi aliquoties, aream totam CGEH, ellipſi, intus rubra, exterius coerulea, cinctam eſſe, ob ſummam vero colorum debilitatem, oculis fidem habere pertimeſcebam.

Plura tum temporis, etſi phaenomenon per aliquot horas duraret, circa iſtud annotare non potui.

7) Redibat autem d. 13 Maii idem phaenomenon, quoad quasdam quidem circumſtantias minus completum, quoad praecipuas vero multo diſtinctius, quam iſtud, quod d. 23 Aprilis conſpexeram. Siſtit eius delineationem Fig. 1, ac prorſus ſimile erat antea deſcripto, niſi quod Tab. XII. b Fig. 1.

1) Circulus horizontalis albus SLMN, admodum debilis eſſet,

2) Parhelii, ad G et H ſiti, parum ſplenderent,

3) Secundae halonis, ſolem cingentis, arcus quidam IK, aſt minor, quam in phaenomeno 23 Aprilis, conſpiceretur. Praecipue autem notabile hoc erat, quod

4) Vniuerſa area elliptica halone elliptica, CGEH, cincta eſſet. Erat halonis huius axis maior, ſiue transuerſus, horizonti parallelus, coniugatus vero, ſiue minor, ad horizontem normalis, priorque axis poſteriorem, qui halonis circularis CFED diametro

aequalis, et 45 circiter erat graduum, ſex quaſi gradibus ſuperabat. Caeterum elliptica halo, eandem habebat latitudinem, ac circularis, quam includebat, ſimilique ratione colorata erat, interius nempe rubra, exterius pallide coerulea. Loca *r*E*s*, *p*C*q*, vbi halo elliptica circularem contingebat, ac cum ipſa confundebatur, fulgore vix oculis ferendo reſplendeſcebant, aſt, ob oblongiorem tractuum iſtorum figuram, nullam cum pareliis habebant ſimilitudinem.

Vltra horae ſolidae ſpatium perſiſtebat phaenomenon, quod inter elegantiſſima, quae vnquam conſpexi, numero. Poſt horae vero effluxum, diſſipabantur tenues nebulae aerem replentes, vnde languidum primum euadebat phaenomenon, coeloque penitus ſereno facto, omnino tandem euaneſcebat.

8) Idem phaenomenon d. 19 Auguſti, eiusdem anni denuo obſeruabam. Circa horam nempe 11 et ½ ſolem intuens, conſpiciebam, et ſupra et infra ipſum, arcus aliquos coloratos, aſpectum praebentes talem,
Tab. XII. Fig. 2. qualem ſiſtit Fig. 2. Statim ſuſpicabar, videre me partem phaenomeni, d. 23 Aprilis et 13 Maii conſpecti, et arcum PCQ, FEG, ellipticae, arcum vero RCT, HEI, circularis halonis, eſſe partes. Erat hoc momento aer valde ſerenus, ac vix et ne vix quidem tenues quasdam obſeruare licebat nebulas. Aduehebat autem ventus NW. continuo plures vapores, atque, prouti hi denſi magis fiebant, completum magis euadebat phaenomenon, et antea deſcriptis ſimilius. Circa horam tandem 12 tale fere ſe ſiſtebat, quale exhi-

exhibet Fig. 1. niſi quod annulus horizontalis SLMN, parheliique G, H, admodum debiles eſſent. Quoad caeteras circumſtantias omnes, dimenſiones nempe diametrorum et latitudinum halonum circularium et ellipticae, earumque colores etc. omnino ſimile erat phaenomenon hoc iſti, quod d. 13 Maii conſpexeram. Diſſipatis verſus h. 1. vaporibus, prorſus euaneſcebat.

9) Die tandem 19 Aprilis, anni currentis 1759 denuo initia huius phaenomeni videbam, ita ſe ſiſtentia, qualia ipſa exhibentur in Fig. 2. Exſpectabam, an denuo ſe compleret, aſt fruſtra hac vice, ſereno enim facto coelo phaenomenon euaneſcebat. Tab. XII. Fig. 2.

10) Facile in oculos incurrit, quatuor haec a me recenſita phaenomena omnino vnius eiusdemque fuiſſe generis, neque aliam inter ipſa dari diuerſitatem, quam quae eſt phaenomeni, quod mox magis, mox minus completum, videndum ſe praebet. Cum igitur vnum hoc idemque phaenomenon quater ad minimum, anni ſpatio, apparuerit, pro rariori forte non habendum eſt, neque et hanc ob rationem extraordinarium illud vocaui, ſed eam ſolum ob cauſam, quoniam Phyſicis hactenus omnino fere ignotum eſt.

11) Quos euolui ſcriptores de parheliis atque halonibus, euolui autem plurimos, ſilent fere omnes de phaenomeno, quod hic deſcripſi, neque aliquam areae et halonis ellipticae iniiciunt mentionem. In magno nempe delineationum aut deſcriptionum huiusmodi phaenomenorum numero, non niſi quatuor inuenire potui, quae huc referenda videntur, ac cum meis obſeruatis

 aliquam

aliquam habent ſimilitudinem. Refert primum *Hugenius in Diſſertatione de Coronis et Parheliis*, quae occurrit inter ipſius *Opuſcula poſthuma*, *pag.* 321. 359. *ſqq.* obſeruationem a *Scheinero* anno 1630 *Romae* inſtitutam, vbi dicitur: Solem, S, ambiuiſſe duos circulos excentricos ABDC et AEDF, ſe mutuo in linea verticali GH interſecantes, prouti monſtrat Fig 3. Fatetur *Scheinerus*, non ſatis diſtinctum apparuiſſe phaenomenon, vnde inducor, vt ſuſpicer, idem ac ego, at ſubobſcure, vidiſſe *Scheinerum*. Ab Ellipſeos enim circulum cingentis apparentia, parum abludit, quae producitur ex duorum circulorum interſectione figura. Deinde in *Tranſactionum Anglicanarum Num.* 13. *pag.* 219. *ſqq.* inuenio, ex *Diario eruditorum* (*Iournal des Sçavans*) *ad annum* 1666 deſumtam, quatuor parheliorum delineationem, et deſcriptionem, ſequentibus verbis conceptam: *The 9th of April, of this preſent Year, - - there appear'd three Circles in the Sky. One of them was very great, a little interrupted, and white every where. - - - It paſſed through the midſt of the Sun's Disk, and was parallel tho the Horizon. - - - The ſecond was much leſſ, and defective in ſome places, having the Colours of a Rainbow. - - - It had the true Sun for its Center. The third was leſſ, than the firſt, but greater than the ſecond. It was not entire, but only an Arch, or Portion of a Circle, whoſe Center was far diſtant from that of the Sun, and whoſe Circumference did, by its middle, joyn to that of the leaſt Circle, interſecting the greateſt Circle by its two extreams. In this Circle were diſcerned alſo the Colours*

Tab. XII. b Fig 3.

of

of a Rainbow. - - - At the place, where the Circumference of this third Circle did cloſe with that of the ſecond, there was a great brightneſs of Rainbow Colours, mixt together: And at the two extremities, where this ſecond Circle interſected the firſt, appear'd two Parhelia's, or Mock ſuns; - - - This Appearance is look'd upon, as one of the notableſt, that can be ſeen, by reaſon of the Excentricity of the third Circle, and becauſe, that the Parhelia were not in the Interſection of the ſecond Circle, with the great Circle, but in that of the third Circle. Quodſi vero deſcriptio haec cum Figura mea 2 confèratur, luculenter patet, de eodem ipſam loqui phaenomeno, quod ego quater vidi, modo quod in Gallia non integra viſa fuerit halo elliptica CGEH, ſed inferius ſolummodo, quaſi ipſius dimidium GEH.

122) Tertium, quod huc ſpectare videtur exemplum, idem, quem ſupra iam citaui, *Hugenius* ſuppeditat, *loc. cit. pag.* 348. 349. Viſa nempe eſt, *Pariſiis* in Bibliotheca regia, d. 12. Maii, A. 1667, *Corona circa ſolem, cuius diameter inuenta eſt 44 gradum, et latitudo limbi eius ½ gradus praeterpropter. - - - Apparuit praeterea pars quaedam maioris circuli, qui ſuperiorem coronae partem tangebat, et cuius extrema verſus inferiora vergebant; - - - quae pars circuli iisdem, quibus corona, coloribus, ſed dilutioribus, ſplendebat.* Quem quidem arcum, coronam tangentem, ellipſeos meae fuiſſe partem coniicio. Tandem recordor, in *Iournal des Sçavans*, A. 1683, narrari, vidiſſe *Caſſinum* halonem Solem cingentem, ac extra eam, ab

vtro-

vtroque Solis latere, parhelium, vtrumque aequalem, cum Sole vero, ſupra horizontem habentem altitudinem, qui vero parhelii, non in halone ſiti, ſed vtrinque, ad aliquot diametrorum ſolarium interuallum, inde remoti erant, quos parhelios eos fuiſſe, qui in meo phaenomeno, ab annuli elliptici, cum horizontali circulo, interſectione formantur, magna cum veriſimilitudine credi poſſe, exiſtimo.

13) Non ignoro, *Newtonum* in Opticae libro, a ſe viſae halonis ellipticae, lunam cingentis, mentionem iniicere, aſt, ſi, quam exhibet, eius deſcriptionem intueamur, liquet, aliud prorſus, quam ego, vidiſſe ipſum phaenomenon. Sic enim ſcribit Vir ſummus, *Opticks, II. Book. Part. IV. Obſ. XIII. pag.* 111. 112. *The like Crowns appear ſometimes about the Moon; for in the beginning of the year* 1664, *Febr.* 19*th at nigth, I ſaw two ſuch Crowns about her.* --- *At the ſame time there appeared a Halo about* 22 *degrees,* 35′ *diſtant from the Center of the Moon. It was elliptical, and its long Diameter was perpendicular to the Horizon, verging below fartheſt from the Moon.*

14) Ex hactenus prolatis, iure iam concludere mihi poſſe videor, contigiſſe mihi primo, iuſtam acquirere ideam, phaenomeni, quod ante me pauci, nemo autem, quantum ſcio, completum, ac ſatis diſtinctum, conſpexit. Obſeruaui quoque A. 1758, d. 15. Octobris, ſi recte recordor, (diem enim annotare oblitus ſum) denuo halones et parhelios, quod vero phaenomenon, ab antea deſcripto, omnino diuerſum, aliusque generis fuiſſe puto. Siſtit eius delineationem

tionem Fig. 1. atque quoad halonum calores, diametrorumque ac latitudinum dimenſiones. equidem ſimile prorſus erat, phaenomeno ſuperius deſcripto, aſt quoad circumſtantias aliquas notabiliter ab ipſo diuerſum erat. Namque Tab. XIII. Fig. 1.

1) Neque areae ellipticae albeſcentis, neque annuli elliptici, intimam halonem circularem ambientis, vllum hic aderat veſtigium.

2) Halonis internae arcus ſupremus et infimus, non maiorem, prae caeteris annuli partibus, oſtendebant ſplendorem.

3) Parhelii F, D, in halonis internae CFED, cum annulo horizontali SLMN interſectione praeciſe ſiti erant.

4) Arcum videbam IHK, crura ſurſus vertentem, partem nempe circuli, Zenith Z pro centro habentis. Erat hic arcus ſimiliter coloratus, ac halo CFED, eiusdemque latitudinis, vertex vero ipſius H, a Solis centro S, 45 circiter gradus diſtabat. Eiusmodi arcus inuerſi, in antea deſcripto phaenomeno, ne veſtigium quidem vnquam conſpexi.

15) Patet, hoc vltimo deſcriptum phaenomenon, maiorem, cum iis, quae alibi in meridionalioribus Europae regionibus frequenter obſeruata fuerunt, habuiſſe affinitatem, quam reliqua. Non id iam ago, vt theoriam halonum atque parheliorum exquiram; nil enim, niſi diſtinctam obſeruationum mearum deſcriptionem tradere, propoſitum habeo. Quo interim et alios Phyſicos, ad diligentius obſeruanda huius generis phaenomena partim, partim ad euoluendam et per-

perficiendam eorum theoriam, excitem, quaeſtionum ſub forma, iungere hic placet aliquas cogitationes meas, nondum ſatis maturas.

Qv. 1. Nonne parheliorum atque halonum phaenomena omnia ad duas claſſes redigi poſſunt, quarum primam conſtituunt ea, vbi halo intima ellipſi lucida, annuloque elliptico colorato cincta eſt, alterum vero genus eorum eſt, vbi areae ellipticae atque halonis ellipticae nulla adſunt veſtigia? Atque, nonne ad bina haec genera ita reuocari poſſunt omnia, quae hactenus viſa ſunt huius generis phaenomena, vt oſtendi queat, omnem quae inter ipſa obſeruari ſolet diuerſitatem, non pendere aliunde, niſi quod idem phaenomenon, mox minus, mox magis, completum appareat?

Qv. 2. Nonne prioris generis phaenomenon borealioribus, poſterioris generis auſtralioribus terrae regionibus, magis frequens ac commune eſt? Videor mihi hoc ſuſpicari poſſe exinde, quoniam vnius anni interuallo quater primum phaenomenon hic Petropoli vidi, quod alibi rariſſimum eſſe, inde concludo, quod, inter ingentem ab aliis conſpectorum numerum, pauciſſima inueniantur, quae, ad primam hanc claſſem pertinere, cenſenda ſunt.

Qv. 3. Coelum, oculo iſtud intuenti, apparet, prouti fornix compreſſus, ellipticus. Circulus itaque, ſolem aut lunam cingens, in ellipticum hunc fornicem proiectus, apparere debet, quaſi eſſet ellipſis, axin maiorem habens horizonti perpendicularem, et inferius a luna, aut ſole, longiori interuallo diſtans, quam ſuperius.

perius. Nonne itaque dubitare licet, an halo a *Newtono* viſa (§. 13.) ex fallacia optica potius, quam ex cauſa phyſica, elliptica apparuerit? Non enim nos docet Vir ſummus, an ellipticitatem halonis ex dimenſione, an ex nuda oculorum aeſtimatione, obſeruauerit.

Qv. 4. Etſi a magno *Hugenio* in *Tractatu de Coronis et Parheliis* propoſita, de ortu phaenomenorum huius generis, hypotheſis, ingenioſiſſima ſit, tantoque Viro non indigna; nonne nihilo minus vera horum phaenomenorum cauſa in iis quaerenda eſt principiis, quae propoſuit *Newtonus*, *Opticks*, *II. Book. Part. IV*? Non obſtat, quod *Hugeniana* hypotheſis, phaenomenis, quae explicanda ſibi ſumſit, apte ſatis conueniat. Non enim ingenioſa figmenta, ſed veritatem, quaerimus Phyſici.

Qv. 5. Nonne ex iisdem modo allegatis principiis *Newtonianis*, halonis noctu candelam accenſam cingentis explicatio, repetenda eſt? Praeſto enim ſunt argumenta, quae plane demonſtrant, halonem iſtam, non extra oculum, ſed in ipſo ſpectatoris oculo, formari. Sed de his alibi vberius agam.

PISCIVM RARIORVM
E MVSEO PETROPOLITANO EXCEPTORVM DESCRIPTIONES.

Auctore
I. T. KOELREVTER.

Cum Muſeum Petropolitanum, rebus naturalibus, e toto terrarum orbe congeſtis, omnium facile inſtructiſſimum, praeterita huius anni aeſtate perluſtrarem, plurima mihi ſeſe obtulerunt Naturae Cimelia, quorum mentionem partim nullibi factam eſſe inuenio, partim quorum nomina tantum, vel nimis breues ac defectuoſae apud Auctores, ſaepius ineruditos, paſſim leguntur deſcriptiones, quorumque pleniorem magisque elaboratam omnes mecum optarent Scientiae naturalis cultores hiſtoriam. Locupletiſſimum rerum naturalium theſaurum, a Cel. olim Seba collectum, quem pretio haud paruo ſibi comparauit PETRVS MAGNVS, varia continere, quae omnem merentur attentionem, coniectura ſatis probabili nemo non perſpiciet Licet enim modo laudatus Seba maximam rariorum rerum partem in libro, qui titulum gerit: *Locupletiſſimi rerum naturalium Theſauri accurata deſcriptio etc.* 1734, in fol. Tom. I et II. deſcripſerit, iconibusque optimis illuſtrauerit, principem tamen Hiſtoriae naturalis partem, Ichthyologiam puta, ſenio, vel morte, ſine dubio praepeditus, non elaborauit, quamuis Piſces Amphibia numero in collectione fere ſuperarent. Hi igitur prae aliis noui quid ſuggerunt Naturae curioſo, quare, ſi

in deſcribendis eorum rarioribus meam impendam operam, eam in amplificanda ſcientia naturali haud fruſtra collocaſſe ſpero.

*** *** ***

Gaſteropelecus. *Gron.* muſ. 2. no. 155. t. 7. f. 5.

Clupea pinnis flauis: ventralibus minutiſſimis. *Linn.* Syſt. Nat. edit. dec. p. 319. no. 7. (Sternicla).

I.

Deſcriptio.

Color corporis, ſi a capite verſus caudam adſpicias piſcem, ſordide flaueſcens, ſin vero e directo aduerſus latera eius intendas oculos, ſplendide argenteus apparet, quo ſplendore etiam irides, lamellae iuxta oculos, et opercula branchiarum, ſub quocunque adſpiciantur angulo, praedita ſunt, ex eoque, pro varia radiorum reflexione, ſubinde coerulei parum reſplendet, id quod etiam circa dorſum ita contingit. Summo capiti pinnisque pectoralibus viroris diluti aliquid eſt admixtum; reliquae vero pinnae pallidae omnino, incoloratae ac pellucidae ſunt. Nec circa caudam vidi maculam, niſi ſub ea intelligatur linea longitudinalis uſca, de qua inferius dicetur. Tab. XIV. Fig. 1. 2. et 3.

Totum corpus valde compreſſum, latum, et, ſi latera reſpicias, ventricoſum valde, a margine ſuperio-

 re

re verſus inferiorem craſſitie paullatim decreſcit, ita, vt abdominis pars anterior in marginem, cultri aciei inſtar, acutum, et papyro haud craſſiorem, terminetur. Eadem quoque anterior corporis pars poſteriorem latitudine multum ſuperat.

Caput ſuperne planum, ad latera compreſſum, et antice, circa os, quaſi retuſum eſt; ſuperior enim maxilla capitis vertice ſitu haud inferior eſt, eiusdemque margini antico maxillae inferioris medium reſpondet, quae, clauſo ore, ſitum fere verticalem obtinet, et a ſuperiore aliquantum prominet. Si caput ab anteriore adſpicitur parte, apparet inter duo maxillae inferioris* crura, ſeu in mento, ſinus ſatis profundus, quem, niſi de vtriusque maxillae praeſentia nullum iam eſſet dubium, ab inferioris abſentia ortum fuiſſe, facile quis iudicaret. Ex huius ſinus imo ab initio ſtatim arcuatum emergit abdomen, quod primo aliquali quidem gaudet craſſitie, mox vero, ſub vlteriori arcuato decurſu, ad anum vsque, valde attenuatur, inque acutum valde abit marginem; haec anterior corporis pars, cuius limites a capite ad pinnarum pectoralium baſin fere, et ab hac oblique deorſum, ad anum vsque, excurrunt, nullam fouet cauitatem, neque viſcus, ſed ſolidam, ex fibris carneis, radiorum inſtar, e centro ad marginem excurrentibus, conflatam offert ſubſtantiam, licet ſub ventricoſa facie, qualem ipſius prae ſe ferunt latera, facile poſſit imponere, vt pro vero abdomine, viſcera continente, a quouis haberetur.

Mem-

Membrana branchioſtega, tantum abeſt, vt, more ſolito, ſub poſtica aut laterali operculi branchiarum parte collocetur, quamuis huius apertura late pateat, vt ad antica potius, in menti ſc. ſinu, ſit quaerenda, cuius imo vtraque, ſub angulo acuto coniuncta, affigitur, poſtquam ambae ab operculi lateribus, quibus adnaſcuntur, receſſere. Oſſiculum in membrana iſta vnum alterumue diſtinguere quidem potui, verum, ob eorum paruitatem, de numero certi quid affirmare vix audeo; ſic quoque, ob eandem rationem, branchiarum ſtructuram deſcribere nequeo, modo, earum vtrinque quatuor adeſſe, monituius.

Superior aeque ac inferior maxilla denticulis minimis et acutis armata eſt. Narium foramina, ab vtroque latere duo, inter labii ſuperioris latera et ſuperiorem ac anticum oculi orbitae marginem, conſpicienda ſunt. Capitis ſummum, quod, vti ſupra iam fuit dictum, planum eſt, marginem habet vtrinque prominentem et acutum, neruoque alio longitudinali, per ipſius medium excurrente, in duas aequales diuiditur partes.

Laminarum iſtarum argentearum, orbitae plus quam dimidiam partem, inferiorem ſc. et lateralem ipſius marginem, cingentium, quatuor ſunt, quarum poſtica reniformis, mediae magnitudinis; inferior eiusdem fere figurae, ſed ad vtrumque extremum truncata, maxima; quae hanc ſequitur, anticarum vna, triangularis, omnium minima eſt.

Oper-

Operculum branchiarum, quoad maximam partem, formatur a lamina poſtica, omnium maxima, quae ex ouato-lanceolata, et ſulco quodam, a dorſo laminae orbitalis poſticae vltra ipſius medium transuerſim excurrente, inciſa eſt; ſecunda operculi lamina, priore longe minor, itidem ouato-lanceolata eſt, harumque duarum laminarum extremitates acutae ſe inuicem excipiunt; ſecundam ſequitur tertia, linearis, ad maxillae inferioris partes potius, quam ad branchiarum operculum, referenda. Hiſce modo memoratis, tam orbitalibus, quam branchialibus laminis, duo interponuntur arcus oſſei, qui ſub infima, maxima, orbitalium lamina potiſſimum in conſpectum veniunt. Poſterior operculi branchiarum margo cute producta ampliatur, ad aperturam firmius et exactius claudendam.

Dorſum ab initio planiuſculum, leuiſſime aſcendit, ſenſim dehinc conuexum factum, recto fere decurſu ſuam attingit pinnam, cuius ad baſin deſcendit ſimul, inde vlterius deſcenſu ſuo, minus tamen decliui, ad pinnae caudae principium vsque, pergit. Ab ano vero corporis margo inferior, ad pinnae ani finem vsque, in linea recta oblique aſcendit, ab eodemque ſub angulo obtuſo infractus, ad caudae pinnam recta procedit.

Si latus corporis obuertatur luci, ob eius tenuitatem pellucent inteſtina, quae a pinnae pectoralis baſi oblique deorſum ad anum ducuntur, ſuperne maiora volumine, inferne tenuia inque rectum terminata mihi viſa, et, vbi latiſſima ſunt, duas vix ſuperantia lineas.

Horum

Horum faciei poſticae veſica quaedam accumbit, ſemilunaris figurae, 1½ lin. in medio lata, et, quantum quidem de ſumma eius pelluciditate ſuſpicari licet, aere forte repleta, cuius cornu ſuperius ac obtuſius ſupra pinnarum pectoralium baſin capiti, ſeu potius branchiarum operculis, contiguum eſt, inferius et acutius proxime infra anum ſubſiſtit; eademque ſua conuexitate poſticam corporis partem, concauitate inteſtina reſpicit. Notandum autem interim eſt, anum, et, quam ante ſe gerit, pinnulam ventralem ſpuriam, collocari inter duas duplicatas ſquamularum, vltra corporis marginem prominentium, ſeries, quarum vna, 2 lin. longa, bis octo, altera, 1 lin. longa, bis quatuor, iisque minoribus, componitur ſquamulis, huiusque poſterioris inter duplicaturam aditum ſatis largum ad iſtam veſicam patere; ſetam enim ad eius medium vsque et quaquauerſum circumducere potui, profundiorem tamen eius immiſſionem membrana quaedam, qua intus forte obducta erat cauitas, impediuit. Nec ea propter contendere velim, ſetam, per oſtium intruſam, in ipſum veſicae cauum perueniſſe, neque eam ipſam pro vera veſica natatoria, aut oſtium illud pro ductus pneumatici oſtio, venditare.

Poſticae extremitati primae ſquamarum ſeriei a latere ſiniſtro adiacet pinnula ventralis ſpuria, penicilliformis, quae, 5 circiter radiis, ½ tantum aut ¾ lin. vix longis, nec, quantum quidem diſtinguere potui, membrana inter ſe connexis compoſita, verae pinnae nomen haud meretur. Alterius minorum ſquamarum ſeriei extremitati poſticae principium pinnae ani conti-

guum eſt. Iſta, de qua modo dixi, veſica abdominis cauum clauditur, nec vllum praeterea viſcus pone eam diſpoſitum eſſe videtur.

Squamae tenues, ſubrotundae partim, partim ouales, integerrimae: maximae earum partem corporis anticam, infra et ante pinnas pectorales, et laterum medietatem, ſupra et infra lineam longitudinalem occupant; mediae magnitudinis dorſum et caudam, minimae inferiorem veſicae regionem, et marginem corporis, pinnae ani contiguum, inueſtiunt; maximae omnium lineam latae ſunt, vel eam quoque parum excedunt. Duae tres ve ſquamarum ſeries, tam ſupra, quam infra lineam longitudinalem, punctis ſunt pertuſae, lineas quaſi efformantibus. Nec in capite, neque in branchiarum operculo, vllum ſquamarum occurrit veſtigium.

Pinnae duae pectorales, proxime infra magnam operculi branchiarum laminam ſitae, fortes ſunt, et patentes, pro corporis paruitate magnae, radiisque vndecim compoſitae, primis fortibus valde et arcuatis, omnibus autem a primo ad vltimum ex ordine breuioribus.

Pinna dorſi vnica, caudae proprior, quam corporis medio, pinnaeque ani principio ſitu adhuc poſterior, breuis, octo radiorum, ſatis tenuium, vltimo bifido, figura quaſi rhomboidea.

Pinna ani longa, 32 radiis, eiusdem fere vbique longitudinis, 1 ſc. vel 1 1⅓ lin. longis, conſtructa.

Pinna caudae bifurcata, 36 circiter radiorum.

Ex

Ex Inſula Zeylan adductum eſſe teſtatur Muſ. Petropol. Catalogus ſerpent. p. 470, in quo ſub No. 351 (*a*): „Piſciculus argenteus Zeylanicus„ circa caudam maculoſus„: vocatur.

Quibus notis a Gronouiano hic differat, quibusque dum eodem conueniat, cum ex ipſa deſcriptione, tum ex iconibus ſatis elucet.

II.

Menſura.

	Poll.	lin. Pariſ.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	1	10
- - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam	1	5
Ab extremo oris ad oculi medium	—	$1\frac{1}{2}$
- - - ad marginem operculi branchiarum poſticum	—	$4\frac{2}{3}$
- - - ad principium pinnarum pectoralium	—	$3\frac{1}{4}$
- - - ad primam prominentium ſquamarum abdominalium	—	$9\frac{1}{3}$
- - - ad pinnulam ventralem ſpuriam et anum	—	$10\frac{2}{3}$
- - - ad principium pinnae ani	—	11
- - - - - - - - - - dorſi	—	$11\frac{1}{4}$
Longitudo pinnarum pectoralium	—	$7\frac{1}{4}$
- - - pinnae dorſi ad baſin	—	$1\frac{2}{3}$
- - - - - - - radiorum longiorum	—	2
- - - - - - ani ad baſin	—	$5\frac{3}{4}$
- - - - - caudae; ſc. a primis radiis ad longiorum apices	—	5

 Extre-

	Poll.	lin.
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad	—	1
Diameter oculi	—	$1\frac{1}{4}$
Diſtantia inter primi pinnae pect. radii baſin et anum	—	$6\frac{2}{3}$
— inter anum et primi pinnae ani radii baſin	—	$\frac{3}{4}$
— inter vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis (*a*), per oculorum axes		2
— ad dorſi initium		$1\frac{3}{4}$
— principium pinnae dorſi	—	$\frac{2}{3}$
— caudae	—	$\frac{1}{4}$
— perpendicularis (*b*), per oculi medium	—	$4\frac{2}{3}$
— per pinnae pectoralis principium	—	$7\frac{1}{2}$
— per maximam corporis latitudinem, pone pinnam pect.	—	8
— per anum	—	$6\frac{2}{3}$
— per pinnae ani finem	—	$1\frac{1}{2}$
— caudae principium	—	2

(*a*) Piſce erecto, horizontaliter ſumta.

(*b*) Piſce lateri incumbente, horizontaliter ſumta.

*** *** ***

II.

Trutta dentata, dorſo plano; abdomine acuto, prominente; taenia longitudinali, argentea; pinna ani longiſſima. *Piabucu* Braſilienſ. *Marcgraf. Willoughb.* Hiſt. Piſc. p. 204. Tab. N. 13. fig. 4.

Deſcriptio.

Color Piſcis in S. V. aſſeruati e pallide teſtaceo luteus eſt, qui tamen, eo viuente, vel haud longo poſt mortem tempore, plane alius eſſe debuit; Squamas nempe argenteum oſtendere ſplendorem, dorſumque oliuacei eſſe coloris, viridi hyacinthino permixti, ex *Marcgrafio* allegat *Willoughbeius*. A postico operculi branchiarum angulo taenia argentea, vix ſplendens, in linea recta ad medium baſis caudae pinnae tendit, ſummo dorſo in decurſu ſuo propior, quam imo abdominis margini, ab initio ſenſim latior facta, duas tertias longitudinis corporis adtingit, vbi latiſſima, 1½ lineam ſc. lata eſt, abhinc ſtatim decreſcens ad finem vsque. Laminae iuxta oculos et branchiarum opercula argentei, haud tamen ſplendidi, coloris ſunt; irides vero, inferne quidem argenteae, maximam tamen par- Tab. XIV. Fig. 4.

tem ſaturate flauentes; iisdemque alias rubri parum ſuperius eſſe admixtum, *Marcgrafius* perhibet.

Pupilla oualis eſt figurae, diametro perpendiculari horizontalem ſuperante.

Quod ad corporis formam attinet, neſcio, quam ob cauſam et mihi et aliis caput huius piſcis inuerſum quaſi viſum ſit; interim tamen, ſi probe aduertas, capitis ſummi ambitum leuiter depreſſum, imi vero connexum, ſitumque oculorum ſolito inferiorem, huic fallaciae anſam dediſſe, demum perſpicies. Ab extremo mandibulae ſuperioris ad decem lineas vsque caput ac dorſi initium aſcendit quidem, ſed in reſpectu ad ambitum vtrumque reſimum eſt; abhinc vlterius, ſed conuexo ambitu, leuiter aſcendit dorſum ad pinnae dorſualis primae principium vsque, inde aliquantum rectum ſequitur decurſum, ſenſim tamen circa pinnam adipoſam leuiſſime deſcendit, moxque iterum verſus pinnae caudae principium, breui quidem itinere, leuiter aſcendit. Ab extremo mandibulae inferioris conuexo ſub ductu eo vsque deſcendit imi corporis ambitus, quo a poſticis pinnae pectoralis radiis linea perpendicularis poteſt duci, dein noua maiorique ſub conuexitate pergit ad angulum pinnarum ventralium internum, a quo leuiſſime iterum et recta deſcendit ad pinnae ani principium; abhinc denuo ſecundum totam huius pinnae baſin curſu fere rectilineo, adſcendit, tandemque ab vltimo pinnae ani fine ad pinnae caudae principium vsque leuiter iterum deſcendit.

Expoſita ambitus deſcriptione, me conuerto ad ipſam corporis ſuperficiem, eiusque conformationem.

Ver-

Vertex capitis glaberrimus, pellucidus, conuexus, dorſi initium verſus magis ſit decliuis, magisque ad latera compreſſus, proceſſu ſubulato, glaberrimo in dorſi initium, ad $3\frac{1}{2}$ lineas vsque, excurrens. Ipſum dorſi initium, leuiter conuexum, ſtatim in planitiem abit, quodammodo carinatam, marginibus vtrinque ſubacutis circumſcriptam, et ad pinnam adipoſam vsque ſeſe extendentem. Semel quidem ea interrumpitur pinnae dorſualis primae parum eleuata baſi, et ab hac pinna ad alteram adipoſam vsque non amplius carinatum habet reliquum ſui tractum, ſed plana omnino eſt, marginesque vtrinque minus acutos exhibet. Dorſi extremum pone pinnam adipoſam ex planiuſculo ſtatim in conuexum, et quodammodo acutum, contrahitur. Planities dorſi, modo memorata, ante pinnam primam, vbi latiſſima eſt, $2\frac{1}{2}$ lin. latitudinem abſoluit.

Abdomen ab initio ſubacutum, mox infra pinnas pectorales, ad alteram curuaturam, attenuatum valde acutiſſimumque euadit, ob ſquamarum ibi prominentium duplicaturam; idem ante anum planiuſculum, pone eundem ſubconuexum, iuxta pinnae ani baſin ſatis compreſſum, et attenuatum, in extremo tandem cum dorſi extremo conuenit.

Ipſa vero corporis latera compreſſa, et leuiſſime tantum conuexa ſunt; id quod ex menſura, inferius addenda, clarius patebit.

Oris rotundati rictus mediocris. Extremo vtriusque mandibulae limbo infixi ſunt denticuli circiter ſedecim, breues, obtuſi, ſubtriangulares, albicantes, quorum orae ciliis brunis, quaſi minoribus denticulis,

inſtruun-

inſtruuntur. Pone dentes, intra os, vtriusque maxillae ductum ſequitur membrana, $\frac{1}{2}$ lineam lata, retrorſum expanſa, ſeu margine libero fauces reſpiciens. Conſpicitur etiam in palato anteriori, in diſtantia vnius lineae ab oris limbo, parua quaedam eminentia, duarumque linearum interuallo ab eadem linguae extremitas obtuſa, laeuis ac libera in conſpectum venit. Maxilla ſuperior, ore clauſo, inferiore parum longior, aperto vero, breuior aliquantum eſſe videtur. Narium foramina vtrinque duo, orbitae ſupremo margini altitudine aequalia, ac inter oris extremum et oculum in medio fere diſpoſita: anteriori ſubrotundo, minore; poſteriori ſemilunari, maiori, membranaque eiusdem figurae ad dimidium obtecto. Oculi, comparate ad caput, ſatis magni. Orbitae margo membrana auctus eſt, ſuper corneae partem extenſa, immobili. Angulus operculi branchiarum ſuperior, ſeu poſticus, $7\frac{2}{3}$ lin. ab oris extremo diſtat, inferior autem, ad vtriusque membranae branchioſtegae coalitionem, iſto 1 lin. ſitu anterior eſt.

Operculi branchiarum margo membrana terminatur, qualis in plurimis piſcium occurrit. Caeterum totum caput cum ſuis partibus glaberrimum et ſquamis omnino deſtitutum eſt. Membrana branchioſtega quatuor tantum oſſicula continet, quod in hoc genere ſingulare eſt. Branchiarum numerus vtrinque quaternarius.

Squamae mediocres, denſe congeſtae, tenues, integerrimae, partim ſubrotundae, partim ouales: maximarum diametro $1\frac{1}{3}$ lin. minimarum $\frac{1}{2}$ lin. vix ſuperante.

Linea

Linea longitudinalis ſtatim a principio, quod in taeniae argenteae initium cadit, ad pollicem vsque deſcendit, abhinc cum eadem taenia, pariter ad pollicem vsque, parallelum ſeruat curſum, ab eiusdem margine inferiore ſub hoc ſtatu duas lineas remota, denique ſurſum ſenſim flexa, ipſi taeniae argenteae, in diſtantia vnius pollicis duarumque linearum ab eius extremo, denuo immergitur, in eiusque medio recta ad caudae pinnam excurrit. Vbi incipit linea longitudinalis, a dorſo $2\frac{1}{2}$, a ventre $7\frac{1}{3}$ lin. circa pinnarum ventralium baſin a dorſo $7\frac{1}{2}$, a ventre cultellato 6 lin. circa pinnae ani principium a dorſo $7\frac{2}{3}$, a ventre $5\frac{1}{2}$ lin.; ad ipſius ingreſſum in taeniam argenteam a dorſo 4, a ventre $4\frac{1}{2}$ lin. infra pinnam adipoſam a dorſo 3, a ventre pariter 3 lineas diſtat; ab initio itaqne dorſo propior, quam illi, tandem ab vtroque aequaliter diſtans.

Pinnae octo, ſatis rigidae ac fortes: pinnae pectorales radiis tredecim, rectis, et a primo, indiuiſo ad vltimum ex ordine breuioribus, compoſitae.

Pinnae ventrales, ad baſin appendice ſquamoſa, retrorſum ſpectante, auctae, radiorum octo, a primo, indiuiſo, ad vltimum ex ordine breuiorum.

Pinna dorſi prima, cuius principium principio pinnae ani e directo opponitur, radiorum decem, quorum primus ſecundo dimidio breuior, indiuiſus, ſecundus longiſſimus, indiuiſus, caeteri ex ordine breuiores et ramoſi, vltimus bifidus; omnes ab vtroque latere membrana prominente aucti.

Pinna dorſi ſecunda, adipoſa, principio ſuo 2½ lin. anterior ſitu, quam pinnae ani finis, baſi anguſtior, in extremo latior et attenuata, margine ſuperiore arcuato, inferiore recto fere praedita.

Pinna ani radiorum quadraginta (*a*) ſex, eiusdem fere inter ſe longitudinis, primis exceptis; 2—9 enim, qui nodo diſtinguuntur, reliquis paulo longiores ſunt; primus, 2½ lin. longus, et ſecundus ſimplices, a tertio ad vltimum vsque omnes ramoſi. Nodus primus in ſecundo radio duas a baſi pinnae lineas diſtat, caeteri ex ordine pinnae baſi propiores. Pinna caudae, viginti ſex circiter radiorum, modice bifurcata.

Exſtat hic Piſcis in Cat. Piſc. Muſ. Petrop. p. 498, No. 307, ſub nomine: „Piſcis Harengi ſpecies, ventre mire intorto.„ Cum vero vel primo ſub intuitu vix vllam cum Harengis prodat ſimilitudinem, quin potius ob pinnam, ſic dictam, adipoſam, quam pro charactere Truttarum eſſentiali omnes aſſumunt Syſtematici, ad truttaceum genus debeat referri, noua id ſpecie multiplicare, ipſa natura iuſſit. Icon, quam a *Marcgrafio* primum, poſtea in *Willoughbeii* Ichthyographia, denuo aeri inciſam accepimus, rudis valde ac vitioſa eſt; pinnae enim dorſi primae ſitum iuſto anterio-

(*a*) In alio indiuiduo, quod ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum quatuor pollices, ac vndecim lineas longum erat, pinn. pect. 13, ventrales 8, dorſ. 1ma 9, ani 42 radiis componebantur. Anteriores pinnae ani radii nodos, vt in priore, non oſtendebant.

teriorem, et ſecundam, adipoſam, magnam nimis, et radiis quaſi inſtructam exhibet, quibus omnino caret. Meliorem itaque, et ad naturalem piſcis magnitudinem factam, ſiſto.

Menſura.

	Poll.	lin.
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices	Pariſ.	
radiorum pinnae caudae longiorum	5	7
- - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - - - -	4	11
Ab oris extremo ad oculi medium - - -	—	$3\frac{1}{2}$
- - - - - ad marginem operc. branch. poſticum - - - -	—	$9\frac{1}{2}$
Ab oris extremo ad principium pinnarum pectoralium - - - - -	—	$11\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - ventralium	2	$\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - p. dorſ. primae	2	9
- - - - - - - - - - - - ſecundae	4	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - ani - - -	2	$8\frac{1}{2}$
- - - - - - ad anum - - - - - - - - -	2	4
Longitudo pinnarum pectoralium - - - - -	1	
- - - - - - - ventralium - - - - -	—	$7\frac{1}{3}$
- - - pinnae dorſi primae, ad baſin, -	—	4
- - - - - - - - radiorum longiorum -	—	$10\frac{1}{2}$
- - - - - - - ſecundae, ad baſin, - - -	—	$\frac{2}{3}$
- - - - - - - - a baſi ad extremum -	—	$2\frac{1}{3}$
- - - - - - - ani, ad baſin, - - - - -	1	10
- - - - - - - radiorum primorum - -	—	6
- - - - - - - - - - poſticorum - -	—	4

Longi-

	Poll.	lin. Pariſ.
Longitudo pinnae caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices	—	10
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad	—	2
Diameter oculi horizontalis	—	$2\frac{2}{3}$
- - - - - perpendicularis	—	3
Diſtantia inter primi pinnae pect. radii baſin et primum pinnae ventralis radium	1	$\frac{2}{3}$
- - inter primi pinnae ventralis primique pinnae ani radii baſin	—	$8\frac{1}{2}$
- - inter vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium	—	$3\frac{1}{2}$
- - inter vltimi pinnae dorſi primae radii baſin et pinnam ſecundam, adipoſam	1	2
- - inter marginem pinnae adipoſae poſticum et primum pinnae caudae radium	—	$5\frac{1}{2}$
Latitudo horizontalis, per oculorum axes	—	$4\frac{2}{3}$
- - - - per poſticum operc. br. marginem	—	$4\frac{1}{3}$
- - - - ad principium pinnae dorſi primae	—	$4\frac{1}{3}$
- - - - - - - - - - - - ſecundae	—	$2\frac{1}{2}$
- - - - - - - - - - - - caudae	—	$1\frac{1}{2}$
Latitudo perpendicularis per oculi medium	—	$6\frac{1}{2}$
- - - - per principium pinn. pect.	—	$11\frac{1}{3}$

Lati-

	Poll.	lin.
	Pariſ.	
Latitudo perpendicularis & lin. pone pinn. pect. principium, vbi maxima latitudo - -	1	$2\frac{1}{3}$
- - - - - - per principium pinn. ventr. -	1	$1\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - - - - ni -	1	1
- - - - - - per pinnae ani finem - - -	—	$4\frac{2}{3}$
- - - - - - - - caudae principium	—	$5\frac{1}{3}$

*** *** ***

III.

Gobio, pinnis pectoralibus flabello inſiſtentibus; pinna dorſi prima radiorum 12, ſecunda 13.

Deſcriptio.

Colorem piſcis naturalem Spiritus Vini conſeruatorius in pallidum et exalbidum mutauit. *Tab. XIV. Fig. 5. et 6.*

A mandibulae ſuperioris extremo caput ad oculos vsque, in ſummo vertice diſpoſitos, ſtatim notabiliter adſcendit, quorum ad marginem poſticum dorſi eſt initium, in linea fere recta ad ſecundam ipſius pinnam, et ab hac ſub leuiſſima vixque notabili curuatura caudae pinnam verſus excurrentis. A mandibulae inferioris extremo abdomen modice deſcendit vsque ad anum, a quo modice adſcendit ad pinnae ani finem, et vlterius abhinc recto fere curſu caudae pinnam attingit. Latitudo corporis horizontalis ab oris extremo ad principii pinnae dorſi primae viciniam vsque ſenſim increſcit,

creſcit, dein ad caudam vſque ſenſim decreſcit; latitudo e contrario perpendicularis, quae in vniuerſum ad anticam maior eſt, quam ad poſticam corporis partem, ab oris extremo ſtatim haud exiguum capit augmentum iuxta oculum, et adhuc maiorem ad pinnam pectoralem, diminuitur vero ſenſim ab ano ad corporis extremum.

Frons ante oculos decliuis valde, ac planiuscula eſt, capitis vero verticem oculi totum occupant. Inter hos et pinnae dorſualis primae initium, dorſum in medio profunde ſatis carinatum, vtroque tamen margine conuexum, inter vtramque vero pinnam, vt et inter ſecundae finem, pinnaeque caudae principium, planiusculum; abdomen ante pinnas ventrales planum, inter has et anum ſubconuexum, inter pinnae ani finem et pinnae caudae principium ei dorſi parti, quae huic e directo opponitur, forma omnino ſimile eſt. Latera autem corporis planiuscula, vel leuiter tantum conuexa ſunt; hinc totum corpus cathetoplateum eſt.

Superficies corporis glaberrima cutem exhibet, qualem in Gadis et Enchelyopis deprehendimus, ſquamulis nimirum minutiſſimis obtectam, deſquamatoque piſce, corio illi ſimilem, quod Sagrin vulgo dicitur.

Prona capitis pars, reſpectu corporis, breuis: limites enim ei orbitarum poſtici ponunt margines; ſin vero quis, latera eius reſpiciens, branchiarum operculum, tanquam partem conſtituentem, ad illud referre velit,

velit, ei certe, ob late patentem huius ambitum, magnum videbitur.

Os obtuſum. Rictus oris patens. Clauſo ore, maxilla inferior ſuperiore paullo breuior eſt; vtraque vnica dentium acutorum ſerie inſtruitur, quorum intermedii lateralibus maiores, leuiter incuruati, et, in inferiore inprimis maxilla, prae ceteris antrorſum exporrecti ſunt. Duas ab oris extremo lineas, ad palatum ſuperius, fimbria quaedam transuerſa, valde eminens, ad palatum inferius linguae corpus valde oblongum conſpicitur, cuius apex obtuſus, maxillae vndique adnatus, 1 lineam circiter ab huius extremitate diſtat.

Narium foramen vtrinque vnicum, ab oris angulo 2, a maxillae ſuperioris extremo 1½ lin. diſtans, oculis, quam oris extremo, propius, minimum, vixque peruium mihi viſum.

Oculi in ſummo vertice poſiti, grandes, maximam partem prominentes, contigui, cuteque ſunt obducti, a communi orta, cumque ſclerotica tunica, quae ſubiacet, et membranacea, nec ita dura eſt, ac alias eſſe ſolet, tela mediante celluloſa cohaerente. Circa marginem orbitae inferiorem oculi protuberantia ſinum efficit anguſtum, ſatis tamen profundum, cuius in imo cutis ad ipſum oculi inferiorem marginem, ſub palpebrae ſpecie, reflexa apparet.

Latera capitis ac branchiarum opercula cute laeui, eiusdemque indolis, ac in toto eſt corpore, inueſtiuntur

tur; ſquamas tamen in ea detegere non potui. Sic operculorum quoque margines eius productione augentur.

Apertura operculi branchiarum anguſta valde, vtpote vix $2\frac{1}{2}$ lin. longa, ſub poſtico illius margine quaerenda eſt. In membrana branchioſtega, qua coercetur maxime operculi apertura, oſſicula nulla deprehendi.

Squamae denſe congeſtae, ſubrotundae, planae, tenuiſſimae, ſinapis ſeminibus vix maiores, deciduae; decidere autem eas facilius ad anteriorem, quam ad poſteriorem corporis partem, obſeruaui.

Linea longitudinalis obſcura, albicans, ad angulum baſis ſuperiorem iſtius pinnae pectoralis flabelli, de quo ſtatim dicam, orta, recta fere ad caudam decurrit, in eamque ab vtroque latere lineolae minores albentes, ab interſtitiis muſculorum poſterioris corporis partis ortae, oblique excurrunt, tam a dorſo deſcendentes, quam ab inferioribus adſcendentes.

Anus patulus, quatuor lineas oris extremo propior, quam pinnae caudae extremitati, poſtico ſuo margini appenſam gerit papillam grandiuſculam, oblongam, retrorſum ſpectantem, et, quantum videre potui, imperforatam, ſub qua ſinus ſatis profundus in corpore conſpicitur, ab ipſa papilla maximam partem obtectus.

Pinnae

Pinnae ventrales duae, pectoralibus ſitu anteriores, planum efformant ouale, ſibique inuicem ita proxime adſtant, vt in vnam conflatae eſſe videantur; intimorum quidem radiorum baſes, membranae tenuiſſimae et anguſtiſſimae ope, cohaerent, ipſi vero hi ſingulae pinnae radii ad apices vsque ſoluti ſunt, neque extimus vnius pinnae radius cum extimo alterius connectitur, quod, ſi obtineret, pinnae hae non planum, ſed infundibulum potius, inter ſe formarent. Singula earum ſex instructa eſt radiis, ab extimo ad intimum ex ordine longioribus, et, extimo ſimplici, excepto, omnibus ramoſis.

Pinnae pectorales, ad extremum lanceolatae, ad baſin latiores, ſituque ventralibus poſteriores, lacerto cuidam, ſeu brachio, compreſſo, ſubtriangulari, inſiſtunt; cuius baſis, ſeu articulus, poſticum operculi branchiarum marginem contingit, pinnarum ventralium baſi e directo oppoſitus, eiusdemque, tanquam flabelli, ope ipſae pinnae mouentur. Hae e tredecim conſtruuntur radiis, ab extimo ad medios, ab vtroque latere, ex ordine ſenſim longioribus, plurimisque ſimplicibus, ſi medios excipias, verſus extremitates leuiter diuiſos.

Pinna dorſi prima, aequali, reſpectu diſtantiae ab oris extremo, cum pectoralibus ſitu gaudens, radiis ſuffulcitur duodecim, mollibus ac ſimplicibus, a primo ad vltimum ex ordine breuioribus, et ad 1 lin. vsque apicibus ſuis vltra membranam connectentem excurrentibus. Si expanditur haec pinna, triangulare efformat

 pla-

planum, tuncque demum etiam quinque iſtae conſpiciuntur maculae ruſo-fuſcae, quibus in membranae ſummo, primum inter et ſecundum, ſecundum ac tertium, tertium et quartum, quartum et quintum, quintum denique et ſextum radium, notatur. Margo vltimi huius pinnae radii poſticus membranae ope medio dorſo annectitur.

Pinna dorſi ſecunda, pinnae ani ſitu reſpondens, radiis tredecim eſt conſtructa: anterioribus breuioribus, poſterioribus longioribus, omnibus mollibus ac ſimplicibus, (vltimo excepto, qui bifidus eſt,) radiisque alterius pinnae tenerioribus ac breuioribus.

Pinna ani, eiusdem cum priore ſitus, e radiis componitur decem, a primo ad vltimos ex ordine longioribus, ac omnibus, excepto vltimo, bifido, ſimplicibus.

Pinna caudae collapſa lanceolata, expanſa vero ex ouali oblonga eſt, radiisque circiter triginta compoſita, a primis ad medios ex ordine longioribus, intermediisque ad extremitates ramoſis.

Licet hic Piſcis, ob ampliorem oris rictum, grandiores oculos, corpus quodammodo anguillaeforme et ſquamis minutiſſimis obtectum, cum Gadis aeque ac cum Gobionibus habeat affinitatem, pinnae tamen ventrales obtuſae, ſibique adeo proximae, vt in vnicam ſubrotundam connatae eſſe videantur, quum in Gadis

alias

alias multo acutiores, magisque a ſe inuicem remotae deprehendantur, Gobionum, horumque ſpuriorum, generi eum potius ſubiungunt. Quid vero de ſpecie iudicem, breuiter dicam. Cum Paganello (*a*) Venetorum et Iozo (*b*) Romanorum quandam quidem ei eſſe ſimilitudinem, ex deſcriptione colligitur; cum Iozo inprimis, quod radiorum pinnae dorſualis primae extremitates ſupra membranam, eos connectentem, emineant, ipſaque huius pinnae membrana in ſummo maculata ſit; verum numero radiorum eiusdem pinnae nimis ab eo differt, quam vt eiusdem cum hoc ſpeciei eum eſſe crederem. Variabilem quidem eſſe radiorum in pinnis numerum, propria obſeruatione dudum cognoui, in tantum autem differre, vt in duplum increſcat, et quidem ſine alius, eiusdem generis, pinnae radiorum numeri incremento, nunquam mihi obuenit. Quum igitur in plurimis, hactenus cognitis, Gobionum ſpeciebus, primam dorſi pinnam conſtanter ſex radiis, ſecundam vero 10, 11, 13, 14, 16, 17 eſſe ſuffultam, recentiores contendant Auctores, (*c*) noſter autem in pinna dorſi prima duodecim, in ſecunda tredecim obti-

(*a*) *Willoughb.* Hiſt. Piſc. Libr. 4. pag. 207. §. II. Tab. N. 12. 4. *Linn.* Syſt. nat. edit. dec. p. 263. no. 2.

(*b*) *Willoughb.* Hiſt. Piſc. Libr. 4. pag. 207. §. III. *Linn.* Syſt. nat. edit. dec. pag. 263. no. 5.

(*c*) *Linn.* Syſt. Nat. edit. dec. p. 262, 263. No. 1, 2, 3, 4, 5.

obtinuerit radios, pinnarumque ambae conſequenter magnitudine inter ſe fere pares ſint, cum ob eandem rationem in caeteris ſpeciebus earum anterior minor, poſterior maior enaſcatur, deſcriptum a nobis piſcem pro noua Gobionum ſpecie habere, conuenit.

Patria eius mihi incognita eſt, nec plura de eo referre poſſum, quod in Cat. Muſ. Petrop. nullibi eius facta ſit mentio.

Menſura.

	Poll.	lin.
	Pariſ.	
Longitudo tota, ſc. ab oris extremo ad apices radiorum pinnae caudae longiorum	3	10
- - - - ab oris extremo ad extremitatem corporis ſquamoſam - - -	3	$2\frac{1}{3}$
- - - - ab oris extremo ad oculi medium	—	$4\frac{1}{2}$
- - - - - ad angulum operc. br. poſticum - - -	—	$10\frac{1}{3}$
- - - - - ad pinnarum ventralium principium - - -	—	$9\frac{1}{3}$
- - - - - ad flabelli pect. baſin. (ad marginem inferiorem)	1	
- - - - - ad pinnarum pectoralium primos radios - - -	1	$1\frac{1}{3}$
- - - - - ad principium pinnae dorſi primae - - - -	1	1
- - - - - - - - - - ſecundae	1	$10\frac{2}{3}$
- - - - - - - - - ani -	1	11
- - - - - ad anum - - - - -	1	9

Longi-

	Poll.	lin. Parif.
Longitudo pinnarum ventralium, - - - -	—	6
- - - - - - - pectoralium - - - -	—	7½
- - - - pinnae dorſi primae, ad baſin - -	—	6
- - - - - - - - - radiorum longiorum	—	9
- - - - - - - - ſecundae, ad baſin, - -	—	7⅔
- - - - - - - - radiorum longiorum	—	5
- - - - - - ani, ad baſin, - - - - -	—	5
- - - - - - - - - radiorum longiorum	—	3½
- - - - - - caudae, ſc. a primis radiis, ſeu ab eius principio, ad longiorum radiorum apices - -	—	10
Extremitas corporis ſquamoſa in caudae pinnam extenſa ad - - - -	—	3
Diameter oculi - - - - - - - - - - -	—	2⅓
Diſtantia inter primi pinnae ventralis radii baſin et primum pinnae pectoralis radium -	—	3
- - - inter intimi pinnae ventralis, et primi pinnae ani radii baſin - - -	1	
- - - inter vltimi pinnae ani radii baſin, et primum pinnae caudae radium -	—	8½
- - - inter vltimi pinnae dorſi primae, et primi pinnae dorſi ſecundae radii baſin - - - - - - - - -	—	3
- - - inter vltimi pinnae dorſ. 2dae radii baſin et primum pinnae caudae radium	—	5⅓
Latitudo horizontalis per oculorum axes - - -	—	4
- - - per poſticum operc. br. marginem	—	5½
- - - per principium pinnae dorſi primae -	—	4

		Poll. lin. Pariſ.
Latitudo horizontalis per principium pinnae dorſi ſecundae	—	$3\frac{1}{2}$
- - - caudae	—	$1\frac{2}{3}$
Latitudo perpendicularis per oris angulum	—	4
- - - per oculi medium	—	$6\frac{1}{4}$
- - - per principium pinnarum ventralium	—	7
- - - pectoralium	—	7
- - - pinnae ani	—	$5\frac{3}{4}$
- - - per pinnae ani finem	—	$4\frac{1}{3}$
- - - per caudae principium	—	$3\frac{1}{4}$

ASTRONO-

ASTRONOMICA.

INVESTI-

INVESTIGATIO POSITIONVM INSIGNIORVM RVSSIAE LOCORVM SECVNDVM EORVM LONGITVDINEM AC LATITVDINEM OBSERVATIONIBVS ASTRONOMICIS MECVM COMMVNICATIS INNIXA.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

Cum mihi ex mandato Illuſtriſſimi Praeſidis emendandi Atlantis Ruſſici cura demandata ſit, de locorum inſigniorum Ruſſici Imperii poſitionibus ex aſtronomicis obſeruationibus rite determinandis cogitaui. Hunc in finem Academiam rogaui, vt mecum communicaret obſeruationes aſtronomicas, quotquot ſunt, in Archiuo aſſeruatas. Quo facto, praecipuorum primum locorum longitudines ac latitudines, quantum potero, accuratiſſime ex ſupra memoratis obſeruationibus elicere, et prout eas cognitas habebo, cum Cl. Academicis communicare ſtatui, vt peractis calculis, Catalogus longitudines ac latitudines praecipuorum locorum exhibens conſtrui poſſet. Sequentes igitur inpraeſentiarum acceptas habeatis locorum determinationes rogo.

Determinatio differentiae inter Meridianum Petropolitanum et Archangelopolitanum.

Quamuis V. Cl. *De l'Isle de la Croyere* annum fere integrum Archangelopoli ſit commoratus, paucas tamen ibi habuit eclipſium Satellitum Iouis obſeruationes, quarum praeterea maxima pars debita accuratione carere mihi videtur. Vnica tantum ſeſe mihi obtulit eclipſium Satellitum Iouis obſeruatio reliquis praeſtantior atque accuratior, ex qua Meridianorum differentiam ſupra dictam eruere ſequenti modo conabor:

Emerſio primi Satellitis Iouis obſeruata Archangelopoli

1728. Mart. 3.	$9^h.56'.25''$
Aequatio meridiei ſubtrah.	25
Tempus verum emerſionis	$9^h.56'.\ 0''$
Eadem obſeruatio habita eſt Madriti	$7.\ 6.\ 17$
Different. Merid. inter Archangel. et Madrit.	$2^h.49'.43''$
Different. Merid. Pariſios inter et Madritum	$24.\ 18$ ſubtr.
Differentia Merid. Pariſios inter et Archangel.	$2^h.25'.25''$
Poſita diff. Merid. inter Pariſios et Petrop. =	$1.\ 52.\ 0$
erit differ. quaeſita Mer. inter Petrop. et Archang.	$0^h.33'.25''$ temp.
et Longitudo Meridiani Archangelopol. =	$56^\circ.21'.15''$

Haec Meridianorum differentia non facile maior ſtatui poteſt, habita imprimis circumſtantiarum huius obſeruationis, de quibus *de la Croyere* mentionem fecit, ratione: Si enim ſecundum monita Cl. *de la Croyere*

Croyere verum emerſionis momentum obſeruatum eiusdem emerſionis tempus praecedat, Meridianorum differentia prodibit minor, quantitate nimirum errorem in obſeruatione haerentem aequante.

Calculus igitur noſter eorum plane conuellere videtur opinionem, qui longitudinem Archangelopolis augendam eſſe contendunt; longitudinem huius vrbis e contrario in mappa Academiae notatam, 10 minimum minutis primis Aequatoris imminuendam eſſe ſtatuo.

Cl. *de l'Isle* quidem in Tom. III. Commentariorum differentiam Meridianorum inter Petropolin et Archangelopolin, dimidio circiter vnius minuti primi temp. maiorem aſſignauit; notandum vero eſt Cl. *de l'Isle* obſeruationes eclipſium ſatellitum Iouis a Cl. *de la Croyere* Archangelopoli habitas, ſine vllo delectu omnes adhibuiſſe, et quod maius eſt, aequationem Meridiei, qua tempus a *de la Croyere* notatum corrigendum erat, prorſus neglexiſſe, vt in Ephemeridibus obſeruationum Archangelopoli habitarum videre eſt.

Ad latitudinem huius vrbis ſcite determinandam, iis praecipue vſus ſum obſeruationibus, quibus ſimul quadrantis error innoteſceret, aequalibus nimirum, ſiue potius fere aequalibus altitudinibus ſiderum boream auſtrumque verſus, vno eodemque inſtrumento obſeruatis. Paucae quidem eiusmodi reperiuntur in Ephemeridibus Cl. *de la Croyere* obſeruationes, iis tamen adornandis ita ſtudui, vt latitudo exinde deducta accuratior forſitan ſit cenſenda ea, quam Cl. *de la Croyere* ex diuerſis obſeruationibus, poſito errore quadrantis in omnibus

limbi eiusdem punctis conſtante, adhibitisque elementis noſtris temporibus accuratius ab aſtronomis definitis, eruere eſt conatus. Nonnullas tamen hoc in calculo, vt et in ſequentibus, correctiones minores, recens ab aſtronomis probatas, ex. gr. aberrationem ex ſucceſſiua luminis propagatione ortam, et propter defectum ſufficientis accurationis in obſeruationibus ipſis, et propter inopiam Catalogi, vera fixarum loca minoribus illis aequationibus correcta, exhibentis, paſſim omittere ſum coactus.

Obſeruationes itaque ad noſtrum inſtitutum maxime idoneae, ſunt altitudines meridianae marg. ☉ bor. obſeruatae 1728. d. 2. 21 et 26 Febr. ſt. n. quas cum altitudinibus meridianis α Lyrae d. 23 et 26. Febr. eiusdem anni infra Polum captis, ſequenti modo comparare conſultum viſum eſt.

Altit. mer. app. α Lyrae infra Polum d. 23 Febr. = 13°. 15'. 20''
d. 26 Febr. = 13. 14. 40

Altit. merid. app. α Lyrae media - - = 13°. 15'. 0''
Refractio = - 4. 8

Altit. merid. α Lyrae refr. corr. = 13°. 10'. 52''
Declinatio α Lyrae - - = 38°. 33'. 13'' bor.

Comparatio alt. meridd. α Lyrae infra Polum cum altit. mer. ☉lis d. 2 Febr.

Altitud. merid. app. marg. ☉ bor. = 8°. 53' 50''
Refr. et parall. = - 6. 0

8°. 47'. 50''
½ Diamet. ☉ = 16. 17

Altitud.

Altitud. merid. centri ⊙ refr. et Paral. corr.	=	8°. 31′. 33″
Diſt. mer. centri ⊙ a Zenith refr. et Par. corr.	=	81°. 28′. 27″
Diſt. merid. α Lyrae a Zenith refr. corr.	=	76. 49. 8
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith	=	158°. 17′. 35″
Poſita obliquit. eclipt. An. 1728.	=	23°. 28′. 38″
Declinatio centri ⊙ erit - -	=	16°. 58′. 30″ A.
Diſt. centri ⊙ a Polo Aequat. bor.	=	106°. 58′. 30″
Diſt. α Lyrae a Polo Aequat. bor.	=	51. 26. 47
Summa diſt. a Polo aequat. bor.	=	158°. 25′. 17″
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith	=	158. 17. 35
Diſt.	=	7′. 42″
Error igitur quadrantis ab altit. obſeruatis ſubtrah.	=	3′. 51″
Altitudo merid. α Lyrae refr. corr.	=	13°. 10′. 52″
Error quadr.	−	3. 51
Altit. merid. vera α Lyrae	=	13° 7′. 1″
Declinatio α Lyrae	=	38. 33. 13
Altitudo Aequatoris	=	25°. 26′. 12″
Eleuatio Poli Archangel.	=	64°. 33′. 48″

Comparatio altit. merid. α Lyrae infra Polum cum altit. merid. ⊙ d. 21. Febr.

Altitudo merid. app. marg. ⊙ bor.	=	15°. 4′. 45″
Refr. et Parall. - -	=	− 3. 28
		15°. 1′. 17″
½ Diameter ⊙	=	16. 14

Alt. merid. centri ☉ Refr. et Parall. corr.	= 14°.45′. 3″
Diſt. mer. centri ☉ a Zenith refr. et Par. corr.	= 75°. 14′. 57″
Diſt. merid. α Lyrae a Zenith refr. corr.	= 76. 49. 8
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith	= 152°. 4′. 5″
Declinatio centri ☉	= 10°.45′.23″½A.
Diſt. centri ☉ a Polo Aequat. bor.	= 100°.45′.23″½
Diſt. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - -	= 51. 26. 47
Summa diſt. a Polo bor aequat. - -	= 152°.12′.10″½
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith	= 152°. 4′. 5″
Different.	= 8′. 5″½
Error igitur quadr. ab altitud. obſer. ſubtr.	= 4′. 3″
Altitud. merid. α Lyrae refr. corr. -	= 13°.10′.52″
Error quadr. - -	= − 4. 3
Altitud. merid. vera α Lyrae - -	= 13°. 6′.49″
Declin. α Lyrae	= 38. 33. 13 bor.
Altitud. Aequat.	= 25°.26′.24″
Eleuatio Poli Archangel.	= 64°.33′.36″.

Comparatio altitud. merid. α Lyrae infra Polum cum altitud. merid ☉ d. 26. Febr.

Altitudo merid. app. marg. ☉ bor. - -	= 16°.54′.45″
Refr. et Parall. - - -	= − 3. 4
	16. 51. 41.
½ Diam. ☉	= − 16. 13.

Altit.

Altit. merid. centri ☉ Refr. et Parall. corr.	=	16°.35′.28″
Diſt. mer. centri ☉ a Zenith Refr. et Par. corr.	=	73°.24′.32″
Diſt. merid. α Lyrae a Zenith Refr. corr.	=	76. 49. 8
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith -	=	150°.13′.40″
Declinatio centri ☉	=	8°.55′.23″ A.
Diſt centri ☉ a Polo Aequat. bor. - -	=	98°.55′.23″
Diſt. α Lyrae a Polo Aequat. bor. - -	=	51. 26. 47
Summa diſt. a Polo Aequat. bor. - -	=	150° 22′.10″
Summa diſt. merid. obſeruat. a Zenith	=	150°.13. 40
Differ.	=	8′.30″
Error igitur quadrantis ab altit. obſeru ſubtr.	=	4′.15″
Altitudo merid. α Lyrae Refr. corr. - -	=	13° 10′.52″
Error quadr. - - - -	=	— 4. 15.
Altit. merid. vera α Lyrae - - - -	=	13°. 6′.37″
Declin. α Lyrae - - -	=	38. 33. 13 bor.
Altit. Aequat. - - - - -	=	25°.26′.36″
Eleuatio Poli Archangel. - - - -	=	64°.33′.24″.

Ex prima igitur comparatione prodit eleuatio Poli Archangel = 64° 33′.48; ex ſecunda = 64° 33′.36″; ex tertia = 64°. 33′. 24″.

Hinc media atque proxime ad veram accedens eleuatio Poli Archangel. erit = 64°. 33′. 36″.

In mappa Academiae ſitus vrbis Archangelopolis minutis aliquot iuſto borealior eſt.

Deter-

Determinatio longitudinum vrbium Rigae et Reualiae.

Incertae atque ancipites ſemper mihi viſae ſunt in mappa Academiae vrbium Rigae et Reualiae notatae poſitiones, reſpectu praecipue earum longitudinum. Operae igitur quin pretium eſſet non dubitaui, vt ex obſeruationibus, quas Academiae Adiunctus *Kraſſilnikow* hiſce in vrbibus habuit, earum longitudinem atque latitudinem diligentius inueſtigarem. Longitudinum determinatio, cum nullae adſint obſeruationes Satellitum Iouis reſpondentes iis, quas *Kraſſilnikow* habuit, difficillima quidem videtur; artificium vero, in quo elaborando ac perficiendo noſtris temporibus euigilarunt Aſtronomorum curae et cogitationes, eclipſes Satellitum Iouis tabularum ope ſtricte praedicendi, noſtro in negotio difficultates vel maiori ex parte tollere atque ſuperare valet: Tabulae enim motuum Satellitum Iouis, quas Cel. *Wargentin* paucis abhinc annis, ex magno obſeruationum numero, ſollerter concinnauit, adeo arcte cum coelo ſunt connexae, vt calculos eclipſium 1^{mi} Satellitis Iouis, ſecundum harum Tabularum numeros inſtitutos, raro integro minuto primo temp. ab obſeruationibus diſſentire ſoleat.

Summo propterea iure, obſeruationibus correſpondentibus calculo noſtro abſentibus, obſeruationes, imprimis eclipſium I^{mi} Satellitis Iouis reliquis accuratiores cum calculo ex ſupra dictis tabulis conferre et longitudinem locorum, de quibus ſermo, exinde ſequenti modo deducere licet.

An. 1750.

An. 1750. d. 31. Oct. ſt. v.	$15^h. 4'. 26''$	tempore vero obſeruata fuit accurate Rigae emerſio I^{mi} Satell. Iouis, tubo 16. ped.
	13. 39. 30.	tempore vero emerſio haec contigit Pariſiis ſec. Tab. Cel. *Wargentini.*
	$1^h. 24'. 56''$	Differentia Meridianorum Pariſios inter et Rigam.
An. 1750. d. 18. Dec. ſt. v.	$9^h. 44'. 14''$	tempore vero optime obſeruabatur Rigae emerſio I^{mi} Satell. Iouis tubo 16 ped.
	8. 18. 37	tempore vero emerſio haec contigit Pariſiis ſec. Tab. *Wargent.*
	$1^h. 25'. 37''$	Differ. Merid.

Differentia itaque Meridianorum media, ex binis emerſionibus I^{mi} Satellitis Iouis optime obſeruatis, deducta, $= 1^h. 25'. 15''$.

Occurrit adhuc in ephemeridibus *Kraſilnikowii* emerſio II^{di} Satellitis Iouis exacte obſeruata Rigae An. 1750.

 d. 22.

d. 22. Dec. $6^h.0'.43''$ tempore vero: ſecundum Tabulas *Wargent.* emerſio haec contigit 4. 39. 19 temp. vero Pariſiis; differentia itaque Meridianorum ex hac obſeruatione prodiret $= 1^h. 21'. 24''$.

Cum vero II^di^ Satellitis numeri non adeo exacte coelo reſpondeant, horumque Meridianorum differentia ſupra ex obſeruationibus I^mi^ Satellitis accuratius deducta, ſit $= 1^h: 25'. 15''$, hac ſecundi Satellitis obſeruatione, ad inueniendum veram Merid. Pariſini et Reualienſis differentiam, vtar. In ephemeridibus enim obſeruationum *Kraſilnikowii* duae tantum obuiae ſunt II^di^ Satellitis obſeruationes Reualiae habitae; altera ab ipſo *Kraſilnikow* d. 29. Dec. 1750. peracta fuit, altera autem d. 30. Ian. 1751 a diſcipulo *Kurganow* aere impuro ibidem habita eſt. Priori propterea ad noſtrum inſtitutum vti fas eſt. Hunc vero in finem ex ſupra relata emerſione II^di^ Satellitis Iouis d. 22. Dec. 1750. Rigae obſeruata, errorem Tabularum *Wargent.* primum deducamus neceſſe eſt. Si ponamus igitur differentiam Merid. inter Pariſios et Rigam ex emerſionibus primi Satellitis Iouis accurate ſatis eſſe definitam, haud difficile patet, errorem Tabularum *Wargentinii* ſecundi Satellitis Iouis tunc temporis fuiſſe $= 3'. 50''$ a tempore ex Tabulis deducto ſubtrahendis, verum vt habeatur emerſionis momentum. Obſeruatio Reualiae habita 7 tantum diebus poſterior eſt altera, ex qua errorem Tabularum determinaui, eaque de cauſa hunc in finem optimo iure adhiberi poteſt. Quo ſtatuto, inueni tempus emerſionis verum ſecundi Satellitis Iouis ſec. Tab. *Wargent.* ſub Merid. Pariſ. d. 29. Dec. 1750 $7^h. 14'. 57''$; ſubductis $3'. 50''$

pro

pro errore Tabularum, habebimus verum emerſionis momentum Pariſiis $7^h. 11'. 7''$, quod Reualiae obſeruatum fuit $8^h. 38'. 57''$. Differentia itaque Merid. inter Pariſios et Reualiam erit $= 1^h. 27'. 50''$ temp. et longitudo Reualiae $= 41^\circ. 57'. 30''$, longitudo autem vrbis Rigae $= 41^\circ. 18'. 45''$, poſita longitudine Meridiani Pariſini $= 20^\circ. 0'$. Secundum Mappam geogr. Academiae longitudo Reualiae eſt $= 42^\circ. 14'$, et longitudo Rigae Parif $= 42^\circ. 17'$, adeo vt error in longitudine Meridiani Reualienſis ſit $= 16\frac{1}{4}'$, et Meridiani Rigenſis $= 58\frac{1}{4}'$ ſiue integro fere gradui. Riga itaque in Mappa geogr. Academiae Merid. Petropol. propior quam Reualia, nunc magis occidentem verſus eſt collocanda. Neque vero mihi temperare poſſum, quo minus fatear, obſeruationes, ad definiendam latitudinem aeque ac longitudinem hiſce in locis inſtitutas, haud ſufficere, ſiue non adeo eſſe accuratas, vt earum beneficio ſupra dictarum vrbium latitudo et praecipue longitudo, intra vnum min. prim. temp. ſtabiliri poſſit. Tabularum primi Satellitis Iouis erroris quidem quantitatem accurate definire non poſſumus, eam vero vnum min. prim. temp. non ſuperare, ſtatuere fas eſt. De errore in obſeruationibus ipſis haerente, aeque quidem incerti ſumus; ex obſeruationum autem circumſtantiis concludere licet, errorem hunc, ſi quis adeſt, a tempore emerſionum ſupra notato eſſe ſubtrahendum, ita vt longitudo Rigae et Reualiae erroris huiusce quantitate decreſcere, error contra vero Mappae geogr. eadem quantitate accreſcere debeat.

Latitudinis vrbis Rigae determinatio.

Latitudo vrbis Rigae vt rite determinaretur, *Kraſilnikowius* aequales capere debuiſſet altitudines fixarum in vtraque Meridiani parte; hoc vero aſtronomorum artificio neglecto, altitudines Solis in parte Meridiani auſtrali obſeruatas, cum altitudinibus fixarum fere aequalibus, in parte Meridiani boreali, ſiue infra Polum captis, comparare cogimur.

Obſeruationes itaque, quae inſtituto noſtro maxime accommodae videntur, ſunt altitudo meridiana apparens marginis Solis borealis obſeruata d. 8. Oct. 1750. $= 23^\circ.14'.20''$ et altitudo meridiana apparens ϱ Vrſae maioris eodem inſtrumento infra Polum obſeruata d. 12. Octobr. 1750. $= 23^\circ.7'.0''$. Poſita obliquitate Eclipticae tempore obſeruationum $= 23^\circ.28'.30''$, et differentia Meridianorum inter Pariſios et Rigam $= 1^h.25'.15''$, inueni declinationem centri Solis pro meridie d. 8. Oct. $= 10^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$ A. Declinatio vero ϱ Vrſae maioris ſec. Catal. Cl. *de la Caille* eſt $= 56^\circ.14'.35''$ bor. Ad arcum igitur Meridiani apparentem, limbo Solis boreali et ϱ Vrſae maioris interceptum, inueniendum, diſtantiam apparentem limbi Solis borealis et ϱ Vrſae maioris a Polo Aequatoris boreo in vnam ſummam colligamus neceſſe eſt: diſtantia autem centri Solis vera a Polo Aequatoris boreo eſt $= 100^\circ.1'.16\frac{1}{2}''$, quocirca erit diſtantia vera limbi Solis borealis a Polo Aequatoris boreo $= 99^\circ.45'.7\frac{1}{2}''$, eiusdemque diſtantia apparens $= 99^\circ.43'.0''$, poſita nimirum refractione $= 2'.16\frac{1}{2}''$ et Parall. Solis in altitud. $= 9''$. Simili

modo

modo prodibit diſtantia vera ϱ Vrſae maioris a Polo Aequatoris boreo $= 33^\circ.45'.25''$ eiusdemque diſtantia apparens, propter refractionem $2'.17''$, $= 33^\circ.43'.8''$; arcus igitur Meridiani apparens inter limbum Solis borealem et ϱ Vrſae maioris $= 133^\circ.26'.8''$. Eundem iam Meridiani arcum ex obſeruationibus ſupra relatis inuenimus $= 133^\circ.38'.40''$, quo cum antecedenti comparato, habebimus duplum erroris quadrantis $= 12'.32''$ ideoque ſimplicem quadrantis errorem circa 23. altitud. gradum $= 6'.16''$ ad altitudines obſeruatas addendum.

Errore quadrantis circa ſuprà dictum diuiſionis punctum ſtabilito, facili negotio ex iisdem obſeruationibus veram vrbis Rigae latitudinem ſequenti modo aſſignare poſſumus:

Altitudo merid. app. limbi ☉ bor.	$= 23^\circ.14'.20''$
Error quadr.	$= + \quad 6.\ 16$
Altit. mer. app. errore quadr. corr.	$= 23^\circ.20'.36''$
Refract. et Paral.	$= - \quad 2.\ 7\frac{1}{2}$
Altit. merid. limbi ☉lis bor. vera	$= 23^\circ.18'.28\frac{1}{2}''$
½ Diameter ☉	$= - \quad 16.\ 9$
Altitud. merid. vera centri ☉lis	$= 23^\circ.\ 2'.19\frac{1}{2}''$
Declinatio centri ☉lis	$= 10.\ 1.\ 16\frac{1}{2}$ A.
Altitudo Aequatoris vera	$= 33^\circ.\ 3'.36''$, hinc
Eleuatio Poli Rigae	$= 56^\circ.56'.24''$.

Eodem modo eleuatio Poli ex altera obſeruatione ſtellae ϱ Vrſae maioris deduci poteſt. Multo vero accuratius definiri poſſet eleuatio Poli, ſi *Kraſilnikowius*

aequales obſeruaſſet fixarum notabiliorum altitudines meridianas boream auſtrumque verſus. Latitudo vrbis Rigae in Mappa geogr. Acad. eſt $=56^{\circ}.51\frac{1}{2}'$ circiter.

Latitudinis vrbis Reualiae determinatio.

Latitudinem vrbis Reualiae conſimili modo ex obſeruationibus fixarum, a *Kraſilnikowio* ibi habitis, definire conatus ſum. Hunc in finem adhibui altitudinem meridianam apparentem ſtellae Rigel, obſeruatam Reualiae d. 19. Ian. 1751 $= 21^{\circ}.58'.20''$, itemque altitudinem apparentem meridianam γ Draconis d. 21. Ian. 1751. eodem organo inuentam $= 20^{\circ}.53'.5''$. * Declinatio ſtellae Rigel, ſec. meas obſeruationes Pariſiis habitas, pro tempore obſeruationis eſt $= 8^{\circ}.30'.33''$ A. ** Declinatio autem γ Draconis ſec. obſeruationes Cel. Aſtronomi Anglicani *Beuiſii* mecum communicatas $= 51^{\circ}.31'.21''$ bor. poſita eleuatione Poli Obſeruatorii Grenowicenſis $= 51^{\circ}.28'.30''$. Hiſce poſitis, erit diſtantia vera ſtellae Rigel a Polo Aequatoris boreo $= 98^{\circ}.30'.33''$, eiusdemque diſtantia apparens propter refract. $= 98^{\circ}.28'.7''$. Eodem modo reperimus diſtantiam veram γ Draconis a Polo boreo Aequat. $= 38^{\circ}.28'.39''$ eiusdemque diſtantiam apparentem a Polo $= 38^{\circ}.26'.7''$. Arcus itaque Meridiani apparens inter Rigel et γ Draconis erit $= 136^{\circ}.54'.14''$. Secundum obſeruationes ſupra relatas vero eiusdem arcus menſura eſt $= 137^{\circ}.8'.35''$, ita vt erroris quadrantis duplum ſit $= 14'.21''$ errorque eiusdem inſtrumenti ſimplex $= 7'.10\frac{1}{2}''$ ad altitudines obſeruatas addendus; quo

quo inuento, eleuatio Poli Reualiae ſequenti calculo definitur:

Altitudo merid. app. Rigel = 21°. 58′. 20″
Error quadr. = + 7. 10½

Altit. mer. corr. = 22°. 5′. 30½″
Refr. = − 2. 25

Altit. merid. vera = 22°. 3′. 5½″
Declinatio ſtellae = 8. 30. 32½ A.

Altitudo Aequat. = 30°. 33′. 38″ vel
Eleuatio Poli Reualiae = 59°. 26′. 22″.

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo eſt = 59°. 22′.

* Inueſtigatio declinationis ſtellae Rigel ex obſeruationibus, quas quadrante 3 ped. radio in Obſeruatorio Regio Pariſino inſtitui.

1748. ſt. n. Ad lumen crepuſculi et diei

4. Mart. altit merid. app. ſtellae Rigel	=	32°. 41′. 3″. 3
7. Mart.	- - - -	32. 41. 4. 0
16. Mart.	- - - -	32. 41. 0. 8

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione circa horizontem et verticem inſtituta deductus, aequatur 30″ ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendis. Habebimus igitur altitud. merid. ſtellae Rigel, errore quadrantis et refractione correctam, vt ſequitur:

d. 4. Martii $=32°.39'.8''.3$
7. Mart. - - 32. 39. 4. 0
16. Mart. - - 32. 39. 0. 8.

Aberratio ſtellae Rigel in declinat. d. 4. Mart. eſt $=10''.2$, d. 7 Mart. $=10''.3$ et d. 16 Mart. $=10''.4$ auſtrum verſus. Quantitates has ad altitud. merid. ſupra notatam addendo, inueniemus altit. merid. Rigel errore quadrantis, refractione et aberratione correctam,

d. 4 Mart. $=32°.39'.13''.5$
7. Mart. - - 32. 39. 14. 3
16. Mart. - - 32. 39 11. 2, hinc

Media alt. mer. vera Rigel $=32°.39'.13''$.

Eleuationem Poli Obſeruatorii Reg. Pariſ. eodem inſtrumento accuratiſſime inueni $=48°.50'.14''$, ſiue altit. Aequat. $=41°.9'.46''$, ex qua facili negotio fluit declinatio vera ſtellae Rigel ad initium menſ. Mart. 1748. $=8°.30'.33''$ Auſtr. Correctio declinat. huius ſtellae a nutatione axis telluris producta, aequatur $7''.8$ add. ita vt eius declinat. media ad init. menſ. Mart. ſit $=8°.30'.40''.8$ A. ſiue declinat. media ſtellae Rigel ad initium An. 1748. $=8°.30'.41''.6$ A.

Variatio declinationis ſtellae Rigel annua cum ſit $5''$, habebimus declinationem huius ſtellae mediam ad 19. Ian. ſt. v. 1751. reductam $=8°.30'.26''.2$. A. Aberratio in declinat. tunc temporis erat $=7''.3$ auſtrum verſus et correctio declinat. ob nutat. axis telluris $=0''.6$ ſubtr. quocirca erit declinatio ſtellae Rigel apparens ad 19 Ian. ſt. v. 1751. reducta $=8°.30'.33''$. A.

** In-

** Inueſtigatio declinationis ſtellae γ Draconis ex obſeruationibus Cel. Beuiſii in Obſeruatorio Regio Grenowicenſi ſectore 8. pedum radio peractis.

1748. Aug. $\frac{6}{17}$. Limbo ſectoris Orient. ſpect dist. γ Drac. a vertice $= 0°. 3'. 5''$ } Bor.
Aug. $\frac{16}{27}$. Limbo ſect. Occid. ſpect. $= 0°. 3'. 27'$ } verſ.

Aberratio declinat. ſtellae γ Drac. d. $\frac{6}{17}$. Aug. aequatur $16'.1$, et d. $\frac{16}{27}$. Aug. $17''.7$ boream verſus. Diſtantia igitur huius ſtellae a vertice Obſeruat. Grenowicenſis, aberratione correcta, erit:

d. $\frac{6}{17}$ Aug. $= 0°. 2'. 48''. 9$
d. $\frac{16}{27}$. Aug. $= 0°. 3'. 9''. 3$ hinc

Vera γ Draconis a vertice diſtantia $= 0°. 2'. 59''. 1$

Eleuatio Poli Obſeruatorii Grenowicenſis ponitur $= 51°. 28'. 30''$, ex qua porro deducimus declinationem veram ſtellae γ Draconis circa tempus ſupra notatum $= 51°. 31'. 29''. 1$. bor. Correctio praeterea declinationis huius ſtellae, a nutatione axis telluris producta, tunc temporis erat $= 5''. 7$ add. ideoque declinatio γ Draconis media ad initium anni 1748. $= 51°. 31'. 35''. 4$ bor. habita nimirum variationis declinat. huius ſtellae ob praeceſſionem aequinoctiorum mediam ratione.

Ad declinationem iam apparentem γ Draconis pro tempore obſeruationis Reualienſis inueniendum, ha-

 bemus

bemus variationem declinat. huius ſtellae mediam, γ, interuallo temporis inter obſeruationem Rewalienſem et epocham ſupra notatam reſpondentem 2''. 5 ſubtr. Correctionem declinationis huius ſtellae ob nutationem axis telluris = 1''. 4 add. et aberrationem in declinat. tempori obſeruationis conuenientem = 13''. 4 auſtrum verſus, hinc declinat. γ Draconis apparent. ad 21 Ian. ſt. v. 1751. = 51°. 31'. 21''. 17 bor.

Determinatio longitudinis loci Dager-Ort ad oram maritimam Inſulae Dagho occidentalem ſiti.

Quia *Kraſilnikowius* eodem in itinere nonnullas quoque obſeruauit in Inſula Dagho, in loco Dager-Ort, primi Satellitis Iouis immerſiones, non alienum eſſe videtur a noſtro inſtituto, ex memoratis obſeruationibus loci Dager-Ort longitudinem methodo in determinatione longitudinis vrbis Rigae expoſita eruere; praeſertim cum immerſiones Satellitum ad hocce negotium magis adhuc multo, quam emerſiones, ſint accommodatae.

An. 1750. d. 31. Iul. ſt. v. 11h. 45'. 7'' tempore vero accurate obſeruata fuit in loco Dager Ort immerſio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped.
11. aug. ſt. n.

10h.

$10^{h}.26'.44''$. temp. vero immerſio haec contigit Pariſiis ſec. Tab. *VVarg.*

$1^{h}.18'.23''$ Differentia Mer. Pariſios inter et locum Dager-Ort.

An. 1750. d. 16. Aug. ſt. v. $10^{h}.\ 4'.23''$ temp. vero obſeruabatur ibidem immerſio primi Satellitis Iouis tubo 16. ped. coelo grate ſereno, vento autem vehemente.
27 st. n.

$8.\ 46.\ 16$ temp. vero immerſio haec contigit Pariſiis ſec. Tab. *VVargent.*

$1^{h}.18'.\ 7''$ Differentia Mer.

An. 1750. d. 6. Sept. ſt. v. $15^{h}.53'.32''$ temp. vero accuratiſſime obſervata fuit ibidem immerſio primi Satell. Iouis tubo 16. ped.
17. st. n.

$14^h. 35'. 6''$ temp. vero immerſio haec contigit Pariſiis ſec. Tab. *Warg.*

$1^h. 18'. 26''$ Diff. Meridian.

Differentia Meridianorum igitur media inter Pariſios et locum Dager-Ort erit $= 1^h. 18'\ 20''$, et longitudo loci Dager-Ort $= 39° \ 35'$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo eſt $= 39°. 26'$.

Determinatio latitudinis loci Dager-Ort.

Eleuationem Poli huius loci, ex aequalibus fixarum altitudinibus meridianis boream atque auſtrum verſus captis, ſic determinare adniſus ſum:

D. 20 Iul. 1750. *Kraſilnikow* quadrante 2½ ped. radio obſerv.

Altitudinem merid. app. Lucidae Aquilae	$= 39°. 25. 42''$
d. 22. Iulii - - - - - - - -	$= 39. 25. 57$
d. 28. Iulii - - - - - - - -	$= 39. 26. 7$
Altit. merid. app. media α Aquilae	$= 39°. 25'\ 55''$

Eodem inſtrumento ſequentes cepit in parte Meridiani boreali altitudines meridianas κ Draconis:

d. 21. Iul. 1750.	$= 40°. 14'. 20''$
3. Aug. - - -	$= 40. 14. 5$
5. Aug. - -	$= 40. 14. 20$

Altit. merid. app. media κ Draconis $= 40°. 14'. 15''$.

Decli-

Declinatio α Aquilae tempore obſeruationum ſupra relatarum eſt $= 8^\circ.13'.53''$. Bor. Declinatio vero $\varkappa$ Draconis $= 71^\circ.9'.55''$. Bor. Diſtantia itaque vera α Aquilae a Polo Aequat. boreo erit $= 81^\circ.46'.7''$ eiusdemque diſtantia apparens ab ante dicto Polo $= 81^\circ.44'.56''$. Simili modo prodit diſtantia vera $\varkappa$ Draconis a Polo Aequat. boreo $= 18^\circ.50'.5''$ eiusdemque diſtantia apparens $= 18^\circ.48'.56''$. Arcus igitur Meridiani apparens interiectus $= 100^\circ.33'.54''$; cum vero idem arcus ex altitudinum merid. obſeruatarum complemento prodit $= 100^\circ.19'.50''$ erroris quadrantis duplum erit $= 14'.2''$, ſiue error ſimplex ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus $= 7'.1''$.

Poli igitur eleuationem ſequenti iam ratione eruere licet:

Altitudo meridiana app. α Aquilae	$= 39^\circ.25'.55''$
Error. quadrantis	$= -\ 7.\ 1$
Altit. merid. app. errore quadr. corr.	$= 39^\circ.18'.54''$
Refr.	$= -\ 1.\ 11$
Altitudo merid. vera α Aquilae	$= 39^\circ.17'.43''$
Declin. bor. ſtellae	$= 8.\ 13\ 53$
Altitudo Aequatoris	$= 31^\circ.\ 3'.50''$ ſiue
Eleuatio Poli loci Dager-Ort - -	$= 58^\circ.56'.10''$.

Vt de latitudine huius loci euidentius conſtaret, ſimilem calculum aequales Solis ac fixae α Vrſae maioris altitudines meridianas adhibendo ſequenti modo inſtitui:

D. 10 Sept. 1750. *Kraſilnikow* altero inſtrumento $1\frac{1}{4}$ ped. radio obſeruauit in loco Dager-Ort altitudinem apparentem meridianam limbi Solis borealis $= 31°. 56'. 10''$, eodemque die altit. app. merid. α Vrſae maioris infra Polum $= 31°. 58'. 0''$.

Declinatio centri Solis pro meridie d. 10. Sept. poſita differentia Merid. inter Dager-Ort et Pariſios $= 1^h. 18'. 20''$, et obliquitate Eclipticae $= 23°. 28'. 30''$, erit $= 0°. 41'. 54''$ bor. Declinatio vero α Vrſae maioris ſecundum Catalogum Cel. *de la Caille* $= 63°. 5'. 52''$. Diſtantia igitur vera centri Solis a Polo Aequatoris boreo erit $= 89°. 18'. 6''$ eiusdemque diſtantia apparens $= 89°. 16'. 41''$; poſita itaque ½ diametro Solis $= 16'. 1''$, prodibit diſtantia app. limbi Solis bor. a Polo Aequat. boreo $= 89°. 0'. 40''$. Diſtantia vero apparens α Vrſae maioris ab eodem Polo, habita ſitus huius ſtellae infra Polum ratione, eſt $= 26°. 52'. 34''$. Arcus propterea apparens Meridiani inter limbum Solis borealem et α Vrſae mai. infra Polum erit $= 115°. 53'. 14''$, eiusdem vero arcus menſura ex obſeruatis altitud. merid. elicitur $= 116°. 3'. 50''$, vnde duplum erroris quadrantis $= 10'. 36''$ ſiue error quadrantis ſimplex ad altitudines obſeruatas addendus $= 5'. 18''$.

Altit. mer. app. α Vrſae mai. infra Polum	$= 31°.$	$58'.$	$0''$
Error quadr.	$= +$	$5.$	18
	32	$3.$	18
Refr.	$= -$	$1.$	34

Alti-

Altitudo merid. vera α Vrſae mai. $= 32°. 1'. 44''$
Declinatio ſtellae $= 63. \; 5. \; 52$

Altitudo Aequatoris $= 31°. \; 4'. \; 8''$ ſiue
Eleuatio Poli $= 58°. 55'. 52''$.

Qua cum ſupra inuenta comparata, latitudo loci Dager-Ort videtur eſſe $= 58°. 56'. 0''$. Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci latitudo eſt $= 59°. 1\frac{1}{2}'$.

Determinatio latitudinis vrbis Naruae.

Kraſilnikowius in itinere Reualia Petropolin paucas habuit Naruae obſeruationes, altitudines nimirum cepit meridianas fixarum nonnullarum quadrante $1\frac{1}{2}$ ped. radio, ex quibus, quantum potero, accurate huiusce vrbis latitudinem ſequenti ratione definire conabor. Ad hoc inſtitutum maxime idoneae videntur altitudines meridianae Sirii et Lucidae in cauda Cygni; Sirii altit. merid. app. obſeruata eſt $= 14°. 14'. 45''$, Lucidae vero in cauda Cygni altitud. app. merid. infra Polum $= 13° \; 49'. 20''$. Secundum obſeruationes Cel. *Le Monnier* declinatio Sirii ad tempus obſeruationis reducta eſt $= 16°. 23' \; 32''$ A. Lucidae autem Cygni declinatio $= 44°. 24'. 2''$ Bor. Hiſce admiſſis, erit diſtantia vera Sirii a Polo Aequat. boreo $= 106°. 23'. 32''$ eiusdemque ſtellae diſtantia apparens, habita altitudinis obſeruatae ratione, $= 106°. 19'. 42''$. Simili modo prodibit diſtantia apparens Lucidae in cauda Cygni a Polo Aequat. boreo $= 45°. 32'. 1''$; Harum ſumma ſiſtet arcum Meridiani apparentem inter Sirium et Lucidam

Cygni

Cygni $=151°.51'.43''$, qui obſeruatus fuit $=151°.55'.55''$. Erroris itaque quadrantis duplum erit $=4'.12'$, ſiue error ſimplex ad altitudines obſeruatas addendus $=2'.6''$.

Altit. merid. app. Sirii	=	14°.14'.45''
Error quadr.	= +	2. 6
		14. 16. 51
Refr.	= −	3. 50
Altit. merid. vera Sirii	=	14°.13'. 1''
Declin. Sirii auſtr.	=	16. 23. 32
Altitudo Aequatoris	=	30°.36'.33'' ſiue
Eleuatio Poli Naruae	=	59°.23'.27''.

In Mappa geogr. Academiae huius vrbis latitudo eſt $= 59°.31'$.

Inueſtigatio poſitionum locorum nonnullorum, per quos iter habuit *Ioſ. Nic. de l'Isle.*

Determinatio latitudinis vrbis Bereſow.

Varias multasque quidem inſtituit *De l'Islius* Bereſouii obſeruationes, nullas tamen cepit altitudines ſiderum aequales Auſtrum Boreamque verſus, ex quibus inſtrumenti errores accurate definiri poſſent. Boream verſus enim nullam praeter Pollucem obſeruauit fixam, cuius igitur altitudines meridianas cum altitudinibus meridianis Arcturi, ad latitudinem huius vrbis determinandam, comparare cogimur. Bis quidem Bereſouii inveſti-

veſtigauit *De l'Iſlius* errorem quadrantis circa horizontem per inuerſionem huius organi, nimirum d. 12. Maii 1740, vbi error quadrantis circa horizontem erat = 6'. 1½'' ad altitudines obſeruatas addend. et d. 24. Maii, exiſtente tunc errore organi circa horiz. = 5'. 2'' add. Errorem vero quadrantis circa Zenith illo ſaltem tempore non determinauit. Quam ob cauſam conſultum viſum eſt, inſtrumenti errorem latitudinemque loci ſimul ſequenti modo eruere.

Altitudo merid. app. Polaris infra Polum	
1740. d. 3. Maii ſt. n.	= 61°. 45'. 30''
d. 7. Maii - - -	61. 45. 0
d. 14. Maii - - -	61. 45. 0
Media igit. alt. mer. app. Pol. ad id tempus	= 61°. 45'. 10''
Refr.	= — 28
Altit. merid. obſeruata Polar. refract. corr.	= 61°. 44'. 42''
Altitudo merid. app. Arcturi	
1740. d. 14. Maii ſt. n.	= 46°. 31'. 15''
15. Maii - - - -	46. 31. 30
18. Maii - - - -	46. 32. 10
Media altitudo merid. app. Arcturi	= 46°. 31'. 38''
Refr.	= — 51
Altit. merid. obſeruata Arcturi refr. corr.	= 46°. 30'. 47''.

Hiſce poſitis, declinationem apparentem Polaris ad tempus ſupra notatum ſic definire conatus ſum. Ex obſeruationibus quas Pariſiis habui, deduxi declinatio-

nem mediam ſtellae Polaris ad initium An. 1748. $= 87^{\circ}.57'.22''$. Motus Polaris annuus in declinat. cum ſit $= 19''.37'''$, erit declinatio Polaris media, ad tempus obſeruationum Bereſouii habitarum reducta $= 87^{\circ}.54'.52\frac{1}{2}''$. Propter nutationem axis telluris ſubtrahenda ſunt $9''$ vt obtineatur declinatio Polaris vera $= 87^{\circ}.54'.43\frac{1}{2}''$. Aberratio huius ſtellae in declinat. tunc temporis erat $= 13''$ auſtrum verſus, ita vt eius declinatio apparens, ad tempus ſupra memoratum, ſit $= 87^{\circ}.54'.30\frac{1}{2}''$ bor. Declinatio Arcturi ad idem tempus ex catalogo Celeb. *le Monnier* prodit $= 20^{\circ}.33'.3\frac{1}{2}''$ bor.

Hinc complem. declin. app Arcturi	$= 69^{\circ}.\ 26'.\ 56\frac{1}{2}''$
Compl. declin. app. Polaris	$= 2.\ 5.\ 29\frac{1}{2}$
Arcus Merid. inter Arcturum et Polarem infra Polum - -	$= 71^{\circ}.\ 32'.\ 26''$
Compl. altit. merid. obſeruatae Polaris infra Polum, refr. corr. -	$= 28^{\circ}.\ 15'.\ 18''$
Complem. alt. merid. Arcturi obſeruat. refr. corr. - -	$= 43.\ 29.\ 13$
Arcus Merid. obſeruatus inter Arcturum et Polarem infra Polum	$= 71^{\circ}.\ 44'.\ 31''$
	$71.\ 32.\ 26$
Erroris quadrantis duplum - -	$= 0^{\circ}.\ 12'.\ 5''$
Siue error ſimplex ad altititudines obſeruatas addendus - -	$= 6'.\ 2\frac{1}{2}''$

Errore quadrantis ſic inuento, latitudo Bereſouii nullo iam fere negotio definitur.

Alti-

Altitudo enim merid. Polaris infra Po-
lum refr. correcta $= 61°.44'.42''$
Error quadrantis $= + \quad 6. \quad 2\tfrac{1}{3}$

Altit. merid. Polaris vera $= 61°.50'.44\tfrac{1}{3}''$
Diſtantia app. Polaris a Polo Aequat. $= \quad 2. \quad 5.29\tfrac{2}{3}$

Eleuatio Poli vera Bereſouii $= 63°.56'.14''$

Huius loci latitudo ſatis accurate in Mappa geogr. Academiae denotata eſt; longitudo vero, quae ex obſeruationibus Bereſouii habitis accurate deduci non poteſt, ſecundum Mappam aequatur $83°.2'$.

Determinatio latitudinis vici Samarowskoy-Yam.

Hoc in vico ſemel tantum in tranſitu obſeruauit *De l'Islius* altitudinem Solis meridianam, ex qua quantum potero accurate latitudinem deducere modo ſequenti conabor.

1740. d. 14. Iun. ſt. n. altitudo merid.
appar. marg. Solis bor. $= 52°.34'.30''$
Ponamus errorem quadr. $= + \quad 5. \quad 0$

$52.\ 39.\ 30$
Refr. et Parall. $= - \quad 34$

$52.\ 38.\ 56$
$\tfrac{1}{2}$ Diameter Solis $= - \ 15.\ 49$

Altit. merid. vera centri Solis $= 52°,23'.\ 7''$
Ponendo longitud. huius loci $= 86\tfrac{2}{3}°$ et obliquitate

 Eclipti-

Eclipticae $= 23^{\circ}.28'.30''$, inueni declinat. centri Solis $= 23^{\circ}.18'.33''$

Altit. Aequat. $= 29.\ 4.\ 34$ ſiue

Eleuatio Poli vici Samarowskoy-Yam $= 60^{\circ}\ 55\frac{1}{2}'$.

Secundum Mapp. geogr. Acad. huius loci longitudo eſt $= 86^{\circ}.\ 39'$ et latitudo $= 60^{\circ}.\ 58'$.

Determinatio latitudinis vici Demianskoy-Yam.

De l'Islius Samarovskoy-Yam profectus, altitudinem marginis Solis borealis maximam in vico Demianskoy-Yam rimari adnixus eſt, eamque inuenit

D 26. Iunii ſt. n. $= 54^{\circ}.\ 4'.\ 0''$

Poſito errore quadrantis $= +\ 5.\ 0$ erit

Altit. marg. ☉ bor. max. errore quadr. corr. $= 54^{\circ}.\ 9'.\ 0''$

Refr. et Parall. $= -\ 33$

$54^{\circ}.\ 8'.27''$

$\frac{1}{2}$ Diameter ☉lis $= -\ 15.48$

Altit. maxima vera centri ☉lis $= 53^{\circ}.52'.39''$

Poſita long. huius vici $= 87^{\circ}.25'$, erit

Declinatio centri Solis $= 23.23.13$ ideoque

Altitudo Aequat. $= 30^{\circ}.29'.26''$ ſiue

Eleuatio Poli vici Demianskoy-Yam $= 59^{\circ}.30'.34''$.

In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $= 87^{\circ}.25'$ et latitudo $= 59^{\circ}.38'$.

Deter-

Determinatio latitudinis vrbis Tobolsk.

Binas hac in vrbe obſeruauit *De l'Iſlius* marginis Solis borealis altitudines meridianas, alteram d. 5. Iul. ſt. n. $=54°.52'.30''$, alteram d. 15. Iul. $=53°.29'.0''$, hac vero in obſeruatione ventus valde erat impedimento, pauloque ante obſeruationem obſeruator vitrum quadrantis obiectiuum ſublatum reſtituerat; ea de cauſa priorem obſeruationem ad determinandum latitudinem adhibere ſatius videtur.

1740. d. 5. Iul. ſt. n. Alt. maxima app.
marg. ☉ bor. $= 54°. 52'. 30''$
Ponamus, vt antea, errorem quadr. $= + \quad 5. \quad 0$
$= 54°. 57'. 30''$
Refr. et Parall. $= - \quad 32$
$54. 56. 58$
½ Diam. ☉ $= - 15. 48$
Altit. merid. vera Centri ☉lis $= 54. 41. 10$
Poſita longit. huius vrbis $= 85°. 56$,
erit declin. Centri ☉ $= 22. 47. 56$ bor.
Altit. Aequat. $= 31°. 53'. 14''$ ſiue
Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk $= 58°. 6'. 46''$.

Altera autem obſeruatio, quantum a praecedenti differat, in ſequenti calculo elucebit.

1740. d. 15. Iul. ſt. n. Altit. merid.

app. marg. ☉ bor.	$= 53°. 29'. 0''$
Error quadr.	$= + \ 5. \ 0$
	53. 34. 0
Refr. et Par.	$= - \ \ 34$
	53. 33. 26
½ Diam. ☉	$= - \ 15. 49$
Alt. merid. vera Centri ☉	$= 53°. 17'. 37''$
Declin. Centri ☉	$= 21. 31. 11$ bor.
Alt. Aequat.	$= 31°. 46'. 26''$ ſiue
Eleuatio Poli vera vrbis Tobolsk	$= 58°. 13'. 34''$.

In Mappa geogr. Acad. vrbis Tobolsk longitud. ponitur $= 85°. 56'$. eiusdemque latit. $= 58°. 7'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Nowo-Vſolie itemque vici Weretia.

Vnicam tantum hoc in itinere rite obſeruare potuit *De l'Islius* Eclipſin Satell. Iouis, immerſionem nimirum primi Satellitis in vico Nowo-Vſolie viſam, ex qua accurate ſatis huius loci longitudinem modo ſequenti deduxi:

1740. d. 2. Sept. ſt. n. $15^h. 5'. 12''$ temp. vero ſatis bene obſeruata fuit in Nowo-Vſolie immerſio primi Sat. Iouis.

Eadem

Eadem immerſio ſecundum Tabulas *VVargent.* contigit Petropoli d. 2. Sept. $13^h.19'.51''$. Circa id vero tempus calculus ex Tabulis *VVargent.* $30''$ circiter citius quam obſeruatio incidiſſe videtur; addendo igitur $30''$ ad tempus immerſionis ſupra inuentum, prodibit immerſio primi Satellitis Iouis vera Petropoli $13^h.20'.20''$. Differentia itaque Meridianorum erit ſecundum hanc obſeruationem $= 1^h.44'.52''$ ſiue longitudo vici Nowo-Vſolie $= 74°.13'$. Qua cognita, latitudinem quoque huius loci ex obſeruationibus *De l'Islii* eruere iuuat.

Hunc in finem ea vtar altitudine merid. Solis, quam ibi obſeruauit *De l'Islius* quadrante nouis filis inſtructo recensque verificato.

Inuenit enim d. 12. Sept. ſt. n.

Altit. merid. app. marg. ☉ bor.	$= 34°.49'.30''$
Error quadr. d. 11. Sept. ex inuerſione quadr. circa horiz. inuentus	$= +\ 7.10$
	$34°.56'.40''$
Refr. et Parall.	$= -\ 1.\ 7$
	$34.55.33$
½ Diam. ☉	$= -\ 15.59$
Alt. merid. vera centri ☉lis	$= 34°.39'.34''$
Declinatio centri ☉lis	$= 4.\ 3.28$ bor.
Alt. Aequatoris	$= 30°.36'.\ 6''$
ſiue Eleuatio Poli vici Nowo-Vſolie	$= 59°.23'.54''$.

Vicus

Vicus quidem hic Nowo-Vſolie in Mappa geogr. Academiae non occurrit, de alio autem pago Weretie 8 Verſtis a Nowo-Vſolie auſtrorientem verſus diſtante, cuiusque locum in Mappa inueni denotatum, mentionem fecit *De l' Iſlius* in verificatione quadrantis circa horizontem occupatus. Ex hac igitur diſtantia et poſitione vici Weretie, reſpectu vici Nowo-Vſolie, facili iam negotio longitudinem atque latitudinem eiusdem aſſignare poſſumus. Peracto enim calculo, inueni differentiam latitudinum vici Weretie et Nowo-Vſolie $=1'.13''$, differentiam vero longitud. $=2'.23''$. Latitudo itaque vici Weretie erit $=59^{\circ}.22\frac{2}{3}'$ eiusdemque longitudo $=74^{\circ}.15'.23''$.

Secundum Mappam geogr. Acad. huius vici latitudo eſt $=59^{\circ}.20\frac{1}{2}'$ et longitudo $=74^{\circ}.29'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Saigatka.

De l' Iſlius monet, vicum Saigatka ab vrbe Caſan ſecundum longitudinem diſtare circiter $4^{\circ}.15'$ ortum verſus: Longitudinem autem vrbis Caſan *de l'Iſlius* ipſe accuratiſſime determinauit $=66^{\circ}.28'$, ita vt longitudo vici Saigatka ſit $=70^{\circ}.43'$.

Longitudine hac vici Saigatka admiſſa, eiusdem latitudinem ſequenti calculo definire valemus.

1740. d. 23. Sept. ſt. n. Altit. merid.

app. marg. ⊙ bor. obſ.	$= 33°. 14'. 0''$
Error quadr.	$= + 7. 10$
	33. 21. 10
Refr. et Par.	$= - 1. 13$
	33. 19. 57
½ Diam. ⊙	$= - 16. 2$
Alt. merid. vera centri ⊙	$= 33. 3. 55$
Declin. centri ⊙	$= 0. 12. 50.$ A
Alt. Aequatoris	$= 33°. 16'. 45''$ ſiue
Eleuatio Poli vera vici Saigatka	$= 56°. 43'. \frac{1}{4}.$

Secundum Mappam geogr. Academiae huius loci longitudo eſt $= 72°. 31'$, latitudo vero $= 57°. 12'$, ita vt error in longitudine ad 1. Gr. 48. Min. pr. in latitudine autem ad dimidium Grad. aſſurgat. Hinc quoque poſitio vici Oſſae, totiusque regionis adiacentis, erit corrigenda.

Determinatio longitudinis et latitudinis vrbis Sarapul.

Diſtantiam huius loci ſecundum longitudinem a Saigatka definiuit *De l'Isliu*s 30' Aequat. occidentem verſus, ſiue eiusdem longitudinem $= 70°. 13'$. Latitudo autem ex ſequenti altitudine meridiana Solis accurate obſeruata fluit:

1740. d. 24. Sept. Altit. merid. app.

marg ☉ bor.	=	33°. 7′. 0″
Error quadr.	=	+ 7. 10
		33. 14. 10
Refr. et Par.	=	− 1. 13
		33. 12. 57
½ Diam. ☉	=	− 16. 2
Altit. merid. vera centri ☉	=	32. 56. 55
Declin. centri ☉	=	0. 36 20 A
Altit. Aequatoris	=	33. 33 15 ſiue
Eleuatio Poli vrbis Sarapul	=	56°. 26½′.

In Mappa geogr. Acad. huius loci longitudo ponitur $=72°.0'$, eiusdemque latitudo $=56°.56\frac{1}{2}'$. Error itaque in longitudine $=1°.47'$, in latitudine vero $=30'$.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Vſt - Ykskoi, ad ripam fluminis Kamae, e regione oſtii fluminis Yk ſiti.

Cum differentia Meridianorum inter vrbem Caſan et vicum Vſt - Ykskoi ſecundum *De l'Islium* ſit $=2\frac{1}{4}°$, erit longitudo huius vici $=69°.13'$. Latitudo autem ex ſequenti definitur altitudine meridiana Solis in vici Vſt Ykskoi obſeruata:

1740.

1740. d. 27. Sept. ſt. n. Altit. mer.

app. marg. ☉ bor.	= 32°. 31′. 30″
Error quadr. ponitur	= + 7. 10
	32. 38 40
Refr. et Par.	= − 1. 14
	32. 37. 26
½ Diam. ☉	= − 16. 3
Altit. merid. vera centri ☉	= 32. 21. 23
Declin. centri ☉	= 1. 46 46 A
Altit. Aequatoris	= 34°. 8′. 9″ ſiue
Eleuatio Poli vera vici Vſt-Ykskoi	= 55° 51′. 50″.

Vicus hic in Mappa geogr. Acad. falſo nomine vocatus Ieko, longitudinem habens = 70°. 48′, latitudinem = 56°. 24′. Error itaque in longitudine = 1°. 35′, in latitudine = 32′.

Determinatio longitudinis atque latitudinis vici Swinji-Gori, ad diſtantiam 2 Verſt. cis oſtium fluminis Vjatkae ſiti.

Differentia Meridianorum inter Vſt-Ykskoi et Swinji-gori aequatur ſecundum Mappam 1°. 30′; admiſſa igitur longitudine vici Vſt-Ykskoi ſupra inuenta, erit longitudo vici Swinji-gori = 67°. 43′ circiter.

Latitudo huius loci ex altitudine meridiana Lucidae Aquilae a *De l'Iſlio* obſeruata modo ſequenti deducitur:

1740. d. 28. Sept. ſt. n. Altit. mer.

app. α Aquilae = 42°. 30′. 15″
Error quadrantis = 7. 10

42. 37. 25
Refr. = − 1. 3

Altit. merid. vera α Aquilae = 42. 36. 22
Declin. α. Aquilae = 8. 12. 28 bor.

Altit. Aequatoris = 34. 23. 54 ſiue
Eleuatio Poli vera vici Swinji-gori = 55. 36.

Longitudo huius loci ſecundum Mappam geogr. Acad. eſt = 69°. 18′ et latitudo = 55°. 57′. Error igitur in longitud. = 1°. 35′, in latitud. = 21′.

Determinatio latitudinis atque longitudinis vrbis Caſan.

Plures inſtituit *De l'Islius* in vrbe Caſan obſeruationes, ad determinandum huius loci latitudinem ſpectantes, ex quibus altitudo meridiana Lucidae Aquilae ibidem obſeruata ad noſtrum inſtitutum maxime videtur idonea.

1740. d. 8. Oct. ſt. n. Altit. merid.

app. α Aquilae = 42°. 21′. 20″
Ponamus error. quadr. = + 7. 10

42. 28. 30
Refr. = − 1. 3

Altit.

Altit. merid. vera α Aquilae $= 42.\ 27.\ 27$
Declin. α Aquilae $= 8.\ 12.\ 28$ bor.

Altitudo Aequatoris $= 34.\ 15$ ſiue
Eleuatio Poli vrbis Caſan $= 55.\ 45.$

Cum vero error quadrantis ante iſtam obſeruationem d. 11. Sept. in Nowo-Vſolie inuentus $= 7'.\ 10''$, non congruat cum errore eiusdem inſtrumenti poſtea, nimirum d. 13. Nou. in Niſchni-Nowgorod reperto $= 4'.\ 40''$, nihil certi circa veram vrbis Caſan latitudinem definire licet. Poſito enim errore quadrantis $= 7'.\ 10''$, erit latitudo vrbis Caſan $= 55^\circ.\ 45'$, admiſſo autem altero $4'\ 40''$, prodibit latitudo huius vrbis $= 55^\circ.\ 47\frac{1}{2}'$. *De l'Islius* quidem ipſe latitudinem vrbis Caſan ſtatuit $= 55^\circ.\ 47'$, dubium autem aliquot min. prim. ſemper relinquitur, neglecta verificatione quadrantis, quae in vrbe Caſan erat peragenda.

Longitudinem huius vrbis accurate diligenterque determinauit *De l'Islius* $= 66^\circ.\ 28'$.

Secundum Mappam geogr. Academiae huius vrbis longitudo aequatur $66^\circ.\ 25'$, latitudo autem $55^\circ.\ 44'$.

Determinatio latitudinis vrbis Niſchni-Nowgorod.

Latitudinem huius loci, cum verificatio quadrantis, paulo poſt peractas ibidem obſeruationes, ſit inſtituta, accurate ſatis ex ſequenti altitudine merid. Lucidae Aquilae definire licet.

1740. d. 5. Nou. ſt. n. Altit. Merid.

app. α Aquilae	= 41°. 48′ 40″
Error quadrantis	= + 4. 40
	41. 53. 20
Refr.	= − 1. 5
Altit. merid. vera α Aquilae	= 41. 52. 15
Declinat. α Aquilae	= 8. 12. 28 bor.
Altit Aequat.	= 33. 39. 47 ſiue
Eleuatio Poli vera Niſchni-Nowgorod	= 56. 20. 13.

Huius vrbis longitudo ponitur in Mappa geogr. Acad. = 62°. 19′, latitudo autem = 56°. 18′.

Determinatio latitudinis vrbis Moſcouiae.

Quamuis menſem integrum Decembr. *De l'Iſlius* commoratus ſit Moſcouiae, paucas tamen ibi propter tempeſtatem aduerſam inſtituit obſeruationes; ita vt praeter altitudinem merid. Polaris ſtellae bis obſeruatam, et altitudinem meridianam Palilicii ſemel captam, nullae occurrant obſeruationes determinandae latitudini huius loci inſeruientes. Ex memoratis autem altitudinibus meridianis huius vrbis latitudinem modo ſequenti inueſtigare atque definire conatus ſum:

1740. d. 26. Dec. ſt. n. Altit merid app.

Polaris ſupra Polum	= 57°. 46′. 40″
27. Dec. - - - - - -	57. 47. 0

Media

Media itaque altit. merid. obſeru.

Polaris ſupra Polum = 57°. 46′. 50″

Refr. = - 40

Alt. mer. obſ. Polaris refr. corr. = 57. 46. 10

Eodem circiter tempore, nempe d. 30 Dec. obſeruata fuit Moſcouiae eodem organo altitudo meridiana appar. Palilicii - - - - = 50°. 8′. 30″ ſiue Alt. merid. obſeru. Palilicii refr. corr. = 50. 7. 38.

Ad quadrantis iam errorem definiendum harum fixarum declinationes accuratiſſime ſupputentur, neceſſe eſt. Inueni autem ex obſeruationibus, quas ipſe Pariſiis ſumma cura inſtitui, declinationem apparentem Polaris ad finem Anni 1740.* = 87°. 55′. 15″. 1. bor. Parique modo declinationem apparentem Palilicii ad idem tempus ** = 15°. 57′. 45″. 4 bor. Quibus ſtabilitis, erit

Diſtant. app. Polaris a Polo Aequat. bor.	= 2°. 4′. 44″. 9
Diſt. app. Palilicii a Polo Aequat. bor	= 74. 2. 14. 6
Differ. diſtant. a Polo Aequatoris bor.	= 71. 57. 29. 7

Diſtant. obſeru. vera Polaris a Zenith	= 32°. 13′. 50″
Diſtant. obſeru. vera Palil. a Zenith	= 39. 52. 22
Summa diſtant. obſeruat. a Zenith	= 72 6 12
Different. diſtant. a Polo Aequatoris	= 71. 57. 30
Erroris quadrantis dupl.	= 0. 8. 42.

ſiue error quadrantis ſimplex ad altitud. obſeruatas addendus = 4′. 21″.

Hinc

Hinc altit. merid. obſeru. Polaris refr. corr.	= 57°. 46'. 10"
Error quadr.	= + 4. 21
Altit. merid. vera Polaris ſupra Polum	= 57. 50. 31
Diſt. app. Polaris a Polo	= 2. 4. 45
Eleuatio Poli vera Moſcouiae	= 55. 45. 46.

* Inueſtigatio declinationis apparentis ſtellae Polaris ad finem anni 1740.

Secundum obſeruationes a me Pariſiis An. 1748. habitas, declinatio ſtellae Polaris media ad initium An. 1748. eſt = 87°.57'.22".

Motus iam Polaris ſtellae annuus in *declinatione* aequatur 19'.37", vnde declinatio Polaris media ad finem An. 1740. = 87°.55'.4".2.

Ob nutationem axis telluris ſubtrahenda ſunt 9", vt prodeat ſtellae Polaris declinatio vera ad finem An. 1740. = 87°.54' 55".2.

Aberratio denique huius ſtellae in declinatione tunc temporis erat = 19".9 boream verſus, ita vt declinatio Polaris apparens ad finem An. 1740. ſit = 87°.55'.15".1.

** Inueſtigatio declinationis apparentis Palilicii ad finem An. 1740.

Antequam declinationem apparentem Palilicii ad tempus propoſitum aſſignemus, ex certis accuratisque obſeruationibus huius ſtellae declinatio media, h. e. aberratione et aequatione nutationis axis telluris correcta, eſt deducenda atque ſtabilienda. Hunc vero in finem ſequen-

ſequentes ſum adhibiturus obſeruationes, quas ipſe quadrante 3 ped. radio, ad lumen crepuſculi et diei, in obſeruatorio Regio Pariſ. ſumma cura inſtitui.

1748. d. $\frac{10}{21}$. Febr. Alt. mer. app. Aldebaran	=	57°. 9'. 48". 9
$\frac{19}{1}$. Febr. Mart.	- - - - - - - -	57. 9. 50. 8
$\frac{20}{2}$. Febr. Mart.	- - - - - - - -	57 9 49. 5
$\frac{22}{4}$. Febr. Mart.	- - - - - - - -	57. 9. 48. 3
$\frac{5}{16}$. Mart.	- - - - - - - -	57. 9. 47. 0

Error huius quadrantis, ex vtraque verificatione deductus, aequatur 30" ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus. Quo rite applicato habebimus altitud. merid. Palilicii errore quadrantis et refractione correctam,

d. $\frac{10}{21}$. Febr.	- - -	57°. 8'. 41". 9
$\frac{19}{1}$. Febr. Mart.	- - -	57. 8. 43. 8
$\frac{20}{2}$. Febr. Mart.	- - -	57. 8. 42. 5
$\frac{22}{4}$. Febr. Mart.	- - -	57. 8. 41. 3
$\frac{5}{16}$. Mart.	- - -	57. 8. 40. 0.

Aberratio Palilicii in declinatione eſt d. $\frac{10}{21}$ Febr. = 1". 6; d. $\frac{19}{1}$. Febr. Mart. = 2". 1, d. $\frac{20}{2}$. Febr. Mart. = 2". 2; d. $\frac{22}{4}$. Febr. Mart. = 2". 3 et d. $\frac{5}{16}$ Mart. = 2". 8 auſtrum verſus; hinc altitudo merid. Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta:

d. $\frac{10}{21}$. Febr.	= 57°. 8'. 43". 5
$\frac{19}{1}$. Febr. Mart.	= 57. 8. 45. 9
$\frac{20}{2}$. Febr. Mart.	= 57. 8. 44. 7
$\frac{22}{4}$. Febr. Mart.	= 57. 8. 43. 6
$\frac{5}{16}$. Mart	= 57. 8. 42. 8

Altitudo itaque meridiana media Palilicii errore quadrantis, refractione et aberratione correcta, ad initium menſis Mart. ſt. n. A. 1748. 57°. 8'. 44$\frac{1}{2}$". 1.

Eleuationem Poli veram Obſeruatorii R. Pariſ. eodem inſtrumento accuratiſſ. determinaui = 48°. 50'. 12$\frac{1}{2}$",

qua admiſſa, erit declinatio Palilicii vera ad init. menſ. Mart. ſt. n. 1748. $= 15°. 58'. 56''. 6$ bor. Correctio declinationis huius ſtellae ob nutationem axis telluris tunc temporis erat $= 8''. 5$ ſubtrah. et motus Palilicii in declinat. annuus $= 8''. 21'''$, ita vt declinatio Palilicii media ad 1. Ian. ſt. n. 1748. accuratiſſ. ſupputata ſit $= 15°. 58'. 46'', 5$ bor.

Facili iam labore inueniemus declinationem Palilicii apparentem ad tempus obſeruationum Moſcouiae habitarum, id eſt ad finem A. 1740. Motus enim huius ſtellae annuus in declinat. cum ſit $= 8''. 21''$, prodibit declinatio media Aldebaran ad finem A. 1740 $= 15°. 57'. 48'', 0$ bor. Correctio *declinationis propter* nutationem axis telluris eſt $= 4''. 4$ ſubtr. hinc declinatio Aldebaran vera $= 15°. 57'. 43'', 6$ et declinatio eiusdem apparens ad finem A. 1740, ob aberrationem in declinat. $= 1''. 8$ bor. verſus, $= 15°. 57'. 45''4$ bor.

Adnotationes circa longitudinem vrbis Moſcouiae.

Longitudo huius vrbis, cum nullae priſcis temporibus ibi habitae ſint obſeruationes aſtronomicae, ad determinandum longitudinem idoneae, ab interuallorum aeſtimatione populari ad noſtrum vsque fere aeuum praecipue pependiſſe videtur. *Ferquarſonus* huius quidem ſaeculi initio menſuram viae publicae, qua itur Petropoli Moſcouiam, agendo, Meridianorum harum vrbium differentiam accuratius definire ſtuduit, eamque inueniſſe dicitur $= 7°. 29'$, ſiue $29'. 56''$ temp. Non obſtante autem hac *Ferquarſoni* menſura Aſtronomorum bona pars,

qua

qua auctoritate neſcio, differentiam Meridianorum Petropolin inter et Moſcouiam ſtatuit $= 40'$ temp. ſiue 10 grad. Aequat. ita vt ſolum obſeruationum aſtronomicarum pondus hoc de diſcrimine diiudicaturum videatur. Hunc in finem operae pretium duxi, anno 1753 occultationum quarundam fixarum a Luna calculos tradere Academiae cum Adiuncto *Kraſilnikow*, tunc Moſcouiae commorante, communicandos. Quo facto, obſeruauit Moſcoviae laudatus *Kraſilnikow* vnicam occultationem fixae nimirum δ ♉ a Luna, mihi quoque Petropoli viſam, ex qua cum plus otii nactus ero, veram Moſcouiae longitudinem ſupputabo. Interim tamen non abs re fore iudicaui, Moſcouiae longitudinem ex obſeruationibus tranſitus ☿rii per Solem, Moſcouiae et Pariſiis habitis, modo ſequenti eruere.

D. $\frac{25.\ \text{Apr.}}{6.\ \text{Maii}}$ obſeruante *Kraſilnikow*,
Moſcouiae limbus ☿. occid. e ☉le
egreſſus eſt - - $0^h.38'.55''$ ſt. v. P. M.
Limbus autem ☿ orient. egreſſus eſt 0. 41. 25

Hinc egreſſus centri ☿rii - - $0.40'.10''$
Correct. ob parallaxin add. $=$ 48

Egreſſus centri ☿rii Moſcouiae obſeruatus ad Merid. Pariſ. reductus $0^h.40'.58''$
Egreſſus centri ☿rii Pariſiis obſer. 10. 20. 7

Differentia Merid. inter Pariſ. et
Moſcouiam $= 2^h.20'.51''$

Longitudo itaque Moſcouiae $= 55°.12'.45''$, 16 circiter min. pr. minor ea, quae ex operationibus geometricis *Ferquarſoni* prodit.

LATITVDINVM SPECVLARVM ASTRONOMICARVM *TYCHONIS BRAHEI*, VRANIBVRGENSIS NEMPE ET WANDESBVRGENSIS, NEC NON VRBIS HAMBVRGENSIS ET VTRIVSQVE OBSERVATORII PARISIENSIS SCILICET ET BEROLINENSIS DISQVISITIO.

Auctore

A. N. GRISCHOVV.

Cum inueſtigatio rerum aſtronomicarum variis ſemper ſuperſtruatur obſeruatis, quae, quamuis in certis ac inconcuſſis habeantur, nouis tamen correctionibus ſaepiſſime egeant; concluſiones exinde deductae inter ſe ſaepius videntur abhorrere, quanquam, ſi fundamenta curatius examinare liceret, diſſenſus foret nullus, vel exiguus. Eodem modo res ſeſe habet in diſquiſitionibus aſtronomicis, quae comparatione antiquarum et recentiorum obſeruationum innituntur. Quantum enim vtilitatis eiusmodi diſquiſitiones excolendae Aſtronomiae afferre valent, tantum detrimenti nobilis illa ſcientia ex iis capere poteſt, praecipue cum concluſiones ex comparatione antiquarum et recentiorum obſeruationum hauſtae, elementis male ſtabilitis, in varias Aſtronomos adducunt ſententias. Ad hoc probandum maximo eſt argumento diſſenſio Aſtronomorum ex. c. circa decrementum obliquitatis Eclipticae, vt caetera taceam haud minus notatu digna, quae in Aſtronomia ſunt controuerſa. Haec vero opinionum diſſenſio originem praecipue ducit

partim

partim ex negligentia Antiquorum in tradendis ſingulis et obſeruationum et inſtrumentorum circumſtantiis, partim ex eo, quod recentiorum Aſtronomorum nonnulli errores inſtrumentorum veterum Aſtronomorum omnibus veſtigiis non indagauerint, et ex tenebris eruerint, neque elementa, quibus eorum diſquiſitiones ſuffulciuntur, ad lancem exegerint ac determinauerint.

Ex omnibus obſeruationibus veterum Aſtronomorum eas, quas nobilis *Tycho Brahe*, Aſtronomus ſaeculi XVI. longe celeberrimus, inſtituit atque perſcripſit, in pretioſiſſimis habendas et ſingulis circumſtantiis maxime illuſtratas eſſe in confeſſo eſt. Subtiliſſimus ille rerum coeleſtium inveſtigator longa experientia et vſu rerum exercitatus, cum videret, quantum ad Aſtronomiam perficiendam intereſſet, vt vetuſtiores obſeruationes cum recentioribus accurate comparari poſſent, nihil habuit antiquius, quam vt in obſeruationum ſuarum ephemeridibus ipſe notaret ſedulo omnes illas circumſtantias, quibus obſeruationes hae praeclarae commendantur poſteritati quam maxime. Theſaurum obſeruationum clariſſimi huius Aſtronomi perluſtranti, non latet cura illa ſumma atque diligentia, qua adnotauit organa aſtronomica, quibus in ſingulis obſeruationibus vſus eſt, conſtructionem inſtrumentorum, methodos, quas ad ea examinanda et verificanda adhibuit, et conditionem inſtrumentorum obſeruationum tempore. Inſigniuit haud minori ſtudio eas obſeruationes, quas prae aliis accuratiores iudicauit; indicauit faciem coeli et tempeſtatem in plurimis obſeruationibus; modumque, quo, ad organa aſtronomica in plano Meridiani collocanda, vſus eſt; quae omnia ſedulo candideque notarentur

tur neceſſe erat, vt poſteri fructum ex Herculeo *Tycbonis* labore percipere, eiusque obſeruationes, quas ipſi, quo tempore inſtitutae ſunt, ſumma accuratione ſupputare non licuit, calculo ſubiicere poſſent.

Cum itaque harum obſeruationum dotes, ad illorum temporum rationem, tantae ſint, tamque praeclarae, dubium nullum eſt, quin elementa Aſtronomiae plurima, quae ex comparatione antiquarum et recentiorum obſeruationum petenda ſunt, ex *Tycbonis* obſeruatis accuratiſſime erui atque ſtabiliri poſſint. Declarant hoc etiam labores quorundum Aſtronomorum celeberrimorum, qui non ſolum in obſeruatis *Tycbonis* emendandis atque corrigendis, verum etiam in iis cum obſeruationibus recentiſſimis comparandis deſudarunt. Neque in poſterum in hoc opere et ſtudio ceſſabunt Aſtronomi. Quanto enim vetuſtiores fuerint *Tycbonis* obſeruationes, tanto euadent deſideratiores atque vtiliores ad perſcrutanda rerum coeleſtium arcana. Quia vero concluſionum ex *Tycbonis* obſeruatis hauriendarum et in vſum Aſtronomiae deriuandarum vtilitas ſumma ab accuratione harum obſeruationum pendet, haud leui momento aeſtimanda eſt disquiſitio errorum organorum aſtronomicorum, quibus obſeruator ille diligentiſſimus vſus eſt, nec non elementorum, quorum cognitio, ad poſitiones Siderum determinandas, maxime eſt neceſſaria, Longitudinis nempe atque Latitudinis locorum, vbi obſeruationes habitae ſunt, inveſtigatio. Haec quidem omnia *Tycboni* ipſi erant definienda; ſed praeterquam quod ſuo modo ſedulo annixus ſit, vt elementa haecce in apricum proferret, notandum eſt, motuum coeleſtium aequatiunculas plures eſſe noſtris

tempo-

temporibus deprehenſas, quae *Tychonem* omnino latebant, quarumque propterea rationem in digerendis atque ſupputandis ſuis obſeruationibus habere non poterat. Adde praeterea, quod hypotheſis refractionum, ſolertiſſimi huius rerum coeleſtium contemplatoris aeuo, valde eſſet imperfecta, cum finxerat refractiones pro Sole maiores eſſe, quam pro Planetis et ſtellis fixis. Adducebatur inſuper, vt putaret, refractiones fixarum circa 20 gradum altitudinis ſupra horizontem, Solis vero circa 45 gradum altitudinis, prorſus ceſſare ac euaneſcere; cum contra iam centum fere abhinc annis inconcuſſis obſeruationibus demonſtratum ſit, refractiones in aequali ſupra horizontem altitudine eiusdem eſſe quantitatis pro quouis ſidere, et ad verticem vsque extendi. Multa quidem adhuc de refractionibus eſſent dicenda, quippe quae et Aſtronomos huius ſaeculi celeberrimos occupatos tenent; ſed hic de illis in tranſitu, tanquam de fonte, ex quo deriuati errores in *Tychonis* calculos latitudinum geographicarum atque poſitionum ſiderum fluxerunt, mentionem feciſſe ſat eſt. Neque minus notandum eſt denique, methodos nonnullas, quibus *Tycho* ad verificanda organa ſua aſtronomica vſus eſt, ſaepius irritas fuiſſe, quod a certis quibusdam pendebant obſeruationibus atque operationibus, quae diligentiſſimum hunc Aſtronomum in neſcios nonnunquam inducebant errores. Poſtquam autem cura atque labore Aſtronomorum noſtrae aetatis organa aſtronomica methodique obſeruandi ad illud praeciſionis faſtigium euecta ſunt, in quo nunc cernuntur, facili negotio complura ſtabilire poſſumus elementa, quae corrigendis veterum Aſtronomorum obſeruationibus, definiendisque poſitioni-

bus

bus, praecipue ſpecularum aſtronomicarum, ruinis iam pridem oppreſſarum, inſeruiunt.

Hunc in finem Celeberrimus *Picardus* An. 1671. a *Ludouico* XIV. Galliarum Rege, in Inſulam Huennam, quae in Danico freto Zelandiam inter et Scaniam ſita eſt, miſſus fuerat, vt Vraniburgi, h. e. arcis, quam Rex Daniae *Fridericus* II. Aſtrorum contemplationi ibi exſtruendam curauerat, et in qua *Tycho* ſeriem obſeruationum aſtronomicarum 15 annorum pertexuit, Longitudinem atque Latitudinem accuratiſſime obſeruaret. Magnum hocce conſilium in multas magnasque incurrebat difficultates, in relatione huius itineris a *Picardo* enumeratas. Manebant tum nulla fere veſtigia famoſiſſimae *Tychonis* ſpeculae aſtronomicae, et obſeruationes, quas ibi ad Latitudinem definiendam *Picardus* habebat, minime cum iis, quae eodem tempore Pariſiis ex compacto inſtituebantur, concinere videbantur; ita vt *Picardus* hancce viam, directe determinandi Latitudinem ſpeculae aſtronomicae *Tychonis*, ipſe deſereret. Sub finem Anni 1671. *Picardus* ibi, quadrantis 3 pedum radio conſpicillo tubulato muniti beneficio, altitudines meridianas Polaris ſtellae infra ſupraque Polum quam diligentiſſime obſeruabat, inueniebatque ex hiſce obſeruatis diſtantiam apparentem huius ſtellae a Polo Aequatoris boreo 2°. 27′. 25″, et Eleuationem Poli apparentem Vraniburgi 55°. 55′. 20″. *Richerius* contra eodem tempore Rupellae obſeruationibus aſtronomicis inuigilans, ope ſextantis 6. pedum radio, diſtantiam apparentem ſtellae Polaris a Polo determinabat 2°. 27′ 5″, adeoque 20″ minorem ea, quae *Picardo* in Inſula Huenna obſeruata

ſeruata fuerat. Pariſiis vero, quod maius eſt, ſub idem tempus variatio obſeruabatur in ſtella polari ad 2 fere minuta prima aſſurgens. Abnormes et inexplicabiles hae differentiae *Picardum* ita perplexum incertumque habuerunt, vt de Latitudine Vraniburgi directe accurateque determinanda deſperaret. Quam ob rem, vt demandatum negotium conficeret, de Eleuatione Poli Vraniburgi methodo indirecta, per obſeruatam nimirum Parallelorum Pariſienſis obſeruatorii et ſpeculae aſtronomicae Vraniburgenſis differentiam, definienda cogitauit. Determinauit igitur per medium inter obſervationes accuratiores differentiam Parallelorum Vraniburgi et Pariſienſis obſeruatorii 7°. 4'. 5", et Eleuationem Poli veram Vraniburgi 55°. 54'. 15", ſiue 25" circiter minorem ea, quam per alteram inuenerat methodum. Quamuis vero Eleuatio Poli Vraniburgi methodo indirecta concluſa accuratior videatur ea, quam *Picardus* ex methodo directa collegit, nullo tamen modo recte de tanta differentia diiudicare poſſumus, niſi in errorem quadrantis, quo *Picardus* ad hocce negotium vſus eſt, accurate inquiramus.

Mihi itaque propoſitum eſt, hoc loco, quantum maxime poſſum, extra omnem dubitationem ponere ea, quae ad Latitudinem Vraniburgi ſpectant, vt comparatio inter *Tychonica* obſeruata et recentiorum Aſtronomorum obſeruationes inſtituenda eo meliores in poſterum habeat exitus. Hunc in finem primo adnitar, errorem quadrantis, quo *Picardus* in Inſula Huenna vſus eſt, ex huius Aſtronomi obſeruatis nonnullis, ad obſeruationes, quas egomet Pariſiis inſtitui, comparandis, eruere; id quod

non ſolum Latitudini Vraniburgenſis obſeruatorii quantum licet accuratiſſime ſtabiliendae, verum etiam aliis obſeruationibus compluribus, quas *Picardus* eiusdem inſtrumenti beneficio in Inſula Huenna habuit, corrigendis, inſeruiet. Deinde calculum Eleuationis Poli Vraniburgi obſeruationibus a *Tychone* ipſo Vraniburgi peractis et a me concinnatis nixum exhibebo. Collatis enim *Tychonicis* obſeruationibus cum iis, quas ipſe Pariſiis habui, errorem quadrantis, quo *Tycho* ad has obſeruationes inſtituendas vſus eſt, patefaciam. Simili modo, demonſtrata obſeruationum *Tychonicarum*, ſi praeciſe fuerint correctae, admiranda accuratione, non dubitaui, Eleuationem Poli arcis Ranzouianae Wandesburgi, vbi *Tycho* e Dania diſcedens exceptus, per tempus aliquod obſeruationibus aſtronomicis inuigilauit, ex obſeruatis *Tychonicis* deriuare atque corrigere, ſimulque Vrbis Hamburgenſis Latitudinem ex obſeruationibus et menſuris, quas egomet Hamburgum inter et Wandesburgum An. 1749. cepi, ea qua potui praeciſione definire. Cum vero elementa nonnulla, quibus ad hoſce calculos perficiendos vtor, iis nituntur obſeruationibus, quas in Obſeruatorio Regio Pariſienſi ipſe ſumma diligentia inſtitui, haud alienum hiſce diſquiſitionibus fore iudicaui, et eas adiicere obſeruationes, quas mihi ad Latitudinem Obſeruatorii Pariſienſis definiendam eodem inſtrumento in famoſiſſimo hocce Obſeruatorio habere contigit. Superat quidem Eleuatio Poli Obſeruatorii Pariſienſis, ex meis obſeruationibus deducta, minutis aliquot ſecundis Latitudinem, quam Cl. *Caſſini* aliique Aſtronomi celeberrimi ſpeculae huic aſtronomicae aſſignarunt;

runt; neque tamen deſunt obſeruationes optimae notae, quae Latitudinem huius Obſeruatorii maiorem adhuc arguant. Obſeruationes denique, quas circa Latitudinem Berolinenſis Obſeruatorii inſtituere mihi licuit, hac occaſione ſimul exponere, calculoque ſubiicere, iuuat.

Eleuationis Poli Vraniburgi ſecundum obſeruationes Cel. *Picardi* determinatio.

Cum organa aſtronomica, quibus Cel. *Picardus* vtebatur, quippe quae teleſcopiis loco pinnacidiorum inſtructa erant, longe excellerent prae iis, quorum adhibendorum copia *Tychoni* fuit, Eleuationem Poli Vraniburgi ex *Picardi* obſeruationibus primum praecipueque eruere ac definire fas eſt. Quia autem cardo huius rei vertitur in determinando errore quadrantis, quo *Picardus* vſus eſt, ſeligam hunc in finem altitudines meridianas Reguli et Polaris ſtellae, quarum altera a *Picardo* in Inſula Huenna auſtrum verſus, altera in ſeptentrionali plaga fuit obſeruata. Harum vero fixarum declinationes praeciſe cognoſcere, methodus haec cum poſtulet, eas ex meis obſeruationibus diligentiſſime ſtabilire inprimis adnitar, vt poſtmodum ad tempus quoduis propoſitum reduci commode queant.

Ad definiendam itaque declinationem α Leonis, ſiue Reguli, iis vtar obſeruationibus, quas hunc in finem in Obſeruatorio Regio Pariſienſi quadrantis tripedalis beneficio habui. Ibi enim per plures obſeruationes vix 3. 4ue. min. ſec. ab inuicem diſcrepantes, inueni altitu-

dinem meridianam apparentem Reguli ad lumen crepuſculare, coelo eximie ſereno, initio menſis Maii Anno 1748. captam - - - - 54°.21′.59″
Ex qua ſi auferatur error quadrantis - - - 30

Altitudo merid. app. Reguli correcta erit	54. 21. 29
Subtrahendo refractionem pro hac altitud. et ad hanc anni tempeſtatem - - - -	39
Prodibit altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - -	54. 20. 50
Eleuatio Aequatoris Obſeruatorii Pariſ. eodem inſtrumento adinuenta eſt - - -	41. 9. 47½ hinc
Declinatio apparens Reguli ad initium menſis Maii 1748. erit - - -	13. 11. 2½ bor.

Ad accommodandam nunc huius ſtellae declinationem ad noſtrum vſum, declinatio eius apparens ſupra determinata in mediam conuertatur neceſſe eſt. Dicimus enim mediam poſitionem eam, quam ſtella haberet, ſi nec eſſet aberratio a propagatione ſucceſſiua luminis, nec deuiatio ab axis terrae nutatione; apparentem vero poſitionem eam, quam ex obſeruationibus aſtronomicis directe elicimus, affectam nimirum et aberratione et deuiatione. Apparet igitur poſitionem ſtellae mediam, reducendae ac definiendae poſitioni eius apparenti ad tempus quoduis propoſitum, commodiſſime inſeruire.

Peracto itaque calculo prodibit deuiatio Reguli in declinationem ad initium menſis Maii 1748. 1″.1 au-

auſtrum verſus, et aberratio eius in declinationem ad idem tempus 1″. 6 auſtrum verſus; vnde emergit declinatio Reguli media ad initium menſis Maii 1748. 13°. 11′. 5″. 2, ſiue, habita praeceſſionis mediae Aequinoctiorum ratione, declinatio Reguli media ad initium anni 1748. 13°. 11′. 10″. 3.

Colligitur porro praeceſſio media Reguli in declinationem a tempore, quo *Picardus* ſtellam hanc Vraniburgi obſeruauit, nempe a fine menſis Aprilis, ſiue ab initio Maii anni 1672. ad noſtram vsque obſeruationem 21′. 36″. 0 auſtrum verſus, adeoque declinatio Reguli media ad initium Maii 1672. 13°. 32′. 41″. 2, ſiue ob deuiationem in declinationem 2″. 9 bor. verſus, et aberrationem 1″. 3 auſtrum verſus, declinatio Reguli apparens ad idem tempus 13°. 32′. 42″. 8.

Reſtat nunc, vt ſimili modo declinatio Polaris ſtellae definiatur; haec enim res eo maioris momenti eſſe videtur, quod inter Aſtronomos Gallos, teſte *Picardo*, tunc de diſtantia ſtellae Polaris a Polo non conueniebat. Ad hocce negotium perficiendum, adhibiturus ſum obſeruationes, quas circa Polarem ſtellam anno 1748. in Obſeruatorio Regio Pariſienſi inſtitui, quarumque ſummam poſtea lucide explicabo. Prodit autem ſecundum memoratas obſeruationes diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo Aequatoris boreo ad 1. Ian. 1748. 2°. 2′. 12″. 2; ſiue ob deuiationem huius ſtellae in declinationem 5″. 7 bor. verſus, et aberrationem 19″. 9 itidem bor. verſus, declinatio Polaris ſtellae media ad idem tempus 87°. 57′. 22″. 2 bor. Cum vero praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem a tempore, quo ſtella haec a *Picardo* Vraniburgi ob-

ſeruata fuit, nimirum a fine menſis Aprilis, ſiue ab initio Maii anno 1672. ad initium vsque An. 1748. ſit 24′.59″.0 bor. verſus, habebimus declinationem Polaris ſtellae mediam ad initium Maii Anno 1672. 87°.32′.23″.2, quae aucta 3″.1 pro deuiatione boreali, et imminuta 12″.1 pro aberratione auſtrali, dat declinationem huius ſtellae apparentem ad idem tempus 87°.32′.14″.2.

Conſimili modo habebimus praeceſſionem mediam ſtellae Polaris in declinationem a fine anni 1671. ad finem vsque menſis Aprilis 1672. 6″.1 bor. verſus; deuiationem huius ſtellae in declinationem circa finem Anno 1671. 2″.4 bor. verſus; aberrationem in declinationem ad idem tempus 19″.8 bor. verſus, hincque declinationem borealem apparentem Polaris ſtellae ad finem anni 1671. 87°.32′.39″.3, ſiue diſtantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo 2°.27′.20″.7. Ablatis denique 4″. pro refractionum differentia, prodibit diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo, quae aequatur dimidiae differentiae inter maximam et minimam altitudinem huius ſtellae circa id tempus Vraniburgi obſeruatam, 2°.27′.16″.7. *Picardus* diſtantiam illam memorato tempore Vraniburgi obſeruauit eſſe 2°.27′.25″, ideoque 8″ maiorem ea, quae noſtris ſtabilita fuit obſeruationibus atque calculis; cum contra ex *Richerii* obſeruatis eadem diſtantia colligitur 12″ minor illa, quae ex noſtris calculis fluit. Ingens atque notabilis ille diſſenſus obſeruationum *Picardi* et *Richerii* multo maxima ex parte erroribus obſeruationum et inſtrumentorum tribuendus eſſe videtur, neutiquam vero,

vti

vti *Picardo* viſum eſt, refractionum viciſſitudinibus, quippe quae ad tantam altitudinem tantae eſſe non poſſunt. Sed in differentiis illis inordinatis, quae *Picardi* obſeruationibus cum *Richerii* vel Aſtronomorum Pariſienſium obſeruatis intercedunt, diſcutiendis morari nunc animus non eſt. Oſtendiſſe ſufficiat, *Picardi* obſeruationes circa diſtantiam Polaris ſtellae a Polo, de quibus in praeſentia maxime agitur, cum noſtris magis concinere.

Stabilita nunc noſtris obſeruationibus et Reguli et Polaris ſtellae declinatione ad tempus, quo *Picardus* harum fixarum altitudines meridianas Vraniburgi obſeruavit, facili negotio error quadrantis, quo *Picardus* vſus eſt, adeoque vera Eleuatio Poli celebratiſſimi Obſeruatorii Vraniburgenſis ſatis accurate definiri poteſt. Antequam vero calculos hoſce ineamus, obſeruationum *Picardi* noſtro iudicio delectarum rationem reddere fas eſt. Ad hunc finem altitudinibus Polaris ſtellae meridianis et ſupra et infra Polum a *Picardo* obſeruatis examini ſubiectis, inuicemque comparatis, demonſtrare adnitar, quaenam ex illis caeteris ſint praeferendae. *Picardus* altitudinem meridianam apparentem ſtellae Polaris ſuperiorem ſub initium menſis Nouembris An. 1671. obſeruauit eſſe $58^{\circ}.23'.0''$, et circa finem eiusdem anni $58^{\circ}.22'45''$. Deuiatio ſtellae Polaris in declinationem circa initium menſis Nouembris An. 1671. aequabat $2''.0$ bor. verſus, et aberratio in declinationem $10''.0$. itidem bor. verſus. Sub finem anni 1671. deuiatio eiusdem ſtellae erat $2''.4$. bor. verſus et aberratio $19''.8$. bor. verſus; praeceſſio autem media Polaris ſtellae in declina-

tionem

tionem ad hocce temporis interuallum aequatur 4″. 0 bor. verſus, ita vt differentia altitudinis meridianae apparentis ſtellae Polaris ſupra Polum ſub initium menſis Nouembris et circa finem An 1671. ſit 14″. 2, quibus ablatis ab altitudine meridiana apparenti Polaris ſtellae ſub initio menſis Nouembris 1671. obſeruata, prodibit eiusdem ſtellae altitudo meridiana apparens reſpondens ad finem anni 1671. = 58°. 22′. 45″. 8, quae cum vix vno minuto ſecundo ab altitudine illo tempore obſeruata differat, indicio eſſe videtur, altitudines meridianas Polaris ſtellae *Picardo* ſupra Polum obſeruatas nullis erroribus notatu dignis eſſe inquinatas. Sed videamus, quomodo altitudines meridianae inferiores huius ſtellae ſe habeant. *Picardus* binas refert eiusmodi altitudines, alteram circa finem An. 1671. obſeruatam, 53°. 27′. 55″, alteram ſub finem menſis Aprilis 1672. captam, 53°. 27′. 45″. Patet autem ex calculis ſupra relatis, deuiationem ſtellae Polaris declinationem eiusdem a fine anni 1671. ad finem vsque menſis Aprilis An. 1672. 0″. 7. augere, dum aberratio eandem 31″. 9 imminuit; praeceſſio vero Aequinoctiorum media Polaris ſtellae declinationem eodem temporis ſpatio 6″. 1 auget, ita vt ſummatim declinatio ſtellae Polaris apparens circa finem menſis Aprilis 1672. 25″. 1 minor ſit, quam ſub finem anni 1671. Quodſi igitur altitudo meridiana ſtellae Polaris ſub finem menſis Aprilis 1672. infra Polum obſeruata 53°. 27′. 45″ augetur 25″, prodibit eiusdem ſtellae altitudo apparens meridiana inferior reſpondens ad finem anni 1671. 53°. 28′. 10″, quae altitudinem illo tempore obſeruatam 15″ ſuperat minimum, cum altitudo meri-

meridiana hiemali tempore obſeruata ob refractionum viciſſitudines minutis aliquot ſecundis maior adhuc ſtatui poſſet. Ex quo colligitur, quod altitudines meridianae ſtellae Polaris infra Polum a *Picardo* obſeruatae, non aeque congruant inter ſe, ac altitudines meridianae ſupra Polum captae. Cum vero in inueſtiganda altitudine meridiana inferiori ſtellae Polaris alteri praeferenda ad noſtrum ſcopum momenta maxima poſita ſint, notandum eſt, iam ſupra eſſe demonſtratum, poſteriorem altitudinem meridianam ſuperiorem Polaris ſtellae priori ad amuſſim conuenire, diſtantiam contra apparentem huius ſtellae a Polo, ex *Picardi* obſeruatis concluſam 8″, iuſto maiorem eſſe: haec autem differentia oritur, eam adhibendo altitudinem meridianam ſtellae Polaris inferiorem, quae circa finem anni 1671 Vraniburgi obſeruata fuit; ex quo inferre licet, altitudinem illam meridianam inferiorem Polaris ſtellae iuſto minorem eſſe, ratione altitudinum meridianarum huius ſtellae ſupra Polum obſeruatarum. Reſtat igitur, vt videamus, quaenam ſit diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo, quae ex altitudine meridiana huius ſtellae ſub finem menſis Aprilis 1672 infra Polum obſeruata fluit. Oſtendimus iam ſupra, altitudinem hancce meridianam apparentem praeciſe ad finem anni 1671. reductam eſſe 53°. 28′. 10″.; qua dempta ab altitudine meridiana apparenti, eodem tempore ſupra Polum obſeruata 58°. 22′. 45″, reſiduum erit 4°. 54′. 35″, adeoque huius dimidium, ſiue diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo 2°. 27′. 17½″. Determinauimus ſupra huius ſtellae diſtantiam apparentem a Polo ex noſtris obſeruationibus ad praefatum tempus

2°. 27′. 16″. 7, fere vt iam ex reductis obſeruationibus *Picardi* inuenimus. Admirabili hocce conſenſu praeſtantia altitudinis meridianae Polaris ſtellae circa finem menſis Aprilis 1672 obſeruatae, prae altera, quae ſub finem anni 1671 fuit obſeruata, quam maxime probatur; ita vt, reiecta hac, illam ſolam ad perficiendum calculum Eleuationis Poli Vraniburgi adhibere non dubitauerim.

Emergit itaque ex noſtris obſeruationibus declinatio Reguli apparens ad tempus, quo *Picardus* ſtellam hanc Vraniburgi obſeruauit, nempe ad initium Maii 1672, 13°. 32′. 42″. 8, et declinatio apparens Polaris ſtellae ad idem tempus 87°. 32′. 14″. 2, atque hinc ſumma complementorum declinationum harum fixarum 78°. 55′. 3″. 0, a qua ſi ſubtrahantur 43″. pro refractione ad altitudinem 53°½ et 54″. pro refractione ad altitudinem 47°½, prodibit ſumma diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburgenſi 78°. 53′. 26″. Secundum *Picardi* obſeruationes altitudo meridiana apparens Reguli erat Vraniburgi initio menſis Maii 1672. 47°. 40′. 0″, et altitudo meridiana apparens ſtellae Polaris infra Polum 53°. 27′. 45″; vnde conſequitur ſumma diſtantiarum apparentium meridianarum obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburgenſi 78°. 52′. 15″, qua comparata ad earundem diſtantiarum ſummam, ſupra ex noſtris obſeruationibus deductam, prodibit differentia 1′. 11″, adeoque error quadrantis *Picardi* ab altitudinibus; huius quadrantis beneficio obſeruatis, ſubtrahendus 35″½.

Errores

Errore quadrantis *Picardi* in apricum prolato, Eleuatio Poli Vraniburgi ex Cel. huius Aſtronomi obſervationibus ſequenti modo accurate definitur:

Eſt enim altit. app. minima ſtellae Polaris ex *Picardi* obſeruationibus - - -	53°. 27′. 45″
Error quadrantis ſubtrahendus - - - - -	35. 5
Altit. minima Polaris ſtellae correcta -	53. 27. 9. 5
Refractio ſubtrahenda - - - - - - - - -	43.
Altit. minima Pol. ſtellae errore quadrantis et refract. correcta - - - -	53. 26. 26. 5
Diſtantia app. ſtellae Pol. a Polo ex meis et *Picardi* obſeruationibus - - -	2. 27. 45. 8
Adeoque Eleuatio Poli vera Vraniburgi	55. 54. 12. 3

Nobilis *Tycho Brahe* Eleuationem Poli Vraniburgi ſtatuit eſſe 55° 54′⅓; *Picardus* autem eam ex ſuis obſeruationibus determinauit primum 55° 54′. 40″, deinde vero 55°. 54. 15″, ita vt prima *Picardi* determinatio dimidio ferme vnius minuti primi, altera vero paucis tantum minutis ſecundis a noſtro calculo differat. Verum circa illam determinationem *Picardi* Eleuationis Poli Vraniburgi, quae accuratior tutiorque ab erroribus eſſe videtur, notandum eſt, eam differentia Parallelorum Pariſienſis Obſeruatorii et Vraniburgi a *Picardo* obſeruata eſſe innixam, obſeruationesque, quas *Picardus* et Aſtronomi Regii in Obſeruatorio Pariſienſi hunc in finem compacto inſtituerunt, nonnunquam re vera 10″ ab inuicem diſcrepare, quamuis *Picardus* perſuaſum habe-

 ret,

cet, inſtrumenta ad hocce negotium adhibita perfecte congruere. Accedit etiam, quod Eleuatio Poli Obſeruatorii Pariſienſis a *Picardo* admiſſa iuſto ſit minor; hanc enim ob cauſam Cl. *le Monnier* in Hiſtoria ſua coeleſti Eleuationem Poli Vraniburgi adauxit ad 55°.54′.20″. Caeterum perſpecta atque perpenſa ratione, qua Eleuatio Poli Vraniburgi ſupra definita eſt, quin praeſens determinatio caeteris anteponenda ſit, nullus dubito. Cl. *Horrebow*, Daniae Regis Aſtronomus, Eleuationem Poli *Hafniae* variis modis obſeruauit eſſe 55°.40′.59″, ita vt admiſſa Parallelorum differentia *Hafniam* inter et Vraniburgum a *Picardo* inuenta 13′.30″, ſecundum haſce obſeruationes Eleuatio Poli Vraniburgi ſit 55°.54′.29″, adeoque 17″ maior ea, quae ex noſtro colligitur calculo. Cum vero parum vtilitatis Aſtronomiae promovendae ex diſquiſitione huius differentiae redire videatur, accuratione noſtrae determinationis ſatis iam, me iudice, probata, melius eſt ſimili methodo ſecundum obſeruationes a *Tychone* ipſo habitas Eleuationem Poli Vraniburgi diligenter indagare, vt inſtituta comparatione, et de accuratione inſtrumentorum nobiliſſimi huius Aſtronomi, et de praeciſione, quam ad obſeruationes habendas adhibuit, eo rectius exiſtimare, eiusque obſeruatis eo tutius vti poſſumus.

Determinatio Eleuationis Poli Vraniburgi obſeruationibus, a nobili *Tychone Braheo* habitis, innixa.

Praeſens diſquiſitio vt bene procedat, obſeruationes *Tychonicas* ad hocce negotium maxime idoneas aucupemur,

peamur, neceſſe eſt. Quamuis enim *Tycho* permultas inſtituerit obſeruationes definiendae latitudini Vraniburgi inſeruientes, non omnes tamen ad accuratam determinationem aeque idoneae cenſendae ſunt. Perpenſis igitur atque comparatis omnibus obſeruationibus huc ſpectantibus, illae, quas *Tycho* ſub finem menſis Februarii anni 1588. circa Polarem ſtellam habuit, mihi ad praeſentem disquiſitionem aptiſſimae omnium viſae ſunt: congruunt enim non ſolum cum obſeruationibus menſe Decembri ſubſequenti peractis, verum id quoque accedit, vt eodem fere tempore eodemque inſtrumento altitudo meridiana Reguli ſaepius obſeruata ſit. Vnde facili negotio error quadrantis, quo *Tycho* vſus eſt, modo praecedenti indagini erroris quadrantis *Picardi* ſimili, definiri poteſt.

Habebimus itaque ex obſeruationibus *Tychonicis* per quadrantem chalybeum ſub finem menſis Februarii anni 1588. Vraniburgi habitis ſaepiusque iteratis, altitudinem meridianam apparentem Polaris ſtellae infra Polum - - - - - - 52°.59′.20″,
et altitud. merid. appar. Reguli circa idem tempus eodemque organo obſeruatam - 48. 2. 30.

Ad errorem quadrantis, quo *Tycho* ad haſce obſeruationes inſtituendas vſus eſt, eruendum, determinaturus ſum, vti in praecedenti calculo, ex meis obſeruatis, declinationem Reguli et Polaris ſtellae ad tempus ſupra notatum. Admiſſa igitur declinatione Reguli media ad 1 Ian. 1748, ſupra ex meis obſeruationibus inuenta, 13°. 11′. 10″. 3. bor. prodibit ob praeceſſionem Reguli mediam in declinationem a tempore obſeruationis *Tychonis* ad 1. vsque Ian. 1748, 45′. 7″. 8 auſtrum verſus

ſus, declinatio Reguli media ad finem menſis Februarii 1588. 13°. 56′. 18″. 1 bor. Cum vero ad idem tempus deuiatio Reguli in declinationem ſit 3″. 7 auſtrum verſus, et aberratio 6″. 2 itidem auſtrum verſus, erit ad tempus iam notatum declinatio Reguli apparens 13°. 56′. 8″. 2.

Tycho quidem ad hocce tempus declinationem Reguli admittit ferme ſeſquiminuto primo maiorem; huius autem differentiae cauſa praecipue in falſa *Tychonis* hypotheſi refractionum poſita eſſe videtur: hac enim hypotheſi effectum eſt non ſolum, vt *Tycho* Eleuationem Poli Vraniburgi iuſto maiorem inueniret, verum etiam, vt ex duplici hoc errorum fonte, declinationes boreales iuſto maiores, auſtrales contra iuſto minores prodirent, nulla habita ratione errorum organorum aſtronomicorum *Tychonicorum*.

Simili modo declinatio Polaris ſtellae ad tempus obſeruationum *Tychonicarum* ſupra notatum definitur. Habemus nempe ex noſtris obſeruatis declinationem mediam ſtellae Polaris ad 1 Ian. 1748. 87°. 57′. 22″ 2. bor. a qua ſi auferantur 52′. 55″. 5 pro praeceſſione ſtellae Polaris media in declinationem, prodibit declinatio media huius ſtellae ad finem menſis Februarii An. 1588. 87°. 4′. 26″. 7, atque hinc ob deuiationem Polaris ſtellae in declinationem 1″. 8 auſtrum verſus, et aberrationem 7″ 4 boream verſus, declinatio apparens ſtellae Polaris ad idem tempus 87°. 4′. 32″. 3, ſiue diſtantia eius apparens a Polo Aequat. boreo 2°. 55′. 27″. 7.

Hiſce

Hiſce ſtabilitis, habebimus declinationem apparentem Reguli ad finem menſis Februarii 1588. 13°.56′.8″.2 bor. et conſequenter eius diſtantiam apparentem a Polo Aequatoris bor. 76°.3′.51″.8; at cum diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo Aequat. boreo ad idem tempus inventa ſit 2°.55′.27″.7, erit ſumma diſtantiarum appar. Reguli, et Polaris ſtellae a Polo Aequatoris boreo 78°.59′.19″.5, a qua ſi auferantur 54″ pro refractione Reguli, et 45″ pro refractione ſtellae Polaris, remanet ſumma diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburgenſi 78°.57′.40″.5. Secundum obſeruationes *Tychonicas* autem diſtantia apparens meridiana ſtellae Polaris a vertice Vraniburgenſi tunc erat 37°.0′.40″, et Reguli diſtantia apparens meridiana a vertice Vraniburgenſi 41°.57′.30″, adeoque ſumma diſtantiarum appar. merid. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Vraniburg. 78°.58′.10″. Apparet igitur, ſummam diſtantiarum obſeruatarum calculum noſtrum 29″.5 ſuperare, et errorem quadrantis *Tychonici* hinc eſſe 14″.7 add. quo inuento eleuatio Poli Vraniburgi ſequenti modo nullo fere negotio definitur:

Tycho ſub finem menſis Februarii Anni 1588. ſtellae Polaris altitudinem apparentem minimam obſeruauit

eſſe - - - - - - - - - - -	52°.59′.20″.
Errore quadrantis addito - - - - - - -	14.7
Prodit minima ſtellae Polaris altit. apparens correcta - - - - - - - -	52. 59. 34. 7
Refractione ſubducta - - - - - - - -	45.

Reſtat minima Polaris ſtellae altit. errore quadr. et refract. correcta - - $52^{\circ}.58'.49''.7$

Cui addendo diſtantiam apparentem ſtellae Polaris a Polo - - - - $2.\ 55.\ 27.\ 7$

Vraniburgi latitudo quaeſita erit - - $55.\ 54.\ 17.\ 4$

Patet igitur Eleuationem Poli Vraniburgi ex obſeruationibus *Tychonicis* concinnatis atque correctis deductam 5 tantum min. ſec. differre ab ea, quae ex obſeruatis *Picardi* eodem modo concinnatis et correctis fluit. Admirabili hocce conſenſu perpenſo, conuincimur, curas et cogitationes nobilis *Tychonis*, in obſeruationibus ſumma diligentia et accuratione inſtituendis, neque minus in organis aſtronomicis affabre conficiendis euigilaſſe: maiorem enim accurationem ab inſtrumentis pinnacidiis munitis ſperare aut exſpectare non poſſumus. Perſuaſum potius habemus, obſeruationes *Tychonicas*, modo vt ſedulo concinnentur atque corrigantur, excolendae Aſtronomiae magis magisque eſſe inſeruituras.

Latitudinis arcis Wandesburgenſis, nec non Hamburgenſis vrbis, determinatio.

Ad arcem Wandesburgum, cui hodie nomen eſt *Wandesbeck*, *Henricus Ranzouius* nobilem *Tychonem*, e Dania diſcedere coactum, inuitauerat. Quanquam *Tychoni* illic ſedem fixam habere mens non eſſet, varias tamen ibi autumno anni 1597, annoque inſequenti, inſtituit obſeruationes, praecipue circa Planetas, quae cum vtili-

vtilitatem haūd contemnendam afferre poſſint, operae pretium fore iudicaui, vt huius arcis, in amoena regione prope Hamburgum ſitae, Latitudinem, ex obſeruatis *Tychonicis*, quantum poſſem, accuratiſſime eruerem. Calculum hunc eo libentius attingo, quod ex poſitione arcis huius reſpectu vrbis Hamburgenſis mihi obſeruata, Latitudinem Hamburgi, de qua recentiores Aſtronomi et Geographi plus quam 8. min. prim. diſcrepant, multa cum accuratione ſtabilire poſſum. Diſquiſitionem Latitudinis huius vrbis et in Geographia et in Aſtronomia vſui eſſe palam eſt, cum *Fabricius* et *Iungius*, ſpeculatores coeleſtium rerum diligentiſſimi, complures ibi inſtituerint obſeruationes, ad Aſtronomiam excolendam fortaſſe aliquando profuturas.

Accuratione obſeruationum *Tychonicarum* ex conſenſu harum obſeruationum cum obſeruatis *Picardi* circa Latitudinem Vraniburgi praecedentibus calculis ſatis probata, eandem praeciſionem in definienda ex *Tychonicis* obſeruationibus Eleuatione Poli Wandesburgi et Hamburgi ſperare licet, modo vt harum obſeruationum Wandesburgi habitarum rite corrigendarum copia ſit. Continet autem Hiſtoria coeleſtis *Tychonis Brahei* obſeruationes nonnullas circa Regulum et Polarem ſtellam Wandesburgi habitas, quae ſimul ad errorem organi, quo *Tycho* vſus eſt, detegendum, et ad Latitudinem Wandesburgi definiendam commode adhiberi poſſunt. Antequam vero ipſum calculum aggrediar, facere non poſſum, quin moneam, obſeruationes, quas *Tycho* Wandesburgi initio anni 1598. habuit, non adeo eſſe accuratas, vt obſeruatis illo tempore altitudinibus Polaris ſtellae et

Reguli vti tute poſſimus: Organa enim *Tychonica* tunc erant, *Tychone* ipſo teſte, aliquantum vitioſa, et meridiana linea nondum ſatis accurate deſcripta. Verificatione autem organorum aſtronomicorum et meridianae lineae peracta, obſeruationes melioris notae circa Polarem ſtellam et Regulum menſe Martio eiusdem anni inſtitui coeptae ſunt, quas itaque ad ſequentem calculum adhibiturus ſum, easque praecipue, de quibus *Tycho* ipſe bene exiſtimauit.

Obſeruata nempe fuit Wandesburgi medio menſe Martio anni 1598. altitudo apparens meridiana Reguli 50°. 19′. 10″, eodemque organo per idem tempus altitudo apparens meridiana Polaris ſtellae infra Polum 50°. 44′. 0″.

Poſita igitur ex noſtris obſeruationibus ſupra exploratis declinatione Reguli media ad 1. Ian. 1748. 13°. 11′. 10″.3 bor. prodibit ob praeceſſionem Reguli mediam in declinationem inde a medio Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748. 42′. 19″. 7 auſtrum verſus, declinatio Reguli media ad medium menſem Martium 1598. 13°. 53′. 30″. 0. Deuiatio autem Reguli in declinationem cum ſit ad iſtud tempus 2″. 3 boream verſus, et aberratio in declinationem 5″. 3 auſtrum verſus, emerget declinatio apparens Reguli ad medium Martium 1598. 13°. 53′. 27″. 0.

Eodem modo declinatio apparens Polaris ſtellae ad tempus obſeruationum *Tychonicarum* circa hanc ſtellam Wandesburgi habitarum definitur. Declinatio enim media ſtellae Polaris ad 1. Ian. 1748. ſupra inuenta eſt 87°. 57′. 22″. 2 bor. a qua ſi ſubtrahantur 49′. 34″. pro prae-

præceſſione media Polaris ſtellæ in declinationem a medio menſe Martio 1598. vsque ad 1. Ian. 1748. reſtat declinatio media Polaris ſtellae ad medium menſem Martium 1598. 87°. 7′. 48″, 2, quae aucta 3″. 4 pro deuiatione ſtellae Polaris in declinationem boream verſus, et 1″. 4 pro aberratione huius ſtellae itidem boream verſus, dat declinationem apparentem Polaris ſtellae ad idem tempus 87°. 7′. 53″, ſiue diſtantiam eius apparentem a Polo Aequatoris boreo 2°. 52′. 7″.

Addendo igitur diſtantiae apparenti Polaris ſtellae a Polo nunc inuentae diſtantiam apparentem Reguli ab eodem Polo 76°. 6′. 33″, prodibit ſumma complementorum declinationum apparentium Reguli et Polaris ſtellae 78°. 58′. 40″; a qua ſi ſubtrahantur 50″ pro refractione ſtellae Polaris, et 51″ pro refractione Reguli, habebimus ſummam diſtantiarum apparentium meridianarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi ad medium Martium 1598. 78°. 56′. 59″. Diſtantia autem apparens meridiana Polaris ſtellae a vertice Wandesburgenſi tunc a *Tychone* obſeruata fuit 39°. 16′ 0″, et diſtantia apparens meridiana Reguli ab eodem vertice 39°. 40′. 50″; ita vt ſumma diſtantiarum meridianarum obſeruatarum a vertice Wandesburgenſi ſit 78°. 56′. 50″, adeoque error quadrantis *Tychonici* ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus 4″½, quo detecto, ad calculum ipſum Eleuationis Poli Wandesburgi progredi poſſumus.

Altitudo meridiana apparens ſtellae Polaris infra Polum a *Tychone* Wandesburgi obſeruabatur 50°. 44'. 0"

Subductis pro errore quadrantis - - - - -	4. 5
Remanebit altitudo merid. apparens minima correcta - - - - - - - -	50. 43. 55. 5
Subtrahendo refractionem - - - - - - -	50.
Prodit altitudo merid. minima errore quadr. et refractione corr. - - -	50. 43. 5. 5
Diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo aequatur - - - - - - - - - -	2. 52. 7. 0
Hinc Eleuatio Poli vera Wandesburgi -	53. 35. 12½.

Latitudine Wandesburgi in apricum prolata, facili iam negotio Latitudinem vrbis Hamburgenſis definire poſſumus. Obſeruaui enim, turrim Wandesburgenſem e templo quodam in media fere vrbe ſito ſpectatam 54°. 30' a Septentrione Orientem verſus declinare. Diſtantia vero templi huius Hamburgenſis a turri Wandesburgenſi ex menſuris, quas in agro Hamburgenſi cepi, aequatur 1780. hexapedis Pariſ., ita vt ex hiſce datis et ex Latitudine Wandesburgi ſupra inuenta differentia Meridianorum Hamburgum inter et Wandesburgum prodeat 2'. 34". Aequat. ſiue 10¼" temp. Eleuatio Poli vera autem Hamburgi 53°. 34'. 8".

Si iam Eleuationem Poli Hamburgi ex noſtro calculo deductam ad Latitudinem comparemus, quam Aſtronomi et Geographi vrbi huic aſſignarunt, patet, pleroſque Latitudinem Hamburgenſis vrbis iuſto maiorem feciſſe. Secundum mappas geographicas fere omnes

Latitudo

Latitudo huius vrbis tertia circiter vnius gradus parte praecedentem determinationem ſuperat. *Keplerus* Latitudinem hanc 8⅔ min. prim., *Caſſini* 7⅓ min. prim. et *Tycho* ½ min. prim. circiter iuſto maiorem admittunt. Cl. *Iungius*, *Fabricium* adiutorem habens, cum de Latitudine Hamburgenſis vrbis accurate determinanda cogitaret, ſaeculo proxime praeterlapſo negotium hocce binorum organorum aſtronomicorum pinnacidiis munitorum et in Anglia confectorum beneficio peragendum ſuſcepit. Latitudo autem, quam *Iungius* ex ſuis obſervationibus, quarum ſingula non perſcripſit, vrbi huic aſſignat, 6⅓ min. prim. noſtram determinationem ſuperat: Cl. *Kirchium* vero proxime ad noſtrum calculum accedere, ex eius diſſertatione de hocce argumento conſcripta, et Miſcell. Berol. inſerta, facile demonſtrari poteſt; ſed nihil eſt, quod diutius in hac diſquiſitione moremur; magis intereſſet Longitudines ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* nunc eodem praeciſionis gradu, quo Latitudines, inueſtigare atque ſtabilire, ſed hanc diſquiſitionem ad aliud tempus reiicimus. Sufficiat hic tanquam in tranſitu monuiſſe, Cl. *Kirchium* ex obſeruata Eclipſi ſolari differentiam Meridianorum Hamburgum inter et Berolinenſe Obſeruatorium determinaſſe 12′.45″. temp. ita vt ex hac obſeruatione et praecedenti calculo differentia Meridianorum Berolinenſis Obſeruatorii et ſpeculae aſtronomicae *Tychonicae* Wandesburgenſis ſit 12′.35″ temp. ſiue Longitudo Wandesburgi 27°.57½′.

Diſquiſitione Latitudinum ſpecularum aſtronomicarum *Tychonicarum* ad exitum perducta, promiſſo teneor,

eas exhibere obſeruationes, quas ad Latitudinem Pariſienſis Obſeruatorii Regii indagandam ſumma diligentia inſtitui. Obſeruationes iſtae non ſolum inſeruient probandis declinationibus fixarum, quas ex obſeruationibus eodem inſtrumento in Pariſienſi Obſeruatorio a me habitis deduxi, quarumque nonnullas ad praecedentes calculos adhibui; verum etiam ad exiles illas differentias, quae in Latitudine famoſiſſimi huius Obſeruatorii obuiae ſunt, diiudicandas atque dirimendas, non inutiles erunt.

Obſeruationes aſtronomicae ad Latitudinem Obſeruatorii Regii Pariſienſis definiendam habitae Anno 1748. ſt. n.

Sequentes obſeruationes circa Polarem ſtellam exquiſiti quadrantis tripedalis radii ſuper linea meridiana in pauimento turris occidentalis Obſeruatorii Pariſienſis deſcripta collocati beneficio ad lumen crepuſculare et diurnum, nullo lumine peregrino fila teleſcopii colluſtrante, inſtitutae ſunt.

d. 11. Ian. obſeruaui altit. merid. appar.

	Polaris ſtellae ſupra Polum -	50°. 53'. 45". 7
14. Ian.	- - - - - - - - -	50. 53. 42. 6
26. Ian.	- - - - - - - - -	50. 53. 44. 8
30. Ian.	- - - - - - - - -	50. 53 43. 9.

Cum obſeruationes hae diuerſis diebus habitae ſunt, conferri inuicem commode nequeunt, niſi omnes ad vnum eundemque diem ſecundum praeceſſionis, deviationis

viationis et aberrationis leges reducantur. Quam ob rem praeceſſionem, deuiationem et aberrationem Polaris ſtellae in declinationem ad dies obſeruationum ſupra notatos ſupputaui, et in ſequenti tabula exhibui, vt harum correctionum ope obſeruatae altitudines meridianae Polaris ſtellae ad 1. Ian. 1748. reduci queant.

Praeceſſio Polaris ſtellae in declinationem.

a 1. Ian. 1748. vsque ad	11. Ian.	0″.5	Bor. verſus
	14. - -	0. 7	
	26. - -	1. 4	
	30. - -	1. 6	

Deuiatio ſtellae Polaris in declinationem.

ad 1. Ian. 1748.	5″.7	Bor. verſus
11. - -	5. 8	
30. - -	5. 9	

Aberratio ſtellae Polaris in declinationem aequatur

d. 1. Ian. 1748.	19″.9	Bor. verſus
11. - - -	19. 5	
14. - - -	19. 3	
26. - - -	17. 8	
30. - - -	17. 1	

Erit igitur altitudo meridiana obſeruata Polaris ſtellae ſupra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta

Ex 1ma obſeruatione - - -	50°. 54′. 11″. 5
2da - - - - - - -	50. 54. 8. 4
3tia - - - - - - -	50. 54. 9. 9
4ta - - - - - - -	50. 54. 8. 5
Per medium igitur inter iſtas obſeruationes	50. 54. 9. 6

Eodem quadrante eodemque in loco altitudinem meridianam Polaris ſtellae infra Polum quantum potui accura-

accuratiſſime obſeruaui, eamque d. 27. Maii 1748. coelo eximie ſereno ad lumen crepuſculare plus vice ſimplici inueni 46°. 48′. 55″.

Cum vero praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem a d. 1. Ian. 1748. vsque ad 27. Maii ſit 7″. 9. boream verſus, deuiatio autem huius ſtellae in declinationem d. 27. Maii 1748. 6″. 3 itidem boream verſus, et eius aberratio in declinationem die notato 16″. 9. auſtrum verſus, prodibit altitudo meridiana obſeruata ſtellae Polaris infra Polum deuiatione et aberratione correcta et ad 1. Ian. 1748. reducta 46° 48′. 57″. 7.

Antequam vero in ſupputandis hiſce obſeruationibus vlterius progrediar, de iis dicendum erit obſeruationibus, quarum beneficio quadrantis huius verificatio peracta fuit. Quadrante hoc per inuerſionem ad Horizontem iam verificato, reſtabat, vt eius verificatio ad Zenith more conſueto inſtitueretur; quae cum ſit difficillima, omnia prouidi praecauique, vt negotium hocce bene ſub manus ſuccederet, lucidae Perſei beneficio proxime ad Zenith Pariſienſe accedentis.

Plano itaque quadrantis tripedalis radii ſupra memorati ſumma cura verticaliter ſuper famoſiſſima meridiana linea marmorea obſeruatorii Regii Pariſienſis collocato, ſequentes altitudines meridianae α Perſei ad lumen diurnum mihi et Celeb. *le Monnier* coniunctim obſeruatae ſunt:

Facie

Facie quadrantis Orientem ſpectante,

D. 16. Februarii 1748. 90°. + 6'. 59''. 7
17. - - - - - - - + 7. 3. 5
20. - - - - - - - + 7. 1. 0

Facie quadrantis Occidentem ſpectante,

D. 21. Febr. 1748. 90°.—5'.59''.1. accuratiſſ. coelo grate ſereno.- - - -

Vt ſummam ſeruarem praeciſionem in ſupputandis comparandisque eiusmodi obſeruationibus vſitatam, ſequentes ſupputaui correctiones, reducendis altitudinibus meridianis ſupra notatis inſeruientes:

Praeceſſio media α Perſei in declinationem

Ad 1. Ian. 1748. vsque ad 16. Febr.	1''. 9	} Bor. verſus	
17. -	1. 9		
20. - -	2. 0		
21. - -	2. 0		

Deuiatio α Perſei in declinationem

ad 1. Ian. 1748.	8''. 3	} Bor. verſus
21. Febr. - -	8. 2	

Aberratio α Perſei in declinationem

d. 1. Ian. 1748.	10''. 9	} Bor. verſus
16. Febr. - - -	9. 5	
17. - - -	9. 4	
20. - -	9. 1	
21. - - -	9. 0	

Adhibitis itaque hiſce correctionibus, ad reducendas altitudines meridianas α Perſei ſupra exhibitas, habebimus:

Diſtantiam meridianam obſeruatam α Perſei a vertice Obſeruatorii Reg. Pariſ. deuiatione et aberratione correctam et ad 1. Ian. 1748. reductam,

ex 1ma obſeruatione	6′.40″1.	bor. verſus	Limbo quadrantis ad Orient. obverſo.
2da - - -	6. 44. 0	- -	
3tia - - -	6. 41. 7	- -	
Per medium igitur inter haſce obſeruationes -	6. 41. 9	bor. verſus	
ex 4ta obſeruatione	5. 39. 9	bor. verſus.	Limbo quadrantis ad Occid. obverſo.
Differentia	1. 2.		

Prodibit igitur diſtantia media merid. α Perſei a vertice Obſeruatorii Reg. Pariſienſis ad 1. Ian. 1748 6′. 10″. 9 boream verſus, adeoque error quadrantis circa Zenith ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendus, 31″. Cum vero eiusdem quadrantis error, per alteram inuerſionem, circa Horizontem inſtitutam, inuentus ſit vix duobus minutis ſecundis minor, aſſumere poſſumus 30″. pro errore huius quadrantis ad obſeruationes noſtras corrigendas conſtanter adhibendo, modo limbi diuiſio huius quadrantis nullo errore ſit inquinata.

Reſtat nunc, vt refractiones, quibus ad corrigendas obſeruationes Polaris ſtellae ſupra relatas vtendum eſt, quantum poſſumus, accuratiſſime ſtabiliamus. Ad hoc efficiendum notandum eſt, altitudinem Mercurii in Barometro diebus illis, quibus Polarem ſtellam menſe Ianuario ſupra Polum obſeruaui, eandem ferme fuiſſe, quae d. 27 Maii, quo altitudinem Polaris ſtellae minimam cepi, obſeruabatur, vtroque nimirum tempore fere ſummam; temperiem contra aeris maxime diuerſam, exiſtente differentia 40. fere grad. Thermometri *De l'Isliani*;

quae

quae temperiei aeris differentia ſecundum noſtras obſeruationes Petropoli et in Inſula Oſilia habitas, in refractione pro altitudine Polari Pariſienſi differentiam 3″. minimum procreare valet. Poſita igitur refractione pro altitudine Polaris ſtellae maxima Ianuario menſe in Obſeruatorio Reg. Pariſienſi obſeruata 49″, refractio, quae altitudini ſtellae Polaris minimae menſe Maio Pariſiis obſeruatae conuenit, 53″. ſuperare non poteſt. Hiſce admiſſis, calculus Eleuationis Poli Obſeruatorii Regii Pariſienſis ſequenti modo perficitur:

Altit merid. obſeruata ſtellae Polaris deuiatione et aberratione correcta ad 1. Ian. 1748. eſt	ſupra Polum	50°.	54′.	9″.	6
	infra Polum	46.	48.	57.	7
Error quadrantis		— 0.	0.	30	—
Refractio	pro alt. max.	— 0.	0.	49	—
	pro alt. min.	— 0.	0.	53	—
Altit. merid. med. ſtellae Polaris correcta	ſupra Polum	50.	52,	50.	6
	infra Polum	46.	47.	34.	7
Differentia		4.	5.	15.	9
Diſtantia media ſtellae Polaris a Polo		2.	2,	37.	9
Altit. merid. med. ſtellae Polaris infra Polum		46.	47.	34.	7
Eleuatio Poli vera Obſeruatorii Regii Pariſ.		48.	50.	$12\frac{1}{5}$.	

Latitudinis Obſeruatorii Regii Berolinenſis determinatio.

Obſeruationes, quas ad Latitudinem Berolinenſis Obſeruatorii ſtabiliendam, in loco quodam, ab Obſeruatorio ipſo 1″. boream verſus remoto, peregi, quadrantis tri-

pedalis radii ſumma diligentia meo ductu Pariſiis confecti, et duplici limbi diuiſione inſtructi, beneficio, inſtitutae ſunt. Perſpecta nempe huiuſce quadrantis praeſtantia atque praeciſione, praeſertim in limbi eius diuiſione, examinatoque axis tubuli ad quadrantem hunc applicati paralleliſmo, planum huiuſce organi ſuper linea meridiana accurate deſcripta verticaliter collocaui, et ſequentes altitudines et Polaris ſtellae, et oculi Draconis, Latitudinis Berolinenſis Obſeruatorii definiendae et quadrantis verificandi gratia, ſumma qua potui accuratione obſeruaui

Altitudines ſtellae Polaris meridianae infra Polum ad Lumen crepuſculare et diurnum An. 1750 Berolini obſeruatae.

D. 24. Maii ſt. n.	50° 30′. 27″. 4	Coelo eximie ſereno atque placido.
25. - - -	50. 30. 25. 2	
30. - - -	50. 30. 23. 6	
1. Iunii - -	50. 30, 27. 4	

Vt harum obſeruationum comparatio *accuratius* commodiusque inſtitui poſſit, obſeruationes haſce omnes ad primum diem Ianuarii An. 1750 ſt. n. reducere iuuat. Correctiones autem ad iſtam reductionem adhibendae ſequentes ſunt:

Praeceſſio media Polaris ſtellae in declinationem

Ad 1 Ian. 1750 vsque ad d. 24. Maii	7″. 2	Bor. verſus
25. - -	7. 3	
30. - -	7. 5	
1. Iun.	7. 6	

Deuiatio ſtellae Polaris in declinationem

Ad 1. Ian. 1750 - -	6″. 9	Bor. verſus
1. Iunii - - - -	6. 7	

Aber-

Aberratio Polaris ſtellae in declinationem

Ad 1. Ian. 1750.	- -	19″. 8	Bor. verſus	
24. Maii	- - - -	16. 1	}	Auſtrum verſus.
25	- - - - - - -	16. 3		
30	- - - - - - -	17. 2		
1 Iunii	- - - -	17. 5		

Reductione facta habebimus altitudinem meridianam obſeruatam Polaris ſtellae infra Polum deuiatione et aberratione correctam et ad 1 Ian. 1750 reductam,

ex 1ma obſeruatione	- -	50°.30′.29″.6
2da	- - - - - - -	50. 30. 27. 5
3tia	- - - - - - -	50. 30. 26. 6
4ta	- - - - - - -	50. 30. 30. 6
Per medium igitur inter iſtas obſeruationes		50 30. 28. 6

Ad errorem quadrantis, cuius beneficio praecedentes obſeruationes habitae ſunt, explorandum, ſequentem inſtitui verificationem, per inuerſionem huius inſtrumenti circa Zenith, ſumma cura Berolini peractam; obſeruaui nempe

Facie quadrantis Occidentem ſpectante,

An. 1750 d. 23 Iul. ſt. n. Altitud. merid.

appar. β Draconis	-	90°+122″.0
26.	- - - - - - - - -	+120. 7
27.	- - - - - - - - -	+118. 2
28.	- - - - - - - - -	+120. 1

Facie quadrantis in Orientem conuerſa,

An. 1750 d. 10. Aug. ſt. n. Altit. merid.

appar. β Draconis	- - -	90°−32″.5
13. Aug.	- - - - - - -	−30. 3

Concinnandis comparandiſque hiſce altitudinibus β Draconis obſeruatis, inſeruient ſequentes correctiones declinationis huius ſtellae :

Praeceſſio media β Drac. annua in declinationem 3″. 1. auſtrum verſus	Deuiatio β Draconis in declinationem pro tempore obſeruationum praecedentium, 1″. 3 auſtr. verſus.

Aberratio β Draconis in declinationem

ad d. 23. Iulii 1750. - - -	11″. 7	Boream verſus
26. - - - - - - -	12. 5	
27. - - - - - - -	12. 8	
28. - - - - - - -	13. 0	
10. Aug. - - - - - -	15. 7	
13. Aug. - - - - - -	16. 2	

Ratione harum correctionum habita, prodibit altitudo meridiana obſeruata β Draconis aberratione et deuiatione correcta, et ad 1 Ian. 1750. reducta,

Limbo quadrantis ad Occident. conuerſo:

ex obſeruat. d. 23. Iul. - - -	90° + 130″. 7
26. - - - - - -	+ 130. 1
27. - - - - - -	+ 127. 9
28. - - - - - -	+ 130. 0
Per medium igitur - - - - -	90° + 129″. 7

Limbo quadrantis in Orientem conuerſo :

ex obſeruatione d. 10. Aug. - - -	90° − 45″. 0
13. - - - - - - -	− 43. 3
Per medium itaque - - - - - -	90° − 44. 1.

Hinc

Hinc diſtantia med. mer. β Draconis
a Vertice Berol. in primo ſitu quadr. 2′. 9″. 7 Auſtr. verſ.
- - - in altero ſitu quadrantis 0. 44. 1 Auſtr. verſ.

Differentia, ſiue duplus quadrantis error
circa Zenith - - - - - - 1. 25. 6
Error quadrantis ſimplex ab altitudi-
nibus obſeruatis ſubtrahendus - - 42. 8, et
Diſtantia media meridiana β Draconis
a Vertice Berolinenſi - - -
ad 1. Ian. 1750. ſt. n. - - - 1′. 26″. 9 Auſtr. verſ.

Eiusdem quadrantis verificatione more ſolito per inuerſionem circa Horizontem Berolini caute peracta, inueni Altitudines circa Horizontem captas per hunc quadrantem 41″. 6 iuſto maiores exhiberi, ita vt tuto ſtatuere poſſimus arcum huiuſce quadrantis 90 graduum iuſtae eſſe amplitudinis, totumque errorem huius organi ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum conſtanter aequari 42″.

Hiſce praemiſſis Eleuatio Poli Obſeruatorii Berolinenſis ſequenti ratione ex noſtris obſeruationibus definitur:

Alt. mer. Polar. ſtellae infra Polum obſeru.
deuiatione et aberrat. corr. et ad obſeru.
Ber. et 1 Ian. 1750 reducta eſt - - 50°. 30′. 27″. 6
A qua ſi ſubtrahatur error quadrantis - - - - 42

Reſtat altit. merid. med. Pol. ſtellae infra
Pol. correcta et ad 1 Ian. 1750 reducta 50. 29. 45. 6
Dempta refractione aeſtiua - - - - - 46.

Rema-

Remanet altit. mer. med. Pol. ſtellae infra Polum errore quadr. et refractione correcta ad 1 Ian. 1750. - - - - 50. 28. 59. 6

Cui ſi addatur diſtantia med. Polaris ſtellae a Polo ex obſeruationibus noſtris Pariſ. ad 1 Ian. 1750. reducta - - - - - 2. 1. 58. 5

Prodibit Eleuatio Poli vera Obſeruatorii Regii Berolinenſis - - - - - 52. 30. 58.

Eleuationem Poli Berolinenſis Obſeruatorii hac occaſione alia methodo demonſtrare atque comprobare, a praeſenti diſquiſitione alienum fore non exiſtimo. Methodus autem, qua nunc vtar, nititur aequalibus fere altitudinibus meridianis Polaris ſtellae et Reguli Berolini vno eodemque quadrante obſeruatis. Obſeruaui nempe Berolini in loco ſupra iam deſcripto An. 1750. d. 15. Maii ſt. n. ſole lucente, altitudinem meridianam apparentem Reguli quam potui accuratiſſime 50°. 40′. 48″. 1. Cum vero praeceſſio media Reguli in declinationem a d. 1 Ian. 1750. ad d. 15 Maii ſit 6″. 0 auſtrum verſus, deuiatio Reguli in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″. 9, et d. 15 Maii 5″. 5 auſtrum verſus, et aberratio huius ſtellae in declinationem d. 1 Ian. 1750. 4″. 9, et d. 15 Maii 0″. 1 itidem auſtrum verſus, prodibit altitudo meridiana apparens Reguli ad d. 1 Ian. 1750 reducta 50°. 40′. 49″. 9.

Altitudo meridiana apparens Polaris ſtellae infra Polum ad idem tempus, ſecundum obſeruationes Berolinenſes ſupra exhibitas, aequatur 50°. 30′. 55″. 3; ita vt ſubtractis ab vtraque altitudine 46″. pro refractione, ſumma

Turn over two leaves

Temp.Pend.Aſtr.

d. $\frac{11}{22}$ Nov. $13^h.54'.24''$ Alt. marg. ☽ae bor $= 51°.20' + \frac{1}{4}$fil $5^R.23^P$. Accurata

56. 11 App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox. intra 1 vel 2'' dub.

Plures altit. ☽ae capere propter nubes non licuit.

Altit. merid. β ♈ cum altit. merid. ☽ae hodierno die obſeruata comparanda ex obſeruatis d. $\frac{14}{25}$ Oct. colligi poteſt.

d. $\frac{14}{25}$ Nov. $16^h.54'.22\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae auſtr. $= 44°.20' - 2^R.47^P$.

54. 53	-	-	-	-	-	-	2. 54
55. 9	-	-	-	-	-	-	2. 57
55. 30	-	-	-	-	-	-	60
55. 44	-	-	-	-	-	-	63½
55. 58½	-	-	-	-	-	-	64
56. 15	-	-	-	-	-	-	64
56. 30½	-	-	-	-	-	-	64

56. 42 App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.

57. 4½ Altit.	-	-	-	-	-	2. 69½
57. 24	-	-	-	-	-	2. 72

$17^h.35'.0'$ Diam. ☽ae app. cornua tranſ. Micr. Grah. $= 35^R.31\frac{1}{2}^P$.

39. 0	-	-	-	-	-	-	32
43. 0	-	-	-	-	-	-	32½

$18^h.17'.21''$ Altit. α ♌ $= 45°.0' - 1^R.96\frac{1}{2}^P$.

17. 34 App. α ♌ ad fil. vert. Merid. prox.

17. 58½	-	-	-	1. 95.
18. 20	-	-	-	1. 94
18. 57	-	-	-	1. 94½.

Temp Pend. Aſtr.

d. $\frac{15}{26}$ Nov. $3^h.59'.43''$ App. α Aquilae ad fil. vert. Merid. prox.
Per nubes $4.\ 0.\ 9$ Altit. α Aquilae $= 40^\circ.0' + 0^R.40^P$.
tenues 0. 40 - - - - - 41
1. 5 - - - - 42
1. 30 - - - - 42.
$15^h.31'.46''$ Alt. β can. min. $= 40^\circ.30' - \frac{1}{12}$ fil. $+ 1^R.12^P\frac{1}{2}$.
32. 43 - - - - - 1. 14
33. $9\frac{1}{2}$ App. β can. min. ad fil vert. Merid. prox.
33. 48 Altit. - - - - 1. 12
34. 13 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
34. 45 - - - - - 1. $11\frac{1}{2}$
Per inter- $17^h.48'.26''\frac{1}{2}$ Alt. marg. ☽ae auſtr. $= 40^\circ.0' - \frac{1}{3}$ fil. $- 0^R.27^P\frac{1}{2}$.
valla luci- 50. 33 - - - - - 0. 49
da. 51. $8\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox. circiter

d. $\frac{16}{27}$ Nov. $0^h.31'.50''\frac{4}{5}$ App. 1^{mi} limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
34. $11\frac{1}{5}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{20}{1}$ Nov. Dec. $0^h.35'.55''\frac{1}{5}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
38. $15\frac{4}{5}$ App. 2di limbi ☉lis ad idem filum

1753. Indicibus Penduli aſtron. ad horam aeſtimatam diſpoſitis.

d. $\frac{8}{19}$ Ian. $11^h.49'.23''$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

d. $\frac{2}{13}$ Febr. $0^h.\ 0'.56''\frac{3}{4}$ Meridies verus ex 7 altit. ☉lis reſpond.
eod. $8^h.\ 0'.23''$ Alt. marg. ☽ae bor. $= 51^\circ.0' - \frac{5}{12}$ fil. $+ 2^R.29^P$.
0. $46\frac{1}{2}$ - - - - - 2. $25\frac{1}{2}$

Temp.

Temp. Pend Aſtr.

	1. 5	App. 1 limbi ☽ ad filum vert. Merid. prox.
Coelo	1. 29.	Altit. - - + 2. 24
ſub	2. 1	- - - - 2. 26
ſereno.	2. 28	- - - - 2. 24
	2. 51	- - - - 2. 26
	3. 24	- - - - 2. 23½
	3. 47	- - - - 2. 21½
	16^b. 12′. 56″	Altit. Arcturi = 52°. 10′ − ⅓ fil. + 2^R. 27 ^{P}½.
	14. 6	App. Arcturi ad fil. vert. Merid. prox. intra ½″ dubius
	15. 21	Altit. - - - - 2. 28
	15. 46	- - - - - 2. 28
d. 4/15 Febr.	0^b. 1′. 10″½	App. 1mi limbi ☉ ad fil vert. Mer. prox.
	3. 23½	App. 2di limbi ☉ ad idem filum.
d. 9/20 Febr.	11^b. 1′. 54″	{1′½ circiter ante culmin.} Altitud. α Hydrae = 24°. 10′ − ⅝ fil. + 0^R. 73 ^{P}½.
Paulo poſt culmin. per intervalla ſerena.	4. 46	- - - - - 0. 76
	5. 2	- - - - - 0. 74
	14^b. 40′. 43″	Alt. marg. ☽ auſtr. = 22°. 50′ − ⅔ fil. − 5^R. 65 ^{P}.
	41. 8	- - - - - 5 67
	41. 31	- - - - - 5. 71
	41. 49	- - - - - 5. 73½
	42. 10	- - - - - 5. 77½
	42. 34	- - - - - 5. 80
	42. 54	- - - - - 5. 82¼
	43. 11	- - - - - 5. 84½
	43. 24	- - - - - 5. 86

Temp.

For p 521 turn forward 2 leaves

Temp. Pend. Aſtr.

$43'.36''\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ ad fil. vert. Merid. prox.

43. 54 Altit. - - - - - 5. $92\frac{1}{2}$

$15^{h}. 4'.$ 0 Diameter ☽ae app. cornua iungens Micr. Grah. $= 34^{R}. 35^{P}\frac{1}{2}$

9. 0 - - - - - - - 37

16. 0 - - - - - - - $35\frac{1}{2}$

27. 0 - - - - - - - $36\frac{1}{2}$

d. $\frac{10}{21}$ Febr. $0^{h}. 4'.59''\frac{1}{3}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

7. $12\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

eod. $0^{h}. 6'. 4''\frac{9}{10}$ Merid. verus ex 5 altit. ☉ reſpond.

d. $\frac{11}{22}$ Febr. $0^{h}. 5'.35''$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox. dubius

7. $46\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum

d. $\frac{12}{23}$ Febr. $8^{h}. 8'.47''\frac{1}{2}$ App. α Lyrae ad fil. vert. tubi muralis

eod. $16^{h}.57'. 0''$ Diameter ☽ae app. cornua tranſ. Micr. Grah. $= 32^{R}: 36^{P}\frac{1}{2}$

59. 0 - - - - - - $39\frac{1}{2}$

17. 0. 0 - - - - - - $38\frac{1}{2}$

2. 0 - - - - - - 39

5. 0 - - - - - - 39

d. $\frac{13}{24}$ Febr. $0^{h}. 7'.47''\frac{2}{3}$ Merid. verus ex 9. altit. ☉ reſpond.

0. 7. $48\frac{1}{2}$ App. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox ex obſeruatione

6. $42\frac{1}{2}$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

8. $54\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum.

Coelo $17^{h}. 6'. 0''$ Diameter ☽ae apparens cornua tranſ. Micr. Grah. $= 32^{R}. 19^{P}\frac{1}{2}$.

eximie 8. 0 - - - - - - $20\frac{1}{2}$

ſereno 11. 0 - - - - - - $18\frac{1}{2}$

12. 0 - - - - - - 18.

Temp.

ſumma diſtantiarum meridian. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Berolinenſi ad 1 Ian. 1750. ſit 78°.49′.45″.8.

Declinatio Reguli media ex noſtris obſeruationibus in Obſeruatorio Reg.-Pariſ. habitis ad d. 1 Ian. 1748. ſupra inuenta eſt 13°.11′.10″.3 bor. Habita itaque praeceſſionis, deuiationis et aberrationis ratione, habebimus declinationem Reguli apparentem ad 1. Ian. 1750. 13°.10′.26″.2, ſiue eius complementum 76°.49′.33″.8. Diſtantia apparens Polaris ſtellae a Polo ad idem tempus ex memoratis obſeruationibus colligitur 2°.1′.31″.8, ita vt ſumma diſtantiarum merid. apparentium Polaris ſtellae et Reguli a vertice Berolinenſi ad 1 Ian. 1750. ſit 78°.51′.5″.6, quae comparata cum ſumma diſtantiarum merid. obſeruatarum Reguli et Polaris ſtellae a vertice Berolinenſi ad d. 1 Ian. 1750. 78°.49′.46″.8, dat errorem quadrantis ab altitudinibus obſeruatis ſubtrahendum 39″.4. Quare ſic abſoluetur calculus:

Altit. merid. Reguli interdiu Berolini obſeruata et ad Obſeruatorium Berolinenſe et 1 Ian. 1750 reducta eſt	50°.40′.50″.9
Error quadrantis ſubtrahendus - - - - - -	39. 4
Altit. merid. appar. Reguli ad 1 Ian. 1750 errore quadr. correcto -	50. 40. 11. 5
Refractio aeſtiua ſubtrahenda - - - - -	46.
Altit. merid. Reguli errore quadrantis et refractione correcta - - -	50. 39. 25. 5

Declinatio apparens Regoli ex obſeruationibus noſtris Pariſ. collecta et ad d. 1 Ian. 1750 reducta - - - 13° 10′. 26″. 2.

Eleuatio Aequatoris vera Obſeruatorii Regii Berolinenſis - - - - 37. 28. 59. ſiue Eleuatio Poli vera - - - - 52. 31. 1.

Egregius hicce conſenſus praeſentis calcu i cum praecedenti Eleuationis Poli Berolinenſis Obſeruatorii determinatione noſtrarum obſeruationum in hac differtatione relatarum, et concluſionum exinde deductarum accuratione mirifice comprobat, eoque rem adducit, vt certiſſime ſtabilire poſſimus Eleuationem Poli Obſeruatorii Berolinenſis 52°. 31′. 0″.

OBSER-

OBSERVATIONES LUNARES CORRESPONDENTES IN INSULA OSILIA HABITAE ANNO 1752.

Auctore

A. N. GRISCHOW.

	Temp. Pend. Aſtr.	
d. 14/25 Oct.	$0^h. 9'. 26''$	App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.
	5. 45. $29\frac{1}{2}$	App. α Aquilae ad fil. vert. Merid. prox.
Per nubes vento SSW vehemente.	11. 45. $29\frac{1}{2}$	Alt β ♈ = 51°. 20′ + $\frac{1}{3}$ fil. + $0^R 71^P$.
	11. 47. $1\frac{1}{2}$	App. dubius β ♈ ad fil. vert. Mer. prox. per nubes
	48. 26.	Alt. β ♈ = 51°. 20′ + $\frac{1}{3}$ fil. + $0^R. 68^P$.
Per nubes poſt culminationem centri Lunae.	$14^h. 52'. 37\frac{1}{2}''$	Alt. marg. ☽ae bor. = 51°20 + $\frac{1}{3}$ fil. + $0^R. 70^P$.
	52. 59	- - - - - - - - - - - - - - 0. 70
	$15^h. 28'. 21''$	App. ρ ♉ ad fil. vert. Mer. prox.
Per nubes	28. $59\frac{1}{2}$	Altit. ρ ♉ = 52°. 40′. + $1^R. 87\frac{1}{2}^P$.
	29. 51	- - - - - - - - - - 1. 91
	30. 22	- - - - - - - - - - 1. $88\frac{1}{2}$
d. 16/27 Oct.	0. 10. $31\frac{1}{2}$	App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. intra $\frac{1}{2}''$ dubius

Temp Pend. Aſtr.

d. $\frac{26\ Oct.}{8\ Nov.}$ $0^{h}.15'.37\frac{3}{4}''$ Merid. verus ex 9 altitudin. ☉ reſpond.

$0.\ 15.\ 34.6$ App. centri ☉ obſeruat. ad fil. vert. Merid. prox.

$0.\ 0.\ 3'' =$ diff.

d. $\frac{2}{13}$ Nov. $0^{h}.25'.43''$ Merid. verus ex 6 altudin. ☉ reſpond.

$0.\ 25.\ 42.$ App. obſeruat. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

$8^{h}.42'.51''$. Alt. γ Pegaſi $= 45^{\circ}.30' + 2^{R}.36\frac{1}{2}^{P}$.

$43.\ 32$ - - - - - - - $2.\ 36\frac{3}{4}$.

Per nubes ten. $44.\ 9\frac{2}{3}$ App. ad fil. vert. Merid. prox.

$45.\ 17\frac{1}{2}$ Altit. - - - - $2.\ 35$

$10^{h}.53'.38\frac{1}{2}''$ Alt. marg. ☽ae auſtr. $= 45^{\circ}.0' + \frac{3}{4}$ fil. $+ 1^{R}.79^{P}$.

$53.\ 58$ - - - - - - - - - - $1.\ 82$

$54.\ 12\frac{2}{3}$ App. 1 limbi ☽ae ad fil. vert. Mer. prox.

$54.\ 48$ Altit. - - - - - - + $1.\ 84$

$55.\ 4\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 87$

$55.\ 24$ - - - - - - - - - - $1.\ 87\frac{1}{2}$

$55.\ 43$ - - - - - - - - - - $1.\ 92$

$55.\ 58\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 95$

$56.\ 13\frac{1}{2}$ - - - - - - - - - - $1.\ 97$

$56.\ 32$ - - - - - - - - - - $1.\ 98$

$56.\ 47$ - - - - - - - - - - $2.\ 2$

$57.\ 5$ - - - - - - - - - - $2.\ 4$

$11^{h}.24'.$ o Diam. app. ☽ cornua tranſ. Micr. Grah. $35^{R}.4^{P}$.

$11.\ 29.$ o - - - - - - - - - $35.\ 5\frac{1}{2}$

$11.\ 34.$ o - - - - - - - - - $35.\ 6$

d. $\frac{10}{21}$ Nov. $0^{h}.26'.21\frac{1}{2}''$ App. 1 limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox. circiter

Per nubes ten. $28.\ 41\frac{1}{3}$ App. 2 limbi ☉lis - - - - - prox.

Temp.

	Temp. Pend. Aſtr.		
	$17^h.23'.47''$	Altit. β ♏ = $12°.50' - \frac{1}{4}$ fil. −	$2^R.97^P$.
ſereno	24. 9	- - - - -	2. $96\frac{1}{3}$
	24. 35	- - - - -	2. 96
et	25. 6	- - - - -	2. 97
	25. 18	App. β ♏ ad fil. vert. Merid. prox.	
aere	26. 36	- - - -	$8^R. 1^P$.
	$17^h.48'.25''\frac{1}{3}$	App. α ♏ ad fil. vert. Merid. prox.	
tran-	18^h. 5. $1''$	Altit. marg ☽ae auſtr. = $11°.30' -$	$2^R.31^P\frac{1}{3}$
	5. 25	- - - - -	2. 34
quillo	5. 29	- - - - -	2. 34
	6. 12	- - - - -	2. 35
	6. 41	- - - - -	2. 34
	7. 3	- - - - -	2. $34\frac{1}{2}$
	7 24	- - - - -	2. 35
	7. 40	- - - - -	2. $36\frac{1}{3}$
	7. $43\frac{1}{2}$	App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox.	
	8 10	Altit. - - - -	2. 35
	8 28	- - - - -	2. 37.

d. $\frac{19}{2}$ $\frac{Febr.}{Mart.}$ $7^h.46'.12''\frac{1}{3}$ App. α Lyrae ad fil. vert. tubi muralis.

Error indicis Micrometri quadrantis triped. conſt. inuentus fuit in Inſul. Oſilia $= 5\frac{3}{4}^{Part.} = 7''\frac{1}{4}$, quibus altitud. ſiderum ſupra notatae augendae ſunt. Valor 10. Reuol. cochleae huius Micrometri aequatur $0°.21'.1''\frac{1}{3}$ et latitudo fili penduli $= 9''\frac{1}{2}$. Error quadrantis eſt $40''$ ab altit. obſeruatis ſupraque notatis ſubtrahendus.

Error indicis Micrometri Grahami tubo 8 ped. applicati Arensburgi aequabat 20 partes ad diſtantias vel diametros obſeruatas addendas. Valor autem 30 Reuol.

 coch-

cochleae huius Micrometri, vel 1200 partium $=27'.28''\frac{1}{3}$. Diametri hoc Micrometro obſeruatae ſupraque notatae errore indicis 20 partium corrigendae ſunt omnes.

Obſeruationes Aſtronomicae exceptae ex Ephemerid. Aſtron. pro eruenda longitudine Obſeruatorii Arensburg. ex obſeruationibus, quas hunc in finem mecum communicauit Cel. *le Monnier*.

Obſeruationes Cél. *le Monnier*.

1752. Sept. 24. $23^b.\ 53'.\ 18''$ Midi vrai par les hauteurs correſpondantes du Soleil.

25. on a trouvé que $23^b.\ 55'.\ 42\frac{1}{2}'' = 360$ degrés à la Pendule.

26. $23^b.\ 56'.\ 5\frac{2}{3}''$ Paſſ. du centre du ☉, Midi vrai $23^b.\ 56'.\ 12\frac{1}{2}''$

27. $15.\ 45'.\ 33\frac{1}{3}''$ — 2 bord de la Lune.

$15.\ 48.\ 41\frac{2}{3}$ — ε du Taureau.

$15.\ 57.\ 36$ — Aldebaran

$23.\ 55.\ 25$ — Midi vrai.

Obſeruationes praecedentibus reſpondentes in Obſeruat. Arensb. habitae 1752.

d. $\frac{13}{24}$ Sept. Meridies verus ex 5 Altitud. ☉ reſpond. $- 23^b.\ 56'.\ 23''$ Pend.

d. $\frac{14}{25}$ Sept. $23^b.\ 57'.\ 53\frac{1}{4}''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d.

d. $\frac{15}{26}$. Sept. 14^{h}. Luna, et 16^{h} Palilicium per quadrant. obſeruata fuere

d. $\frac{15}{26}$. Sept. $23^{h}.58'.9''$ Pend. App. 2di limbi ☉ ad fil. vert. Merid. prox.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. 6^{h}. Lucida Lyrae in q. Merid. auſtr. et 13^{h}. β γ per quadr. obſeruat. fuere.

eod. $15^{h}.41'.36''$ Pend. Alt. marg. ☽. bor. $=50°.30'+6^{R}.4^{P}$.
42. 11 - - - - - - - - - - 6. 5
42. 39 - - - - - - - - - - 6. 8
43. 47 - - - - - - - - - - 6. 10
44. 1 - - - - - - - - - - 6. 14
15. 44. 12$\frac{1}{2}$ App. 2di limbi ☽ae ad fil. vert. Merid. prox.

eod. $15^{h}.50'.39''$ Pend. Altit. ε ♉ $=50°.30'-3^{R}.46^{P}$.
51. 28 - - - - - - 3. 43
$15^{h}.52'.9\frac{1}{4}''$ App. ε ♉ ad fil. vert. Merid. prox.
52. 44 Altit. - - - - - - - - 3. 44$\frac{1}{4}$
53. 13 - - - - - - - - - - 3. 42$\frac{1}{4}$
53. 49 - - - - - - - - - - 3. 44

eod. $16^{h}.25'$ Diam. ☽ae app. cornua iungens Micr. Grah. $=35^{R}.14\frac{7}{12}^{P}$.

eod. 17^{h}. ϱ Orion. 18^{h}. α Lyrae in q. Merid. bor. obſeruabantur.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. $23^{h}.56'.16''$ Pend. App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Merid prox.
58. 25 - - - 2di limbi ☉ ad idem fil.

d. $\frac{17}{28}$. Sept. $23^{h}.57'.44\frac{1}{4}''$ Pend. Merid. verus d. $\frac{18}{29}$. Sept. ex 3. altit. ☉ respond.

Comparando obſeruat. meridiei hodiernam cum obſeruatione d. $\frac{13}{24}$. Sept. inſtituta, patet motum Penduli

Aſtr. ita ſe habere vt diem ſolarem medium $36''$. 1. ſuperet, vel quod ad idem redit $23^h.56'\ 40''$.2 Pend. $=360°$. Quia vero eiusdem Penduli, cuius virgae longitudo ſemper eadem eſt, motus Petropoli inuentus ita fuit comparatus, vt $23^h.\ 57'.\ 14''. = 360°$. colligitur ex noſtris obſeruationibus Arensburgi inſtitutis longitudinem Penduli Arensburgi multo minorem eſſe longitudine Penduli Petropolitani, quin imo a lege elongationis Penduli ab Aequatore verſus Polos recepta adeo aberrare, vt operae pretium ſit haſce obſeruationes diligentiſſime proſequi. Eandem fere aberrationem confirmat alterum Pendulum virga ferrea munitum.

Inueſtigatio longitudinis Obſeruatorii Arensburg. ex obſeruatis eclipſibus Satellitum Iouis.

Comparatione inſtituta inter obſeruationes eclipſium Satell. ♃uis Petropoli habitas et calculum ſecundum Tab. *Wargent.* patet, immerſiones 1mi Satellitis ♃. menſe Oct. et Nou. 1752. ex Tab. praedictis ſupputatas $53''$ praecedere easdem immerſiones Petropoli obſeruatas; quo poſito longitudo Obſeruatorii Arensburgenſis modo ſequenti colligitur.

d. $\frac{22.\text{Oct.}}{2.\text{Nou.}}$ 1752. Immerſio 1mi Sat. ♃.

Pariſiis ſec. Tab *Warg.*	$=14^h.31'.40''$
Error Tab. add.	53
Immerſio correcta	14. 32. 33
Immerſ. Arensb. accur. obſ.	15. 52. 30

Diff.

Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb. =	$1^h.19'.57''$
d. $\frac{14}{25}$ Nou. Immerſio 1mi Satell. ♃. Pariſiis ſec. Tab. *Warg.* .	$14^h.38'.13''$
Error Tab. add. =	53
Immerſio correcta =	14. 39. 6
Immerſio Arensb. obſeruat.	15. 58. 45
Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb.	$1^h.19'.39''$

Conſimili modo colligitur differentia illa Merid. ex obſeruata immerſione 2di Satell. ♃. puta

D. $\frac{31\text{ Aug.}}{11\text{ Sept.}}$ Immerſio 2di Satell. ♃. Petropoli obſeruata	$14^h.30'.21''$
Diff. Merid.	1. 52.
Immerſio Pariſiis	12. 38. 21
Immerſio Arensb. obſeruat.	13. 57. 28
Diff. Merid. inter Obſ. Pariſ. et Arensb.	$1^h.19'. 7''$

Cum vero in hac obſeruatione coelum Arensburgi admodum eſſet vaporoſum, coniicere poſſumus, immerſionem hanc iuſto citius fuiſſe obſeruatam, adeoque differentiam Meridianorum ex illa deductam iuſta veraque eſſe minorem, id quod praecedentes concluſiones egregie confirmare videntur, ita vt differentia Merididianorum inter Obſeruatoria Pariſienſe et Arensburgenſe, donec accuratius determinetur, ſtatui poſſit = $1^h. 19'. 45''$ vel $50''$.

Pro Refractione determinanda in Obſeruatorio Arensburgenſi.

d. $\frac{16}{27}$. Sept. 1752. $6^h.5'.54''$ Pend. altit. α Lyrae $= 70°.20' + \frac{1}{3}$ fil. $+ 0^R.17^P$.

7.44 - - - - - - - $0.16\frac{1}{2}$

7.54 α Lyrae ad fil. vert. Merid. prox.

8.52 Altit. - - - - $+ 0.18$

9.51 - - - - - - - 0.19

eod. $18^h.3'.59''$ Alt. α Lyrae infra Pol. $= 7° - 1^R.25^P$.

4.50 - - - - - - - $1.25\frac{1}{3}$

5.21 - - - - - - - 1.26

Ab h. 18. 6′ ſtella per nubes tenuiſſ. obſeruabatur.

$6.$ o App. α Lyrae ad fil. vert. Mer. prox.

7.13 Altit. - - - - - - 1.22

8.17 - - - - - - - 1.17

---

d. $\frac{6}{17}$. Oct. 1752. $0^h.5'.24''$ Pend. Merid. verus

eod. $9^h.10'.57''$ Pend. Altit. Fomalhaut $= 1°.10' - \frac{1}{2}$ fil. $+ 1^R.50^P$.

12.20 - - - - - - - 1.42

Quamuis coelum hac in obſeruatione eximie eſſet ſerenum, ſtellam tamen Fomalhaut non niſi per interualla conſpicere licuit.

d. $\frac{9}{20}$. Oct. $0^h.4'.46\frac{1}{2}''$ App. 1mi limbi ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

$6.57\frac{3}{4}$ App. 2di limbi ☉ ad idem filum

---

d. $\frac{13}{24}$. Oct. $0^h.7'.48\frac{1}{3}''$ Pend. Centrum ☉ ad fil. vert. Merid. prox. (mora tranſ. diſci ☉ obſ. $= 2'.12''$)

eod. $15^h.5'.22''$ Pend. Altit. Capell. $= 77°30' + \frac{3}{4}$ fil. $- 0^R.73^P$.

Coelo

Coelo	$15^h.5'.49''$	– – – – – – –	$0.73\frac{1}{2}$
	6. 19	– – – – – – –	0.73
	6. 35	– – – – – – –	0.77
eximie	6. 55	– – – – – – –	0.76
	7. 9	– – – – – – –	$0.77\frac{1}{2}$
ſereno	$7.\ 25\frac{2}{3}$	App. Capellae ad fil. vert. Merid. prox.	
	8. 56	Altit. – – – – –	0.74
$23^h.56'.41''\frac{2}{3}$ Pend.	9. 9	– – – – – – –	0.75
$= 360°$.	9. 28	– – – – – – –	0.75
	9. 42	– – – – – – –	0.74
	10. 2	– – – – – – –	$0.72\frac{5}{8}$

d. $\frac{12}{23}$ Febr. 1753. $0^h.\ 7'.47\frac{2}{3}''$ Pend. Merid. verus ex 9. Alt. ☉ reſp.
$7.\ 48\frac{1}{2}$ Pend. centri ☉ ad fil. vert. Merid. prox. ($2'.12''$. mora obſ. tranſ. diſci ☉)

eod.	$18^h.30'.12''$	Pend. Altit. Capellae infra Polum $= 14°.0' + \frac{1}{3}$ fil. $+ 1^R.44^P$.	
	30. 34	– – – –	$1.43\frac{1}{2}$
Coelo eximio	31. 5	– – – –	$1.41\frac{1}{2}$
	31. 28	– – – –	1.38
ſereno	32. 8	– – – –	1.34
	32. 26	App. Capell. ad fil. vert. Mer. prox.	
$23^h.56'.46\frac{1}{2}''$ Pend	33. 21	– – – –	1.34
$= 360°$.	33. 43	– – – –	$1.37\frac{3}{5}$
	34. 11	– – – –	$1.39\frac{1}{2}$
	34. 40	– – – –	$1.40\frac{1}{2}$
	34. 58	– – – –	1.42

---

d. $\frac{22.\ Oct.}{2.\ Nov.}$ Limbo quadrantis in Merid. poſiti occidentem ſpectante
$9^h.32'.51\frac{1}{2}''$ Pend. Alt β Caſſiopeiae $= 90°\ 30' + \frac{1}{4}$ v. $\frac{1}{2}$ fil. $- 0^R.87^P$.

33. 12	– – – –	$0.85\frac{1}{2}$

Coelo

Coelo $9^h.33'.32''$ - - - - 0. $83\frac{1}{5}$
grate 33. 56 - - - - 0. 84
ſereno 34. 23 - - - - 0. 83
34. 41 - - - - 0. 82
Sec. calculum β 35. 17 - - - - 0. 81
Caſſ. per Merid. 35. 32 - - - - 0. 80
hodie tranſiit 35. 37 App. β Caſſi. ad fil. vert. Merid. prox.
$9^h.35'.37\frac{1}{5}''$ temp. 36. 25 Altit. - - - 0. 80
Pend. 36. 45 - - - - 0. $80\frac{1}{5}$
37. 5 - - - - 0. $81\frac{1}{5}$
37. 31 - - - - 0. 82
37. 56 - - - - 0. $84\frac{1}{5}$
38. 29 - - - - 0. 86
38. 55 - - - - 0. 88

D. $\frac{12}{23}$ Febr. 1758. $0^h.6'.5''$ Pend. Merid. verus ex 5 Altit. ☉ reſp.
D. $\frac{12}{23}$ Febr. - 13. 32. 26 Pend. Alt. β Caſſiopeiae infra Polum $= 26^{\circ}.0' + 2^R.52^P.$
32. 59 - - - - 2. $51\frac{1}{5}$
33. 24 - - - - 2. 49
33. 47 - - - - 2. 49
33. 55 App. β Caſſ. ad fil. vert. Merid. prox.
34. 34 Altit. - - + 2. 50
34. 56 - - - - 2. 51
35. 23 - - - - 2. 52
35. 50 - - - - 2. $52\frac{1}{5}$
36. 15 - - - - 2. 53

d. $\frac{13}{24}$ Febr. $0^h.7'.47\frac{2}{5}''$ Pend. Mer. verus ex 9 Altit. ☉ reſp.

---

d. $\frac{21}{2}$ Nou. Dec. $0^h.40'.13\frac{5}{6}''$ Pend. Merid. verus ex 6 Alt. ☉ reſp.
0. 40. 11 Pend. app. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

$2\frac{5}{6}'' =$ diff.

d. $\frac{24.}{7.}$ Nou. Dec. $0^{h}.41'.\ 9\frac{2}{3}''$ Pend. App. centri ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.
d. $\frac{26.}{7.}$ Nou. Dec. $0^{h}\ 43'.25\frac{1}{2}''$ Pend. App. centri ⊙ ad fil. vert. Merid. prox.
eod. $8^{h}.38'.34''$ Pend. Altitud. β Andromedae ſupra Polum $= 66^{\circ}.\ 0' + 2^{R}.\ 9^{P}.$

39. 2	- - - - - - - -	2. 9
39. 19	- - - - - - -	2. 10
40. 15$\frac{2}{3}$	App β Andr. ad fil. vert Merid. prox.	
41. 36	Altit. - - - - - -	2. 13
42. 5	- - - - - - -	2. 12

d. $\frac{1}{12}$. Mart. $0^{h}.15'.39''$ Pend. App. centri ⊙ ad fil. vert. Mer. prox.
eod. $13^{h}.38'$ circiter (hora nimirum culmin.) altitudo β Andromedae infra Polum $= 2^{\circ}.\ 50' + 0^{R}.\ 0^{P}.$ exactiſſime.

Secundum obſeruata circa tranſitus α Lyrae per fil. Tubi muralis d. $\frac{1}{12}$. et $\frac{6}{17}$. Mart. peracta prodit motus Pend. Aſtron. ita comparatus, vt $23^{h}.\ 56'.\ 46\frac{2}{3}'' = 360^{\circ}$.

Pro determinanda refractione ex comparatione obſeruationum Oeſilienſium circa ſtellas auſtraliores habitarum cum iis, quas circa easdem in promontorio B. S. habuit Cl. *de la Caille*. It. pro variatione refractionum Alt. Merid. obſeruatae in Inſ. Oeſilia.

d. $\frac{30.}{11.}$ Sept. Oct. 1752. Altit. Merid. app. Rigel $= 23^{\circ}.\ 20' - 1^{R}.\ 27^{P}.$
eod. - - Altit. Merid. app. Sirii $= 15^{\circ}.\ 20', \frac{1}{3}$ fil. $+ 2^{R}.\ 54^{P}.$
d. $\frac{7}{18}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15^{\circ}.\ 20'. + 2^{R}.\ 46\frac{1}{3}^{P}.$
d. $\frac{10}{21}$. Oct. - Altit. Merid app. Sirii $= 15^{\circ}.\ 20'. + 2^{R}.\ 48^{P}.$
d. $\frac{13}{24}$. Oct. - Altit. Merid. app. Sirii $= 15\ 20 + 2^{R}\ 49^{P}.$
d. $\frac{9}{20}$. Febr. 1753. Altit. Merid. app αHydrae $= 24^{\circ}.\ 10' - \frac{2}{3}$ fil $+ 0^{R}.\ 76^{P}.$

 eod.

eod. - - - Altit. Merid. app. α ♎ = 16°. 56 − 0R. 65P.
eod. - - - Altit. Merid. app. β ♏ = 12°. 40′ + 1R. 56½P.
eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ = 6°. 0′ + ½ fil. + 1R. 14P.
d. 12/23. Febr. - - Altit. Merid. app. α ♏ = 6°. 0′. + 1R. 58P.
d. 13/24. Febr 1′. ante culm. Alt. Mer app. Sirii = 15°. 20′ + 2R. 50½P.
eod. coelo eximie } Altit. Merid. app. β ♏ = 12°. 50′ − ½ fil − 2R. 97P.
eod. ſereno } Altit. Merid app. α ♏ = 6°. 0′ + 1R. 60P.
d. 17/28. Maii - - Altit. Merid. app. β ♏ = 12°. 50′ − 3R. 18P.
eod. - - - Altit. Merid. app. α ♏ = 6°. 0′ − ½ fil + 1R. 14½P.
d. 21 Maii / 1 Iun. - - Altitud. Merid. app β ♏ = 12° 50′ − 3R. 24P.
d. 26 Maii / 6 Iun. - - Altitud. Merid. app. δ ♏ = 9°. 40′ + 8R. 6P.

Obſeruationes fixarum, quae eandem fere habent Altit. Merid. Arensburgi et in Promont. B. S.

d. 21/22 Nou. 1752. Altit. Merid. app. α ♌ = 45°. 0′ − 1R. 95P.
d. 6/17 Febr. 1753. Altit. Merid. app. Vindemiatr. = 44°. 0′ + 1R. 75P.

Obſeruationes Oeſilienſes ſtellae Polaris pro determinanda Eleuatione Poli Obſeruatorii Arensburg.

d. 20/31 Oct. - - 0h. 12′. 43″½ Pend. app. cent. ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
d. 21 Oct. / 1 Nov. 1752. 0h. 12′. 29½ Pend. app. cent ☉ ad fil. vert. Mer. prox.
d. 22 Oct. / 2 Nov. - - 10h. 17′. 56″ Pend. altitud. Polaris ſupra Polum = 60′. 20′ − 1R. 38P½.

18.	50	- - - -	1. 38
21.	8	App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.	
22.	9	Altit. - - -	1. 37½
23.	54	- - - -	1. 38½
24	45	- - - -	1. 38
25.	47	- - - -	1. 39½

31.

31. 43 - - - - - 1. 42⅔
33. 10 - - - - - 1. 42⅔
34. 5 - - - - - 1. 44
35. 34 - - - - - 1. 47
36. 58 - - - - - 1. 50

d. $\frac{31}{1}$ Oct. Nov. 0^b.13′ 35″ Pend. Meridies medius ex 6 alt. ☉ reſpond.
eod. 10^b.15′.51″ Pend. Alt. Pol. ſupra Pol. = 60°. 20′ + ½ fil. - 1^R.41^P.

16. 20 - - - - - 1. 39½
16. 45 - - - - - 1. 38½
17. 0 - - - - - 1. 39
17. 25 - - - - - 1. 38⅔
17 55 App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.
19. 16 Altit. - - - - 1. 38½
20. 48 - - - - - 1. 39⅔

d. $\frac{31}{1}$ Nov. Dec. 0^b. 40′. 13″⅔ Pend. Merid. verus ex 6 altit. ☉ reſpond.
40. 11 — App. centri ☉ ad fil. vert. Mer. prox.

2″⅔ = diff.

d. $\frac{1}{14}$ Dec. 19^b. 59′. 15″ Pend. Altitud. Polaris infra Polum = 56°. 20′ + ¾ v ½ fil. – 2^R. 6^{P}¾

20. 0. 32 - - - - - 2. 9
1. 59 - - - - - 2. 8½
3. 55½ App. Pol. ad fil. vert. Merid. prox.
5. 24 Altit. - - - - 2. 6½
8. 54 - - - - - 2. 2¼

d. $\frac{1}{16}$ Dec. 0^b. 55′. 37″⅔ Pend. App. centri ☉ ad fil vert. Mer. prox.
d. $\frac{10}{21}$ Febr. 1753. 0^b 6′. 5″ Pend. Meridies verus ex 5. alt. ☉ reſp.
d. $\frac{12}{13}$ Febr. 14^b 17′. 45″ Pendul. Altitud Pol. infra Pol. = 56°. 20′ – 2^R. 6^P.

18. 7 - - - - - 2. 7
18. 30 - - - - - 2. 8½
18. 58 - - - - - 2. 8½

19. 21	-	-	-	-	2. 8½
19. 53	-	-	-	-	2. 9½
20. 20	-	-	-	-	2. 11
20. 51	-	-	-	-	2. 9
21. 14	-	-	-	-	2. 9
21. 31	-	-	-	-	2. 8
21. 49	-	-	-	-	2. 10
22. 25	-	-	-	-	2. 9½
22. 54	-	-	-	-	2. 10
23. 46 App. Polaris ad fil. vert. Mer. prox.					
25. 15 Altit.	-	-	-		2. 10
26. 4	-	-	-	-	2. 8
27. 6	-	-	-	-	2. 6
28. 4	-	-	-	-	2. 7
28. 39	-	-	-	-	2. 7
30. 5	-	-	-	-	2. 6.

d. 13/24 Febr. $0^h.7'.47''\frac{2}{3}$ Pend. Meridies verus ex 9 alt. ⊙ reſp.

Pro definienda differentia Parallelorum Obſeruatorii Petropolitani et Arensburgenſis.

d. 23/3 Mart./Apr. 1752. Petropoli obſeruata fuit $2'.45''$ poſt culminationem et $0'.46''$ poſt appulſum ad fil. vert. quadr. altit. apparens Procyonis $= 35^\circ.50' + \frac{2}{3}$ fil. $+ 2^R.56^{P}\frac{1}{3}$.

d. 10/21 Oct. 1752. Arensburgi obſeruata fuit altit. Merid. appar. Procyonis $= 37^\circ.40' + \frac{2}{3}$ fil. $- 1^R.52^{P}\frac{1}{2}$ Calculo rite peracto, prodit ex hiſce obſeruatis differentia Parallelorum quaeſita $= 1^\circ.41'.14''$, vel $15''$.

Fig. 1.

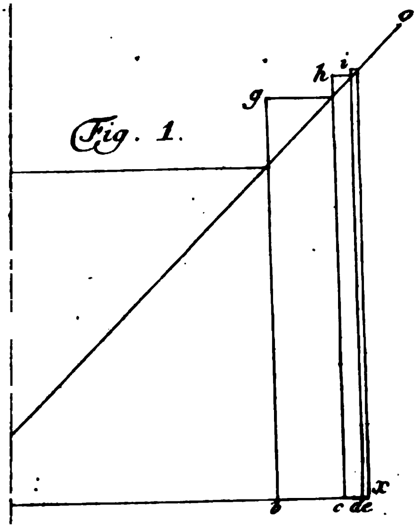


Fig. 2.

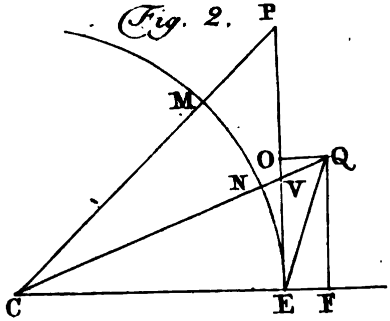


Fig. 3.

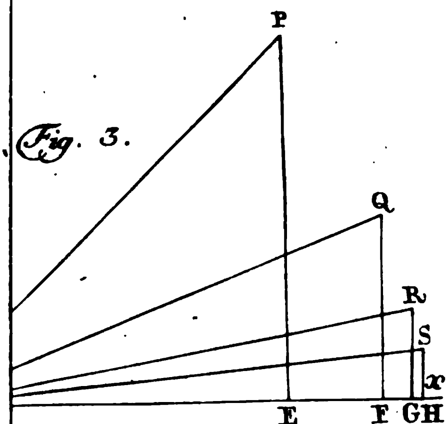


Fig. 4.

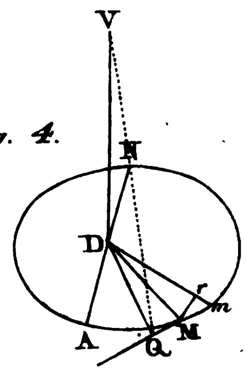


Fig. 5.

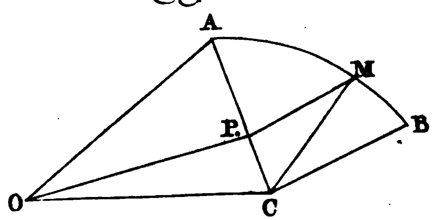


Fig. 1.

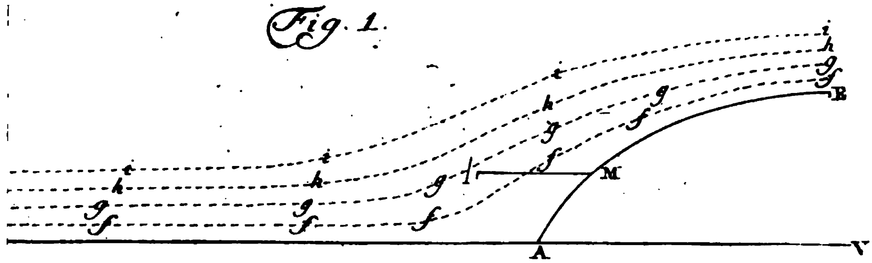


Fig. 2.

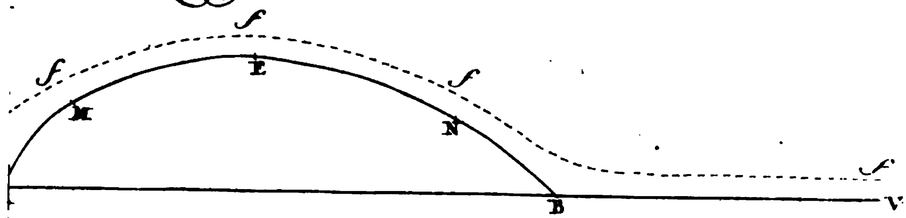


Fig. 3.

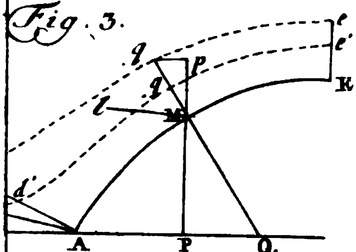
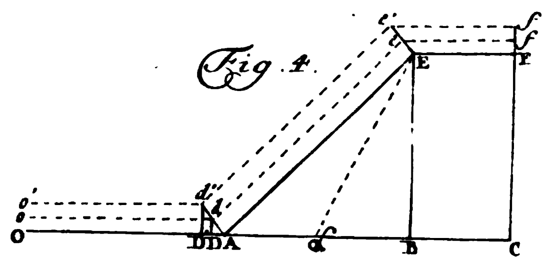


Fig. 4.



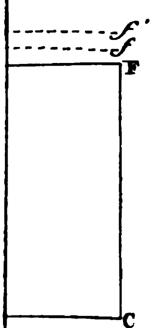


Fig. 6.

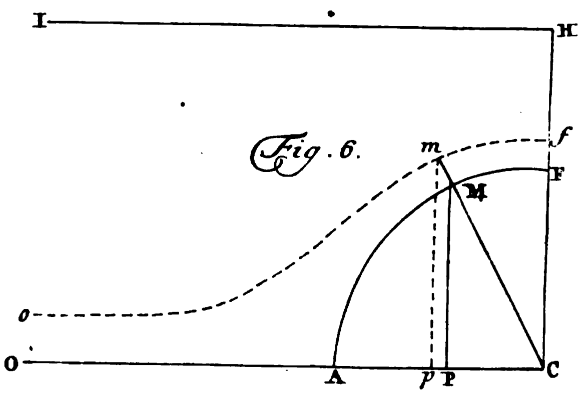


Fig. 1.

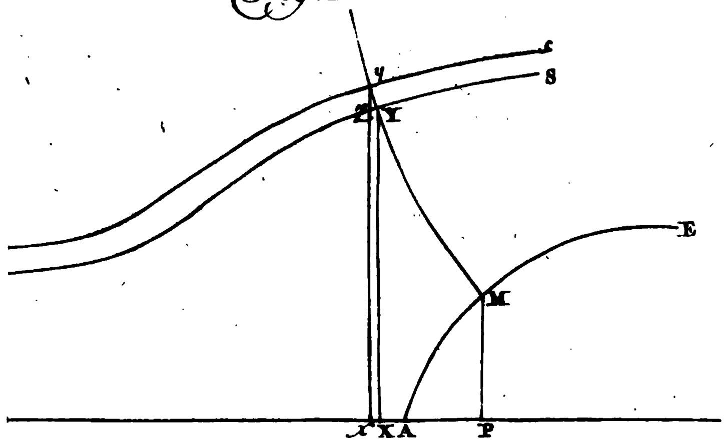
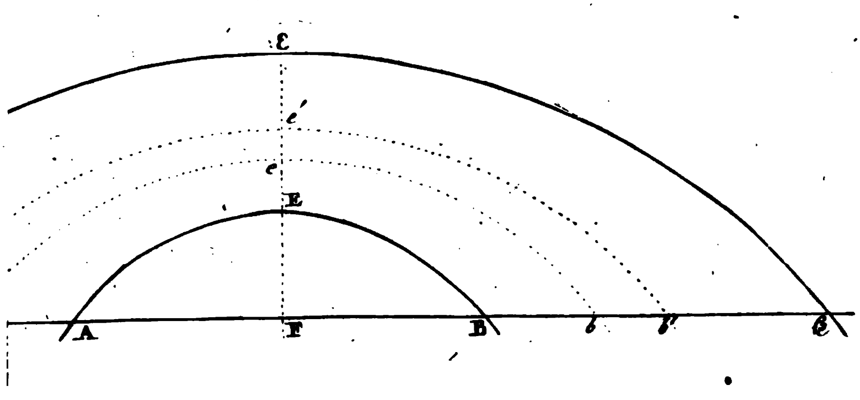


Fig. 2.



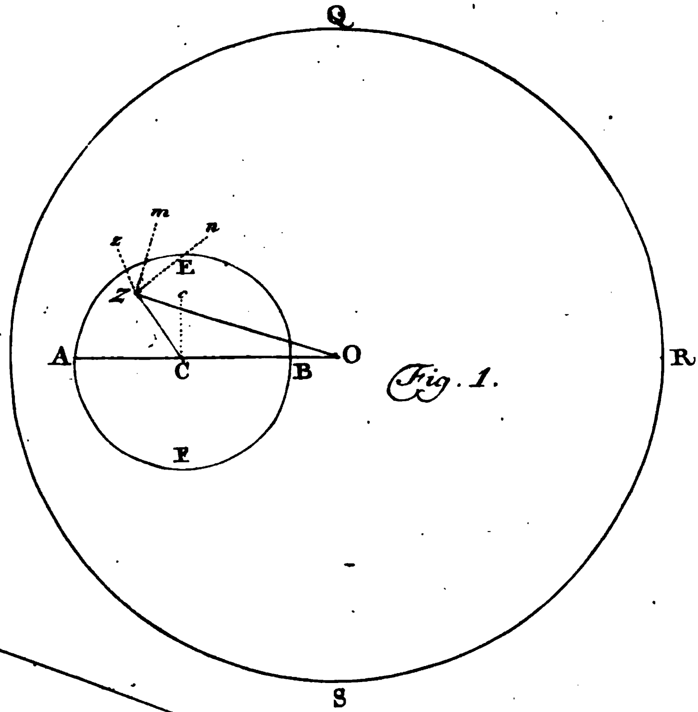


Fig. 1.

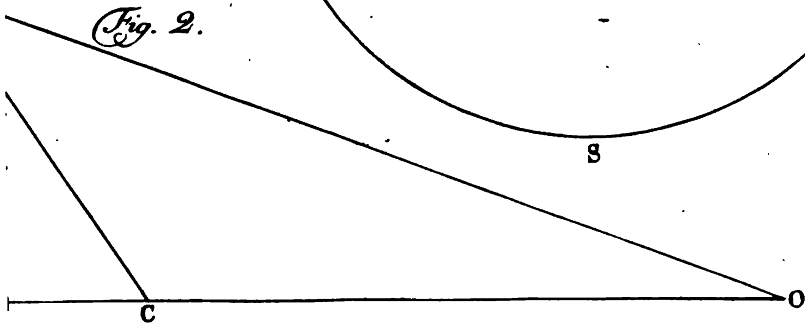


Fig. 2.

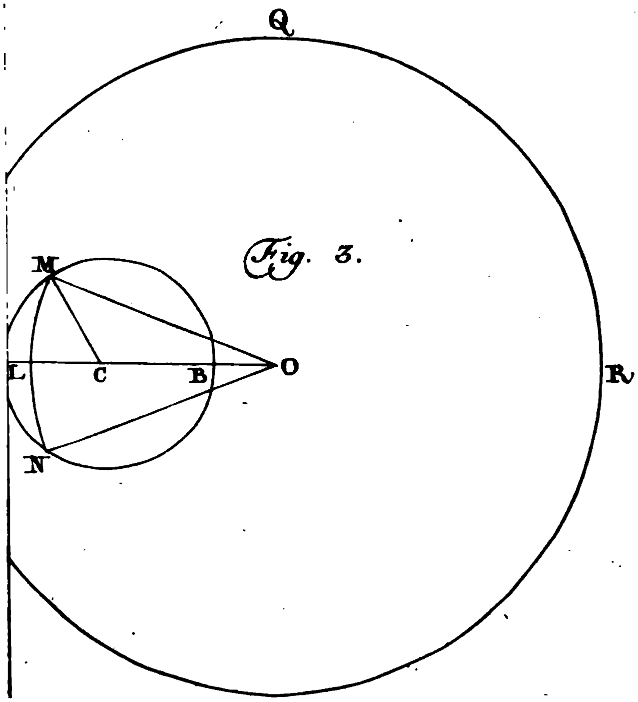


Fig. 3.

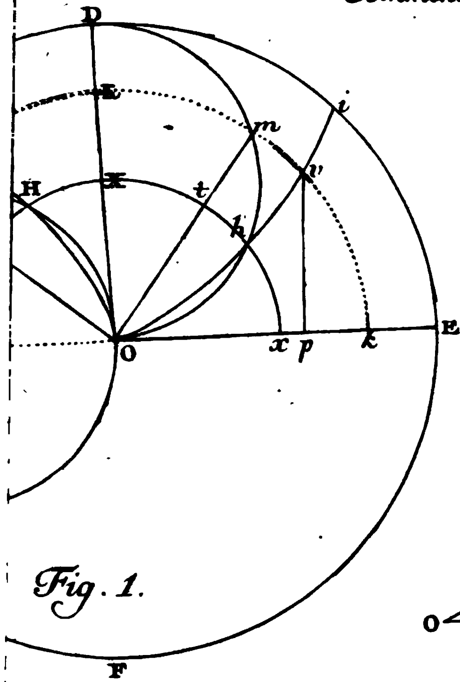


Fig. 1.

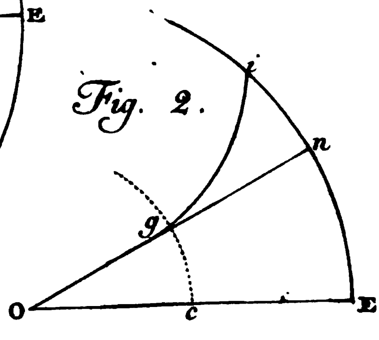


Fig. 2.

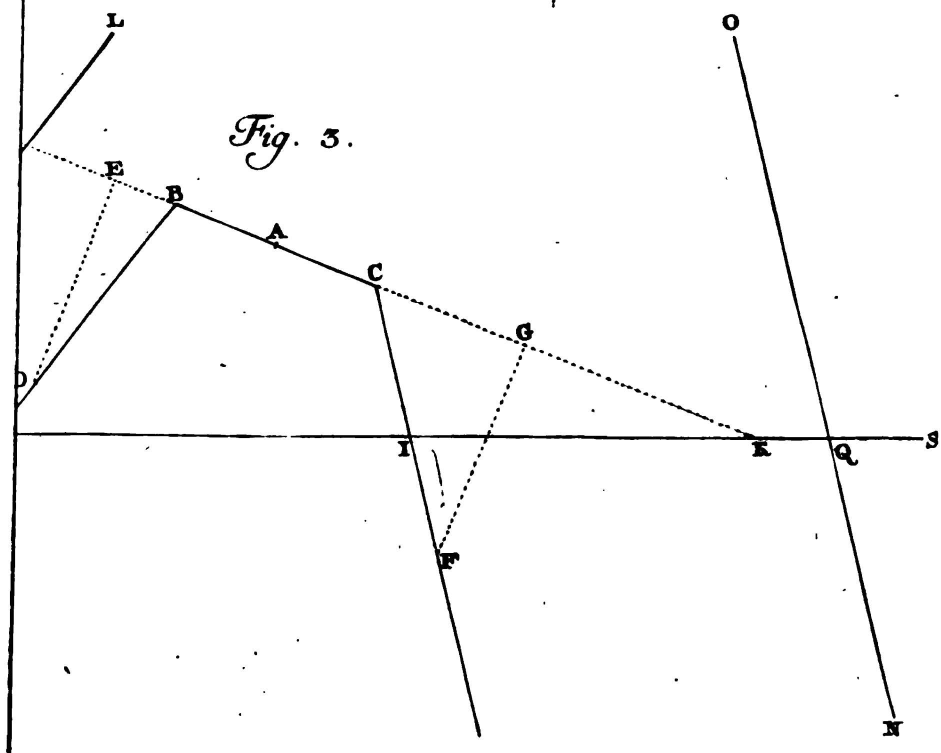
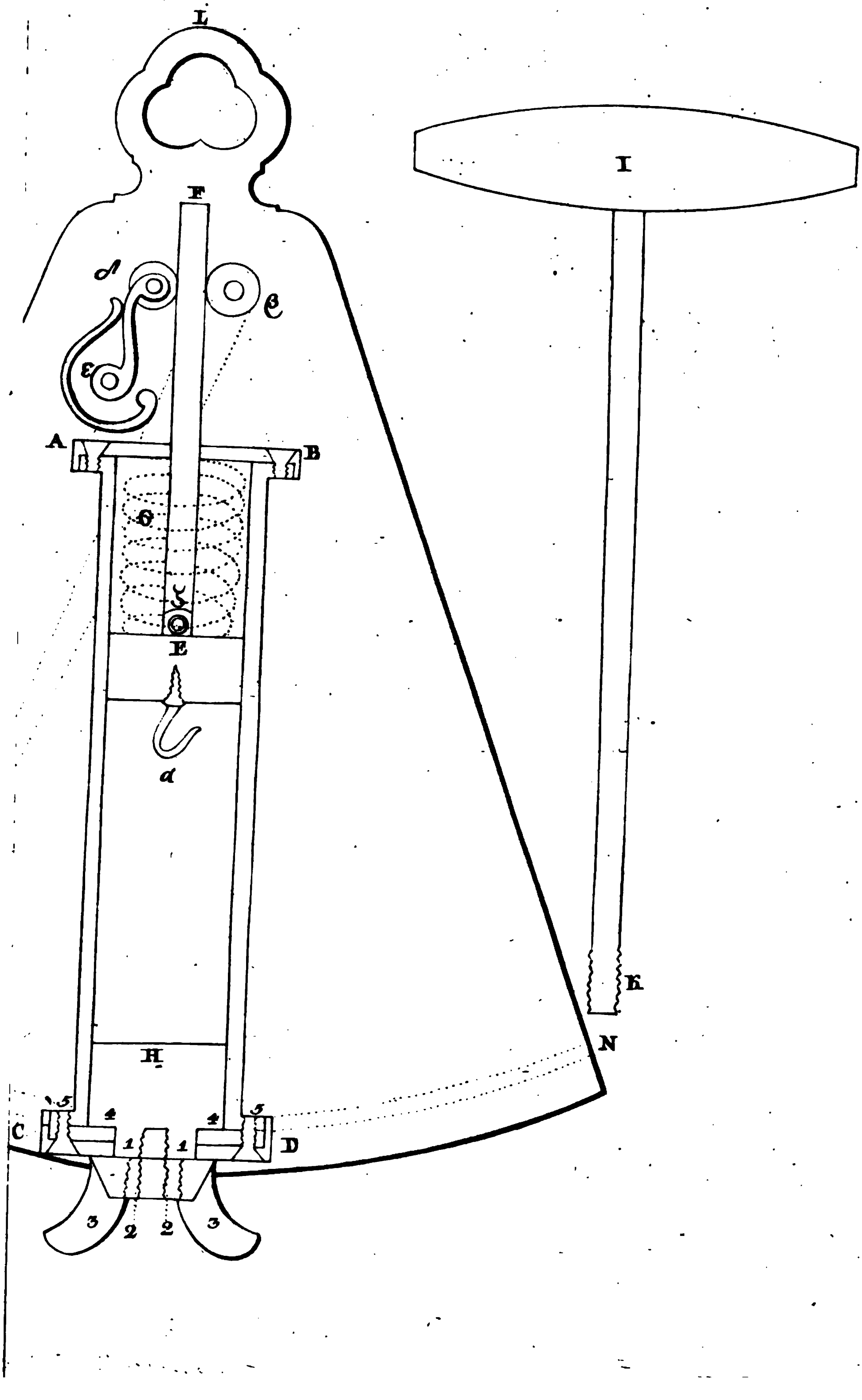


Fig. 3.


L
F
I
A
B
E
H
K
N
C
D
1
1
2
2
3
3
4
4
5
5

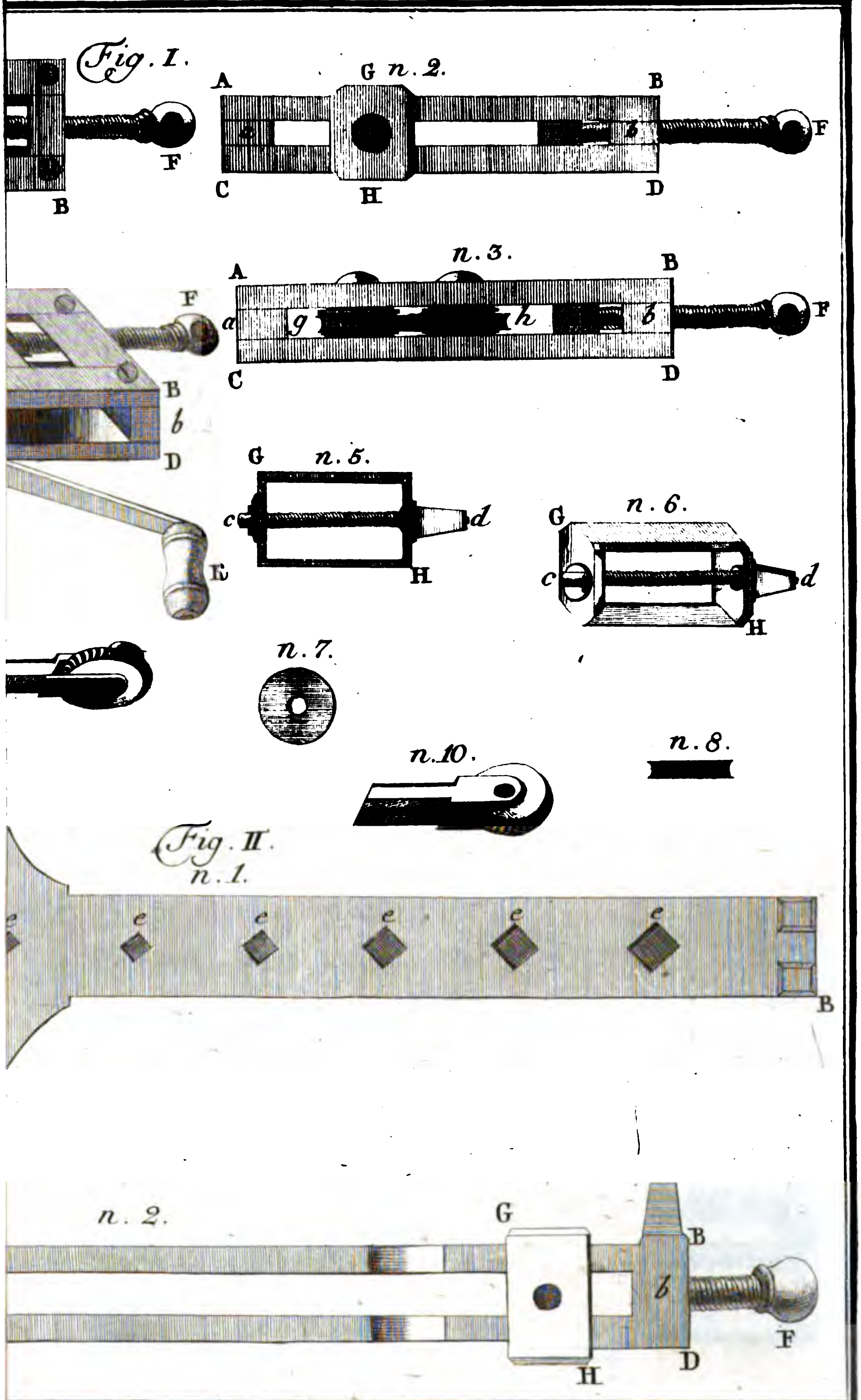
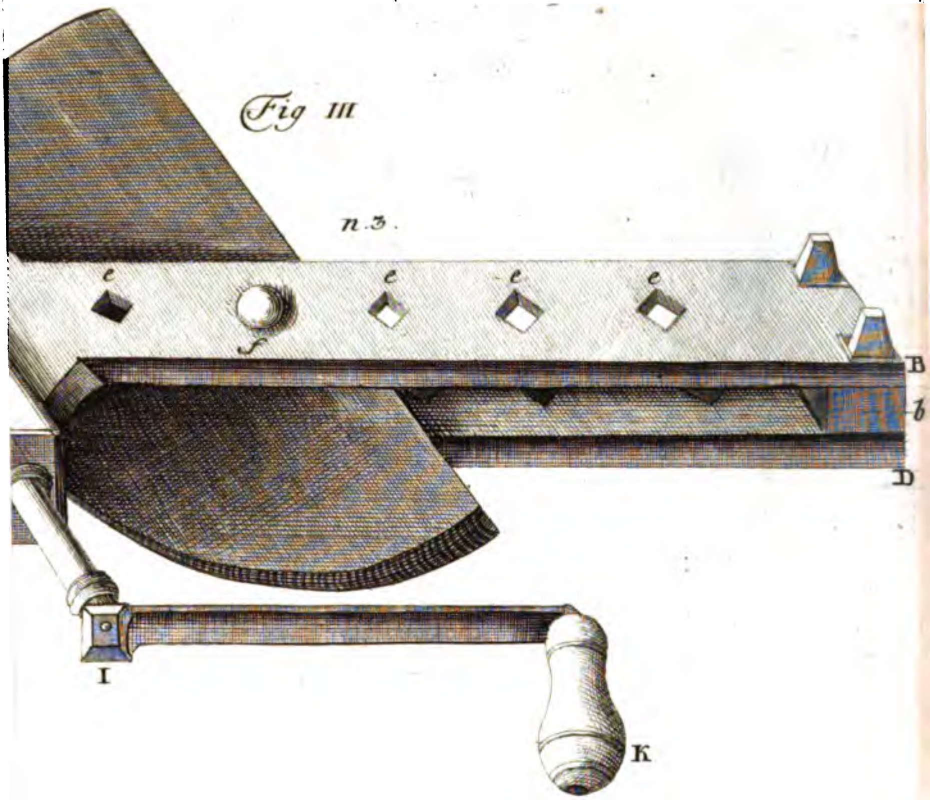
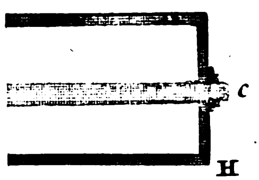

Fig. I.
n. 2.
n. 3.
n. 5.
n. 6.
n. 7.
n. 10.
n. 8.
Fig. II.
n. 1.
n. 2.

Fig III

n. 3.



n. 4.



n. 5.

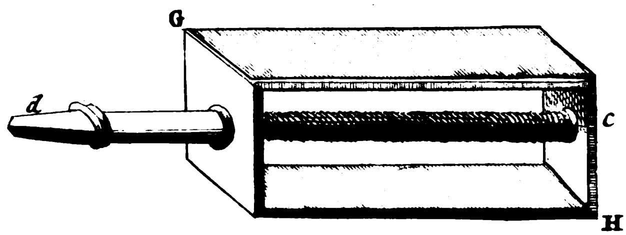
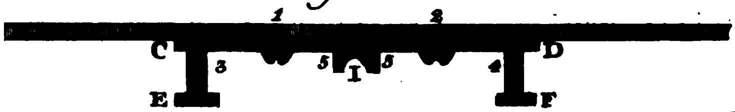


Fig. 2.



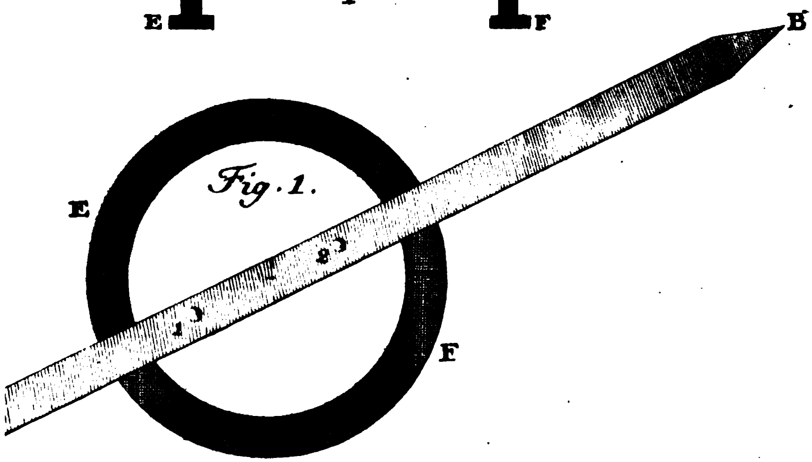


Fig. 1.

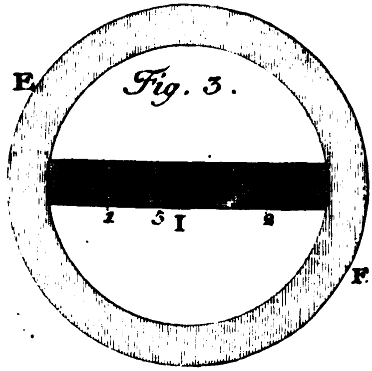
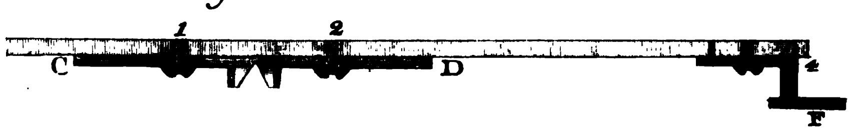


Fig. 3.

Fig. 4.



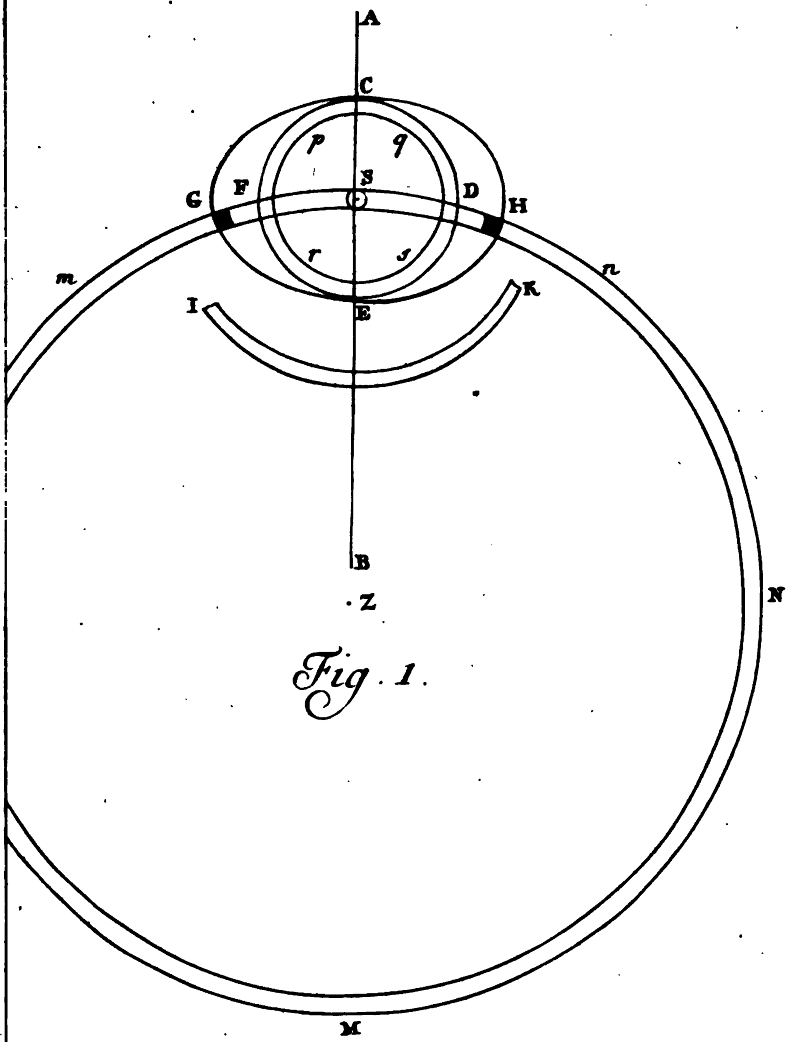
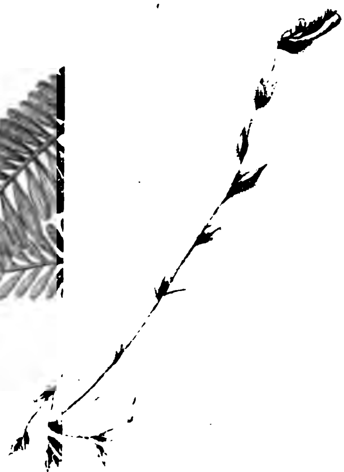


Fig. 1.

Meſſerſchmidia



Aeſchinomene



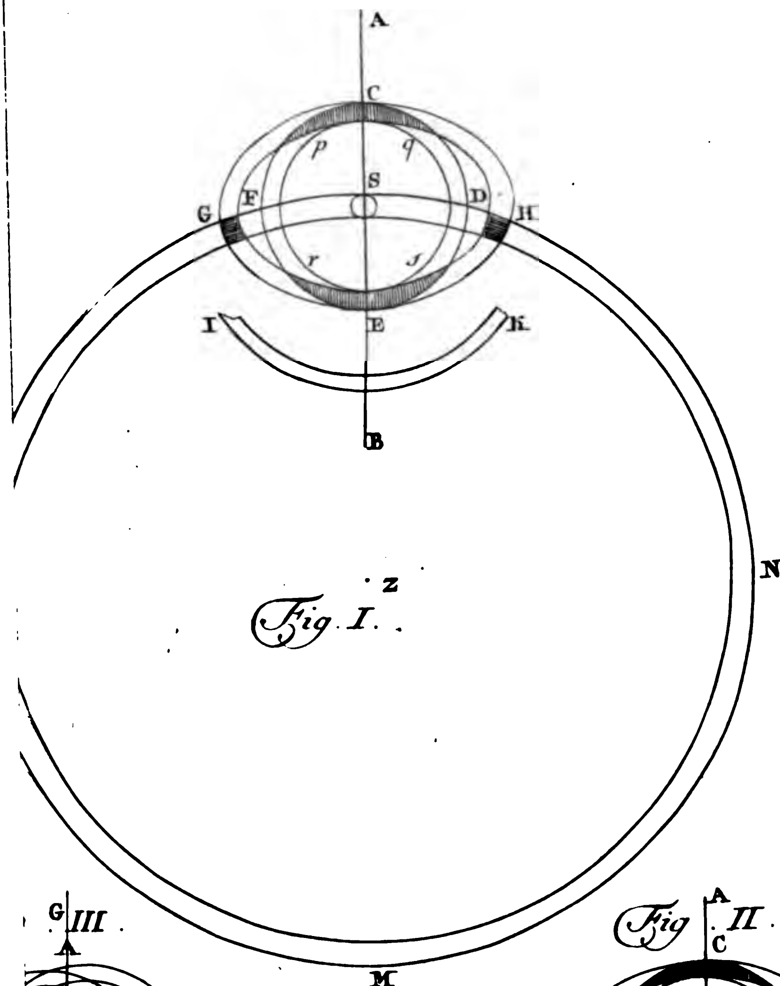


Fig. I.

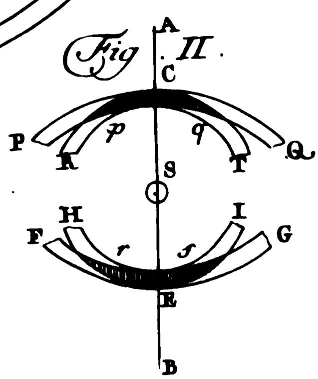
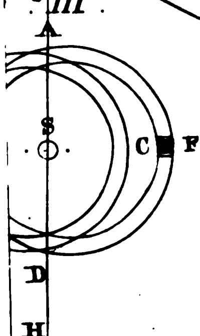


Fig. II.



III.

Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VIII. Tab. XIII.



Fig. II.

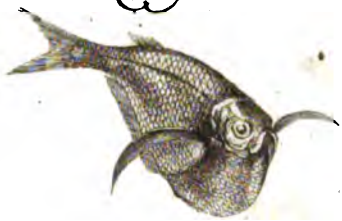


Fig. III.

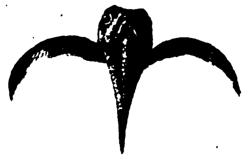


Fig. IV.

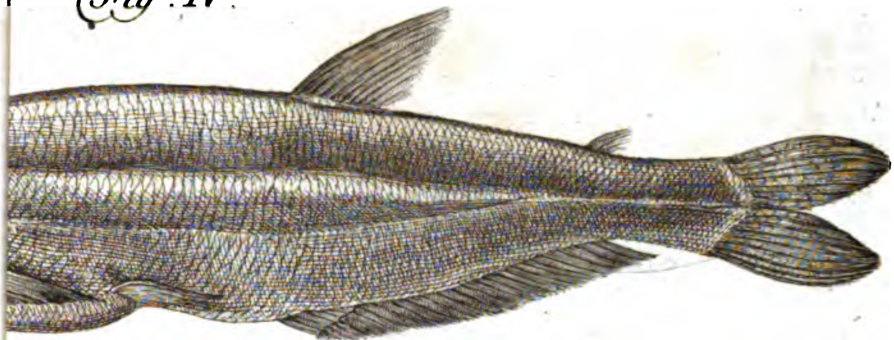


Fig. V.

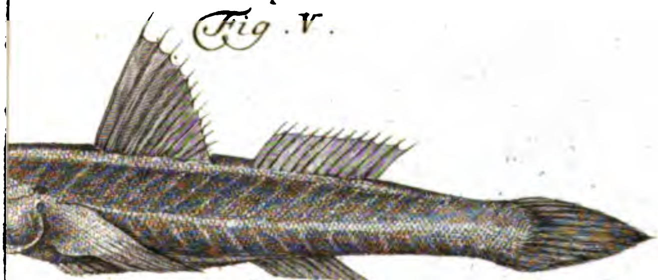


Fig. VI.



Comment. Nov. Ac. Imp. Sc. Petrop. Tom. VIII. Tab. XIV.

Fig. II.



Fig. III.



Fig. IV.





Fig. V.



Fig. VI.



Aeſchinomene



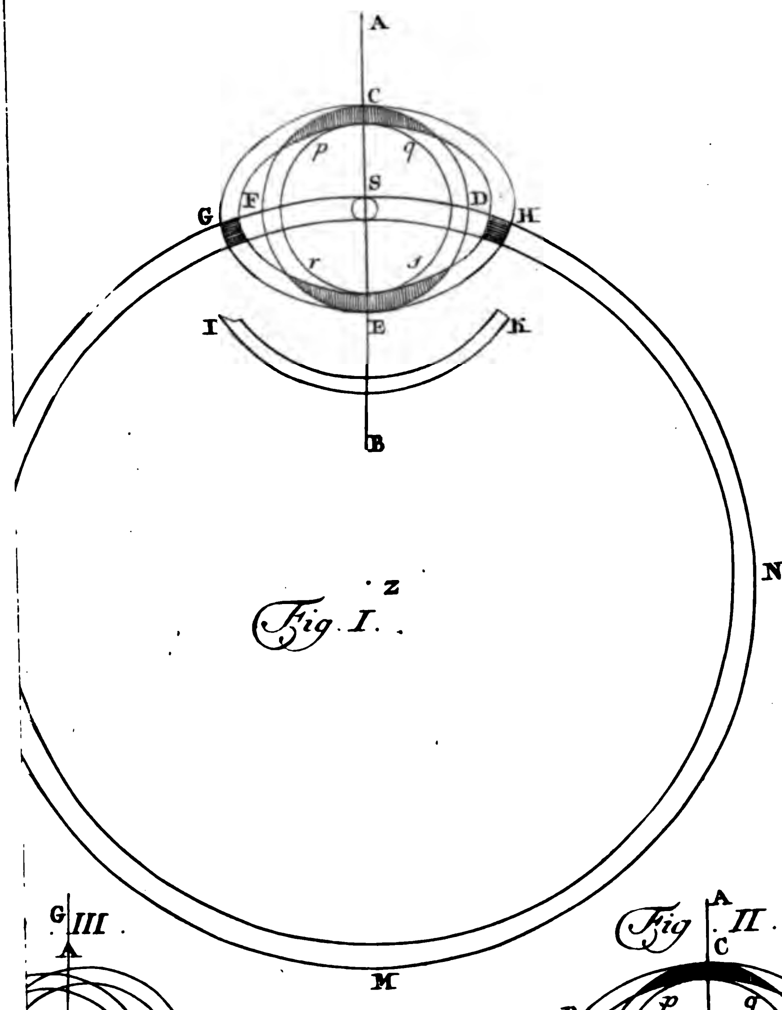
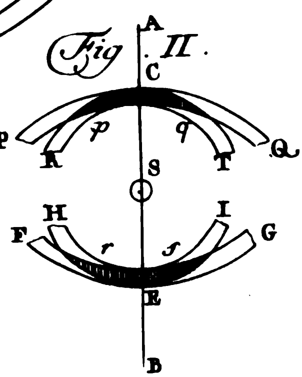
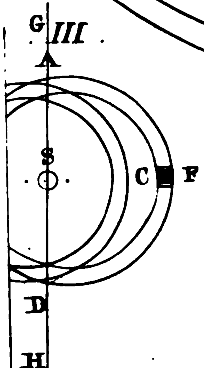


Fig. I.

Fig. II.



III.





sina

Fig. II.



Fig. III.



Fig. IV.

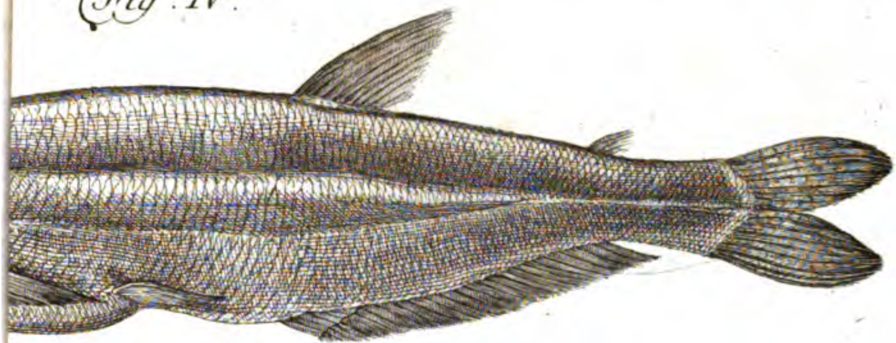


Fig. V.

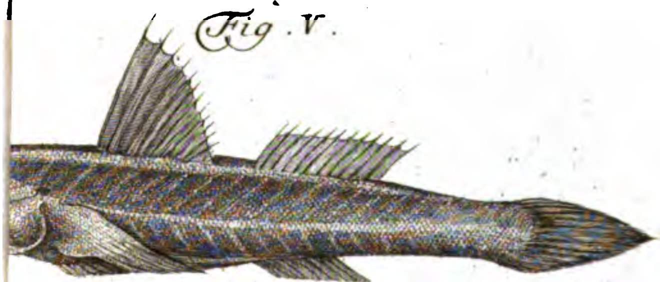


Fig. VI.



This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

3 2044 092 615 343